KOMPENDIUM

DER

THEORETISCHEN PHYSIK.

VON

DR. WOLDEMAR VOIGT,

O. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ZWEITER BAND.

ELEKTRICITÄT UND MAGNETISMUS. OPTIK.

LEIPZIG,

VERLAG VON VEIT & COMP.

1896.

Alex. Ziwet
gt.
8-31-1922

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Nachdem im Vorwort zum ersten Bande das allgemeine Ziel bezeichnet worden ist, dem ich bei der Abfassung dieses Kompendiums nachgestrebt habe, und nachdem ebenda in Bezug auf den zweiten Band bemerkt worden ist, daß in ihm die Grundgesetze der Elektricitätslehre, des Magnetismus und der Optik „frei von speziellen Vorstellungen, allein aus den Resultaten der Beobachtung“ entwickelt werden sollten, bleiben hier nur noch die speziellen Gesichtspunkte zu erörtern, die bei der Behandlung dieser Gebiete maßgebend gewesen sind.

Die Darstellung der Elektricitätslehre hält sich insofern an den Gang der historischen Entwickelung, als sie, mit der Elektrostatik und dem Magnetismus beginnend, über den Elektromagnetismus zur Induktion leitet; aber es ist Sorge getragen, von allem Anfang an den allgemeinen Standpunkt einzunehmen, den erst die neueste Entwickelung der Wissenschaft der Betrachtung angewiesen hat. So ist, um nur ein Beispiel zu geben, die besondere Art der Einführung der Potentialfunktion durch die Rücksicht auf die späteren energetischen Betrachtungen bestimmt.

Sind nun auch der Darstellung der Theorie spezielle Vorstellungen über den Mechanismus der betrachteten Vorgänge nicht zu Grunde gelegt, und ist daher jene aus dem Kombinieren von Erfahrungsthatsachen und hypothetischen Anschauungen entstehende gemischte Methode vermieden, die in vielen Lehrbüchern benutzt wird, so sind doch die Resultate der Theorie, wo immer angängig, durch Zuhilfenahme der Begriffe von Ladungen und Strömungen veranschaulicht, und es ist dadurch der Anschluß an den gewöhnlichen Sprachgebrauch gewonnen.

Diese Behandlungsart, für welche Arbeiten von Beltrami und Hertz teilweise Vorbilder geliefert haben, dürfte am meisten die mittlere Linie halten zwischen den gleichzeitig wohl kaum voll zu befriedigenden Anforderungen an Strenge, an Anschaulichkeit und an naturgemäßes Fortschreiten vom Einfachen zum Zusammengesetzten.

Die Einheiten, welche der Darstellung durchaus zu Grunde liegen, sind die elektrostatisch-magnetischen, die Hertz in zwei fundamentalen Abhandlungen (Wied. Ann. Bd. 40 u. 41) benutzt hat, und die sich bei allen allgemeinen theoretischen Darstellungen in erster Linie empfehlen; doch ist an vielen Stellen auf die Änderungen hingewiesen, welche die Einführung des technisch gebräuchlichen, elektromagnetischen Maßsystemes in die Resultate der Theorie bewirken würde.

Auch die Nomenklatur ist im wesentlichen die von Hertz a. a. O. angewandte; z. B. unterscheide ich nach seinem Vorbilde freie und wahre Ladungen und bezeichne ihre Differenz als scheinbare oder influenzierte. Eine folgenreiche Erweiterung dieser Benennungen mag besonders hervorgehoben werden; ich ordne in Übereinstimmung mit der bekannten Ampère'schen Theorie den wahren elektrischen Strömen als scheinbare oder äquivalente die mit dem influenzierten Magnetismus gleichwertigen zu und bezeichne ihre Superposition als freie Ströme. Die Einführung der letzteren gestattet, eine große Zahl allgemeiner Sätze, besonders über Induktion, überaus einfach zu gewinnen und auszusprechen.

Eine besondere Schwierigkeit bot die Auswahl der Bezeichnungen oder Symbole. Es ist von autorisierter Seite die Mahnung ausgesprochen, sich hierin durchaus an Maxwell's Vorgang zu halten; aber so sehr ich ein allgemein angenommenes System von Bezeichnungen für einen Gewinn halten würde, so habe ich mich doch für das Maxwell'sche nicht entscheiden können.

Einmal aus inneren Gründen, insofern ich dasselbe nicht für durchaus glücklich halten kann; wenn man durch die Auswahl der Buchstaben Ähnlichkeit oder Verschiedenheit der dargestellten Funktionen andeuten kann und soll, so läßt das Maxwell'sche System, wie mir scheint, mancherlei zu wünschen übrig.

Sodann aus äußeren Gründen, insofern bei einem die ganze theoretische Physik umfassenden Kompendium Funktionen, die in verschiedenen Gebieten auftreten, vorteilhaft mit denselben Buchstaben bezeichnet werden, und hierdurch die freie Auswahl für ein einzelnes Gebiet wesentlich beschränkt ist.

Die von mir gewählte Bezeichnung schließt sich nach Möglichkeit, d. h., soweit der zuletzt erwähnte Umstand Freiheit ließ, an die von Hertz a. a. O. eingeführte an. Von den notwendigen Abweichungen ist besonders eine zu nennen, die dadurch veranlaßt ist, daß die Buchstaben L, M, N für die Komponenten der magnetischen Kraft nicht mehr verfügbar waren.

Um das Verständnis auch eines aus dem Zusammenhang gerissenen Kapitels der Elektricitätslehre nach Möglichkeit zu erleichtern, gebe ich nach dem Inhaltsverzeichnis eine Zusammenstellung der wichtigsten der im IV. Teil eingeführten Bezeichnungen; diese sind konsequent beibehalten, doch war es nötig, einzelne Buchstaben des Schemas vorübergehend auch in anderer Bedeutung zu benutzen. —

Für die Darstellung der Optik lag es natürlich nahe, wie mehrfach geschehen, die elektromagnetischen Gleichungen als Grund-

lage zu benutzen. Indessen führt dieser Weg ohne Zuhilfenahme mehr oder weniger bedenklicher Hypothesen bisher doch nicht eben weit, und seine Wahl hätte demnach jene gemischte Methode der Behandlung nötig gemacht, die ich schon in der Elektricitätslehre zu vermeiden gesucht habe. Ich habe vorgezogen, auch in der Optik über den Mechanismus des Vorganges eine bestimmte Vorstellung nicht einzuführen, die Grundgleichungen für den einfachsten Fall der Lichtausbreitung im leeren Raum direkt auf die Erfahrung zu basiren und ihnen im HAMILTON'schen Prinzip eine Form zu geben, die eine Verallgemeinerung auf kompliziertere Verhältnisse nach übersichtlichen Grundsätzen und unter steter Vergleichung mit der Erfahrung gestattete, — ein Weg, der dem in den einzelnen Kapiteln der Elektricitätslehre wiederholt angewandten durchaus parallel geht. Dabei ist natürlich nicht unterlassen, die Beziehungen der Resultate zu der elastischen und der elektromagnetischen Lichttheorie, wo immer angängig, deutlich hervorzuheben.

Die Vorgänge werden dargestellt mit Hilfe einer als Polarisationsvektor p bezeichneten gerichteten Größe, die identisch ist mit dem NEUMANN'schen Vektor der elastischen Theorie, und nahe zusammenhängt mit der magnetischen Kraft in der elektromagnetischen Theorie; der mit ihr rein geometrisch verbundene FRESNEL'sche Vektor d wird wesentlich nur als bequeme Abkürzung geführt. Für die Theorie der anomalen Dispersion werden weitere Vektoren P_h herangezogen, die an der ponderabeln Materie haften.

Die Benennungen sind im allgemeinen die gebräuchlichen; daß einfarbiges Licht nicht mehr als homogen bezeichnet ist, daß vielmehr unter einer homogenen ebenen Welle eine solche verstanden wird, in deren Ebenen mit Schwingungsform und Phase auch die Amplitude konstant ist, wird wohl kaum beanstandet werden.

Da die Rechnungen sehr viel mit komplexen Lösungen der Differentialgleichungen operiren, so ist der schon in der Mechanik nichtstarrer Körper angewandte Kunstgriff wieder eingeführt, zur Vermeidung von Verwechselungen alle komplexen Größen mit deutschen Lettern zu bezeichnen, ein Verfahren, das bei der Theorie der elektromagnetischen Schwingungen im engeren Sinne nicht angängig war, da hier das deutsche Alphabet schon heranzuziehen war, um nur für die reellen Größen genügende Bezeichnungen zu erhalten. —

Der Umfang des II. Bandes scheint auf den ersten Blick in Widerspruch zu stehen mit dem im Vorwort zum ersten Bande aufgestellten Ziele einer „kurz zusammenfassenden Darstellung". Indessen dürfte die Prüfung seines Inhaltes darthun, daß nur die

große Zahl der in ihm besprochenen Erscheinungen den Umfang des Bandes bedingt hat, daß aber jedes einzelne Gebiet so kurz behandelt ist, als mit Vollständigkeit und Klarheit nur irgend verträglich war. In Bezug auf die Auswahl der durchweg möglichst einfachen Beispiele ist nach dem Vorwort zum ersten Bande verfahren: Gebiete von einfachster physikalischer Grundlage, also geringster Mannigfaltigkeit an Erscheinungen, sind, obwohl sie jederzeit das größte mathematische Interesse bieten, kärglich bedacht, und die Ausführlichkeit wächst mit dem Reichtum und der Verschiedenartigkeit der umfaßten Vorgänge. So nimmt — entgegen dem gewöhnlichen Verhältnis — die Elektrostatik der Leiter nur etwa den dritten Teil des Raumes ein, welcher der Elektrostatik der Dielektrica eingeräumt ist.

Eine geringe Ausdehnung über das absolut nötige Maß hinaus hat der Band durch kleine Wiederholungen erfahren, welche bestimmt sind, die Teile desselben möglichst in sich abzurunden und dem Leser ihr Studium außer dem Zusammenhang mit den übrigen zu ermöglichen. —

Auch in Bezug auf diesen Band bin ich Herrn Dr. Pockels für ausgiebige Hilfe bei der Redaktion und bei der Korrektur, sowie für die Aufstellung der Litteraturnachweise zu großem Dank verpflichtet. Korrekturen haben außer ihm Herr Prof. Riecke und Herr Dr. Schütz freundlicherweise durchgesehen. Das Sachregister haben die Herren Dr. Pockels und Schütz ausgearbeitet. Herr Dr. Sommerfeld hat die Güte gehabt, mir die Benutzung seiner schönen Arbeit über die Diffraction an der Halbebene zu ermöglichen, die erst nach Fertigstellung des Manuscriptes zu diesem Bande im Druck erschienen ist.

Den Herren Prof. Beltrami, Boltzmann und Farkas verdanke ich die Hinweise auf einige Ungenauigkeiten, die im ersten Bande übersehen worden sind, und die ich nun neben einer kleinen Zahl bemerkter Druckfehler im Anhang zu diesem berichtigt habe.

Es ist bei dem großen Umfang des bearbeiteten Stoffes mehr als wahrscheinlich, daß sich trotz der aufgewandten Sorgfalt noch andere Fehler eingeschlichen haben, und jeder Hinweis auf einen solchen würde mich zu Dank verpflichten. —

Ich fühle mich schließlich noch veranlaßt, die große Liebenswürdigkeit, mit welcher der Herr Verleger meiner Arbeit die vollste Freiheit gewährt hat, mit warmem Dank anzuerkennen und daran den Wunsch zu knüpfen, daß das von ihm gehegte Vertrauen sich bewähren und das von ihm verlegte Werk Interesse finden möchte.

Göttingen, im Februar 1896. **W. Voigt.**

Inhalt.

Vierter Teil. Elektricität und Magnetismus.

I. Kapitel. Elektrostatik.

II. Kapitel. Magnetismus.

III. Kapitel. Elektromagnetismus.

Fünfter Teil. Optik.

I. Kapitel. Die allgemeinen Grundlagen der Theorie.

II. Kapitel. Fortpflanzung ebener Wellen in durchsichtigen Medien.

Zusammenstellung der wichtigsten der im IV. Teil angewandten Bezeichnungen.

Wo dieselben Buchstaben für elektrische und für magnetische Größen benutzt sind, ist im Bedürfnisfalle die Unterscheidung durch beigesetzte Indices e und m bewirkt. Den Vektorgrößen sind im Nachstehenden ihre Komponenten in Klammer beigefügt.

E Energie, A Arbeits-, Ω Wärmemenge;
ε, α, ω dieselben Größen auf die Volumeneinheit bezogen.
K (Ξ, H, Z) Kraft, Δ (Λ, M, N) Drehungsmoment } beliebigen Ursprunges, auf einen beliebigen ponderabeln Körper ausgeübt.
u, v, w und l, m, n Verschiebungs- und Drehungskomponenten.
$\Xi_x, \ldots \Xi_y$ allgemeine Druckkomponenten,
$X_x, \ldots X_y$ dergl. elastischen Ursprunges,
$A_x, \ldots A_y$ dergl. elektrischen oder magnetischen Ursprunges.
K (X, Y, Z) elektrische Feldstärke,
N, S, ihre Komponenten nach Richtungen n und s;
$\int S\,ds = L$, Linienintegral von K, räumliche elektromotorische Kraft,
$\int L\,dt = T$, Zeitintegral von L, Integralkraft.
R (A, B, C) magnetische Feldstärke.
ϱ, ϱ', ϱ'' wahre, freie, influenzierte elektrische oder magnetische Raumdichte,
σ, σ', σ'' dergl. Flächendichte,
m, m', m'' und e, e', e'' dergl. magnetische und elektrische Ladungen.
$\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$) elektrische Polarisation,
$\mathfrak{R}$ ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) magnetische Polarisation;
$\mathfrak{d}_{hk}$ elektrische Permeabilitäten oder Dielektricitätskonstanten,
$\mathfrak{m}_{hk}$ magnetische Permeabilitäten.
M (A, B, Γ) Gesamtmoment,
μ (α, β, γ) spezifisches Moment einer elektrischen oder einer magnetischen Verteilung;
ν spezifisches Moment einer magnetischen Doppelfläche.
$\mathfrak{e}_{hk}$ Elektrisierungs-, $\mathfrak{k}_{hk}$ Magnetisierungszahlen.
φ, φ', φ'' / ψ, ψ', ψ'' } Potentialfunktion wahrer, freier, influenzierter { Elektricitäten, / Magnetismen.
P_{hk} Potentialsprünge, flächenhafte elektromotorische Kräfte.
C_{hk} elektrische Kapacitätskoefficienten, V_{hk} Potentialkoefficienten.
Φ_{hk}, Ψ_{hk} Potentiale elektrischer und magnetischer Wechselwirkung,
Φ, Ψ elektrisches und magnetisches Potential eines Systemes auf sich selbst.
Γ_{hk} elektromagnetisches Potential eines Stromes auf die Stromeinheit, virtuelles Potential.
Π_{hk} desgl. zwischen zwei Stromeinheiten;

Q_{hk} Induktionskoefficient, Q Selbstinduktionskoefficient.
i (u, v, w), i' (u', v', w'), i" (u", v", w") wahre, freie, äquivalente elektrische Stromdichte.
I, I', I'' desgl. Stromstärke.
$J = \int I\,dt$ Zeitintegral von I, Integralstromstärke.
U, V, W Vektorpotentiale wahrer elektrischer Ströme,
𝔘, 𝔙, 𝔚 Vektorpotentiale freier elektrischer Ströme.
$\mathfrak{l}_{hk}$ Konstanten der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit.
D elektrische Leitfähigkeit, W elektrischer Widerstand.
j (𝔵, 𝔶, 𝔷) elektrische Gesamtstromdichte, zusammengesetzt aus Leitungs-, Verschiebungs- und Konvektionsstrom.
𝔨 (𝔞, 𝔟, 𝔠) magnetische Stromdichte.
𝔳 Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum.

IV. Teil.

Elektricität und Magnetismus.

I. Kapitel.

Elektrostatik.

§ 1. Elektrisierung durch Reibung. Das COULOMB'sche Elementargesetz. Elektrische Potentiale.

Die Fundamentalbeobachtung der Elektrostatik ist die, daß im allgemeinen die Körper dadurch, daß man sie gegeneinander reibt, die Fähigkeit erhalten, fernwirkende Kräfte anderer Art, als zuvor, aufeinander auszuüben. Allerdings ist diese Eigenschaft nur bei einer gewissen Klasse von Körpern, den Nichtleitern, direkt nachweisbar, bei anderen nur dann, wenn man sie beobachtet, während sie durch einen Nichtleiter von der Erde isoliert sind; letzteres deutet man dahin, daß diese Körper die erhaltene Fähigkeit an die Erde abgeben, und nennt sie demgemäß Leiter. In dem durch Reibung erzielten Zustande bezeichnet man die Körper als elektrisiert, ohne damit eine andere Vorstellung zu verbinden, als die Fähigkeit zu jenen Fernwirkungen.

Reibt man zwei isolierte Stücken eines Körpers (1) an zwei Stücken eines Körpers (2), so stoßen sich danach die Stücke von gleicher Substanz ab, die von ungleicher ziehen sich an.

Verfährt man ebenso mit Stücken zweier Körper (3) und (4), von denen übrigens einer mit (1) oder (2) identisch sein darf, so gilt für sie einerseits das Gleiche; außerdem erfahren (3) und (4) aber auch Wirkungen von (1) und (2), und zwar wird jederzeit der eine von ihnen von (1) angezogen und von (2) abgestoßen, der andere umgekehrt; es verhält sich also der eine ebenso, wie der Körper (1), der andere ebenso, wie der Körper (2).

Man erhält hiernach überhaupt nur zwei Arten von Elektrisierung, welche Körper man auch aneinander reiben mag; hergebrachter Weise wird eine jede Erregung mit denjenigen beiden verglichen, welche durch Reibung von Glas an Harz entstehen, und je nach ihrem Verhalten als Glas- oder Harzelektricität unterschieden. —

Das Gesetz der Wechselwirkung zwischen ruhenden elektrisierten Körpern ist in dem Grenzfall sehr einfach, daß beide Körper sich innerhalb eines unendlichen homogenen Nichtleiters und zwar in einem gegenseitigen Abstand befinden, der als unendlich groß gegenüber ihren Dimensionen betrachtet werden kann.

Hier führt die nach den auf S. 112 des I. Bandes erörterten Methoden der Messung von Kräften ausgeführte Beobachtung zu folgenden Resultaten. Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich. Bei gleicher Natur des umgebenden Nichtleiters und bei gleicher Entfernung der beiden Körper ist die Intensität der Kraft von ihrer gegenseitigen Orientierung unabhängig, fällt also mit ihrer Richtung notwendig in die der Verbindungslinie; bei wechselnder Entfernung verhält sie sich dem Quadrat dieser Größe indirekt proportional. Mit wechselnder Natur des umgebenden Mediums variiert die absolute Größe der Kraft um einen der Substanz individuellen Faktor.

Um die Komplikationen zu vermeiden, die durch den letzteren Umstand bewirkt werden, wollen wir für die folgenden Entwickelungen zunächst immer denselben das System umgebenden homogenen unendlichen Nichtleiter, etwa den luftleeren — oder, was in Annäherung fast gleichwertig ist, den lufterfüllten — Raum voraussetzen.

Weiter ergeben die Messungen, daß zwei durch Aneinanderreiben elektrisierte isolierte Körper unter den oben vorausgesetzten Verhältnissen auf einen dritten elektrisierten Körper in gleichen Entfernungen Kräfte von gleicher Intensität ausüben, deren Richtungen aber nach dem früheren einander entgegengesetzt sind.

Diese Resultate gestatten die vollständige Aufstellung des gesuchten Gesetzes der Wechselwirkung, wenn man noch die nahezu selbstverständliche Annahme zu Hilfe nimmt, daß man gleich elektrisierte Körper in beliebiger Zahl herstellen kann, indem man gleich geformte Stücke derselben Substanz, z. B. Kupfer, in gleicher Weise an einem und demselben Körper von anderer Substanz, z. B. Seide, reibt.

Verbindet man nämlich n identische elektrisierte Körper (α), etwa mit Hilfe von unelektrischen Nichtleitern, in beliebiger An-

ordnung zu einem starren System, dessen Ausdehnung immer noch verschwindend sein mag gegen seinen Abstand von einem zweiten elektrisierten Körper (β), so kann man dieses System als einen Körper von n-mal so großer Elektrisierung wie (α) betrachten.

Innerhalb des gleichen Nichtleiters und in der gleichen Entfernung ist dann die von ihm ausgeübte Kraft das n-fache der zwischen (α) und (β) stattfindenden. Bildet man auch den zweiten Körper aus m identischen Stücken (β), so ist sie ver-$n.m$-facht.

Wir dürfen daher widerspruchslos von zwei elektrisierten Körpern (α_1) und (α_2), die unter gleichen Umständen auf einen dritten Körper (β) die Kräfte K_1 und K_2 ausüben, — gleichviel ob dieselben anziehende oder abstoßende sind — aussagen, daß diese Kräfte den Elektrisierungen von (α_1) und (α_2) proportional sind, und dürfen umgekehrt auch aus ersteren auf letztere schließen.

Als Einheit der Elektrisierung kann dabei zunächst die an irgend einem bestimmten Körper durch bestimmte Reibung an einem bestimmten anderen Körper erregte eingeführt werden. Ist eine solche Einheit festgesetzt, so kann man nun auch beliebige Elektrisierungen messen, indem man ihre Wirkungen mit derjenigen vergleicht, welche der Einheits- oder Meßkörper unter den gleichen Umständen erfährt oder ausübt.

Nach dem oben Zusammengestellten gilt für die absolute Größe der elektrischen Wechselwirkung zwischen zwei Körpern, welche gegen ihre Entfernung unendlich klein sind und die Elektrisierungen e_1 und e_2 besitzen, das von Coulomb[1]) aufgestellte Gesetz

$$|K| = f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2},$$

worin f einen Faktor bezeichnet, der von der Art des den unendlichen Raum erfüllenden — zunächst flüssig oder gasförmig zu denkenden — Nichtleiters und von der für die Elektrisierungen gewählten Einheit abhängig, aber von der Art und Stärke der Elektrisierung, sowie von der Konfiguration des Systems unabhängig ist.

Das Gesetz stimmt formal völlig mit dem Ausdruck für die Newton'sche Gravitation zwischen zwei Massenpunkten überein; an der Stelle von deren Massen stehen hier die Elektrisierungen, die man deshalb auch als Elektricitätsmengen oder Ladungen auf den geriebenen Körpern bezeichnet.

Die Formel läßt sich demgemäß auch dahin deuten, daß die Kräfte nicht zwischen den geladenen ponderabeln Körpern, sondern

zwischen ihren Ladungen — diese als Quantitäten eines Agens betrachtet — wirken. Indessen würde diese Auffassung nur dann innerlich berechtigt sein, wenn wir die Wirkungen auf Ladungen unter Umständen beobachten könnten, wo sie nicht an ponderabeln Körpern haften, was anscheinend nicht möglich ist. Überdies benutzt sie eine Hypothese über die Ursache der elektrischen Erscheinungen, die unnötig ist, und führt in ihren Konsequenzen auf Schwierigkeiten, die wir vermeiden, indem wir weiterhin wenigstens zunächst die verschiedenen Elektrisierungen, ähnlich wie etwa die Temperaturen, nur als verschiedene Zustände der ponderabeln Körper auffassen und die Kräfte jederzeit als auf diese wirkend denken.

Hiermit steht nicht im Widerspruch, daß wir mitunter des kürzeren Ausdruckes wegen die Kräfte als von den Ladungen ausgeübt bezeichnen werden. —

Bezieht man die Kraft auf die Richtung der von dem angezogenen Körper hinweg positiv gerechneten Verbindungslinie r_{12}, so hat man sie für eine Anziehung mit positivem, für eine Abstoßung mit negativem Vorzeichen zu versehen. Diese Verfügung kann man umgehen, wenn man den Elektrisierungen e_1 und e_2 selbst Vorzeichen beilegt, und man hat demgemäß die Glaselektricität als positiv, die Harzelektricität als negativ zu rechnen festgesetzt.

Hiermit ist zunächst nichts anderes, als eine bequeme Rechnungsweise bezweckt und keineswegs die Einführung negativer Quantitäten eines Agens in die Physik; indessen hindert nichts, zum Zwecke der Veranschaulichung die positive Elektrisierung als im Mehr-, die negative als im Weniger-Vorhandensein eines wirksamen Agens, verglichen mit dem unelektrischen Normalzustand, bestehend anzusehen.

Nach der gemachten Festsetzung ist sonach die Formel

1) $$K'_{12} = -f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \quad K \; r_{12}$$

der Ausdruck für das Gesetz der Wirkung zwischen zwei gegen ihre Entfernung sehr kleinen elektrisierten Körpern, d. h. für diejenige zwischen zwei elektrisierten Massenpunkten (1) und (2).

Da die Größen e_1 und e_2 nach dem Vorausgeschickten von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte unabhängig sind, so besitzt die Kraft K ein Potential, welches bis auf eine irrelevante Konstante lautet

1') $$\Phi'_{12} = f\frac{e_1 e_2}{r},$$

und aus dem die auf den Massenpunkt (h) wirkenden Kraftkomponenten sich berechnen gemäß den Formeln

$$\Xi_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial x_h}, \quad H_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial y_h}, \quad Z_h = -\frac{\partial \Phi'_{12}}{\partial z_h}, \tag{1''}$$

worin x_h, y_h, z_h die Koordinaten des Massenpunktes mit der Ladung e_h bezeichnen.

Da die Kraft K sich nach dem oben Dargelegten als die Wechselwirkung zwischen allen einzelnen Teilen der elektrisierten ponderabeln Körper darstellt, so ist es eine konsequente Anwendung des gefundenen Resultates, die obigen Gleichungen bei gegen ihre Entfernung nicht unendlich kleinen Körpern auf die zwischen den Massenelementen des einen und des anderen elektrisierten Körpers wirkenden Kräfte zu übertragen. Dabei ist die Elektrisierung durch die Anziehung oder Abstoßung definiert gedacht, welche das einzelne Raumelement, im unveränderten Zustande aus der Umgebung herausgenommen, auf den Normalkörper mit der Elektrisierung Eins ausüben würde.

Das Gesetz der Elementarwirkung wird hiernach lauten, falls de_1 und de_2 die Elektrisierungen oder Ladungen zweier Massenelemente der Konduktoren (1) und (2) bezeichnen, und r_{12} ihre Entfernung bedeutet,

$$d^2 K = -f\frac{de_1\, de_2}{r_{12}^2}; \tag{1'''}$$

ihm entspricht ein Elementarpotential

$$d^2 \Phi = +f\frac{de_1\, de_2}{r_{12}}. \tag{1''''}$$

Aus (1'''') folgt der Wert des Potentiales zwischen zwei endlichen elektrisierten Körpern, die, wie immer in diesem Kapitel, als ruhend angenommen sind,

$$\Phi_{12} = f\iint\frac{de_1\, de_2}{r_{12}}, \tag{2}$$

der seinerseits die Gesamtkomponenten Ξ_h, H_h, Z_h und die Gesamtmomente A_h, M_h, N_h der zwischen den beiden Körpern ausgeübten Kräfte bestimmt.

Um diesen Zusammenhang klarzustellen, bedienen wir uns der Resultate, die Bd. I, S. 102 bei der Bestimmung der Arbeit an einem starren Körper erhalten waren; die Übertragung ist zulässig, da es sich auch hier um starre Körper handelt, deren Elemente sich nur in bestimmten Zuständen befinden, die sie befähigen, eigentümliche Kräfte zu äußern.

Wir bezeichnen weiterhin, wie schon im ersten Band, durch δF die willkürliche Veränderung einer Funktion F, durch dF

die in der Zeit dt faktisch eintretende; ferner durch $\delta' P$ keine Variation, sondern nur einen willkürlich vorgeschriebenen unendlich kleinen Betrag von der Natur von P, durch $d' P$ einen analogen, der aber in der Zeit dt entsteht.

Verstehen wir dann unter $\delta' u_h$, $\delta' v_h$, $\delta' w_h$ Verschiebungen parallel den Koordinatenaxen, unter $\delta' l_h$, $\delta' m_h$, $\delta' n_h$ Drehungen um die Koordinatenaxen, die man dem Körper (h) erteilt, so ist

$$2') \quad \begin{cases} \Xi_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial u_h}, \quad H_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial v_h}, \quad Z_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial w_h}, \\ \Lambda_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial l_h}, \quad M_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial m_h}, \quad N_h = -\dfrac{\partial_e \Phi_{12}}{\partial n_h}; \end{cases}$$

dabei bezeichnet der Index e noch ausdrücklich, daß bei den Bewegungen, auf die sich die Differentiationen beziehen, die elektrischen Zustände resp. die Ladungen aller Massenelemente ungeändert bleiben sollen, wie dies ohne weiteres daraus folgt, daß auf jedes Massenelement die Formeln (1''') Anwendung finden.

Fassen wir die Gleichungen (2') mit den Faktoren $\delta' u_h$, $\delta' v_h$, $\delta' w_h$, $\delta' l_h$, $\delta' m_h$, $\delta' n_h$ zusammen, summieren das Resultat über $h = 1$ und $h = 2$, und bezeichnen mit $\delta' A_{12}$ die Arbeit der Wechselwirkung bei den betreffenden Dislokationen, so erhalten wir

$$2'') \qquad \delta' A_{12} = \Xi_h \delta' u_h + \ldots + N_h \delta' n_h = -\,\delta_e \Phi_{12},$$

wo der Index e dieselbe Bedeutung besitzt wie in (2').

Wenden wir diese Formel auf zwei beliebige Körper (h) und (k) eines Systems von beiläufig n Körpern an und bilden die Summe über alle Kombinationen (h, k), die wie im ersten Teil mit Σ' bezeichnet werden mag, so erhalten wir die gesamte innere Arbeit

$$2''') \qquad \delta' A_i = \Sigma' \delta' A_{hk} = -\,\delta_e \Sigma' \Phi_{hk}.$$

Soll die vorausgesetzte Dislokation ohne Beschleunigung durch äußere Kräfte bewirkt werden, so müssen dieselben an jedem Körper des Systems die aus den Wechselwirkungen entspringenden Kräfte gerade kompensieren; die von ihnen zu leistende Arbeit wird also gleich $-\,\delta' A_i$ oder gleich $+\,\delta_e \Sigma' \Phi_{hk}$ sein müssen.

Dies Resultat ist indessen keineswegs so zu verstehen, als ob durch eine äußere Arbeit in diesem Betrage die vorausgesetzte Veränderung des Systems faktisch bewirkt werden könnte. Denn noch wissen wir nicht, ob bei den wirklich vorgenommenen Dislokationen die Elektrisierungen stets so, wie dies oben angenommen ist, von selbst an den Massenelementen haften. Wenn aber nicht,

so kann noch eine eigene Arbeit notwendig sein, um die ursprüngliche elektrische Verteilung zu erhalten. Wir kommen auf diese wichtige Frage weiter unten zurück. —

Ist der Körper (2) mit der Ladung Eins versehen und zugleich so klein gegen seine Entfernung von dem Körper (1), daß er als ein Massenpunkt betrachtet werden kann, so wollen wir ihn als einen Einheitspol und mit dem Symbol (0) bezeichnen. Das elektrische Potential Φ_{12} reduziert sich in diesem Falle auf das Einheitspotential

$$\Phi_{10} = f\int \frac{de_1}{r}, \tag{3}$$

worin r den Abstand des mit der Ladung de_1 versehenen Massenelementes an der Stelle x_1, y_1, z_1 von dem Einheitspol an der Stelle x, y, z bezeichnet. Der Körper (1) ist im übrigen völlig beliebig, kann also auch ein System von räumlich getrennten Teilen bilden.

Nach dem soeben Entwickelten geben dann

$$X = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial_e \Phi_{10}}{\partial z}, \tag{3'}$$

worin der Index e dieselbe Bedeutung hat, wie in (2'), die Komponenten der von dem System (1) auf den Einheitspol ausgeübten Kraft; ihre Resultante werde durch K bezeichnet.

Hieraus folgt, daß, wenn man bei in den ruhenden ponderabeln Massen festgehaltenen elektrischen Ladungen Φ_{10} als Funktion der Koordinaten des Einheitspoles betrachtet, seine Änderung von Ort zu Ort Größe und Richtung der auf ihn wirkenden Kraft K einfach bestimmt. Die orthogonalen Trajektorien der Oberflächen $\Phi_{10} =$ Const. sind die Kraftlinien, d. h., ihre nach kleineren Werten Φ_{10} hin positiv gerechneten Elemente fallen an jeder Stelle mit der Richtung der dort wirkenden Kraft zusammen, und wenn man auf ihnen an beliebigen Orten unendlich kleine Längen abgrenzt, welche demselben unendlich kleinen Zuwachs von Φ_{10} entsprechen, so ist die Größe der Kraft K mit diesen Längen indirekt proportional.

Das Bereich, innerhalb dessen Φ_{10} für ein gegebenes System merklich mit dem Orte variiert, nennt man dessen elektrisches Feld, den oben definierten Vektor K bezeichnet man zum Unterschiede von der resultierenden Kraft K, die ein beliebiger geladener Körper erfährt, wohl auch als Feldstärke, ein Name, den wir benutzen werden, wo die Klarheit dadurch gefördert wird.

Vorgänge, bei welchen das elektrische Feld sich entweder zeitlich nicht ändert oder wenigstens jeden Augenblick dieselbe Ge-

staltung besitzt, als wenn die ponderabeln Massen des Systemes ihre augenblickliche Position dauernd inne hätten, bezeichnen wir als stationäre elektrische Prozesse. Sie umfassen außer den elektrostatischen Erscheinungen auch noch den größten Teil der im III. Kapitel zu behandelnden elektromagnetischen. Wie beide zu scheiden sind, wird weiter unten besprochen werden. —

§ 2. Elektrisierung durch Influenz und durch Berührung. Die elektrische Potentialfunktion. Zwei allgemeine Prinzipien. Das elektrostatische Maßsystem.

Sind einmal durch Reibung irgendwelche Körper elektrisiert, so kann man mit ihrer Hilfe andere, ursprünglich nicht elektrisierte, ohne Reibung in den Zustand bringen, auf elektrisierte Probekörper Kräfte auszuüben. Da wir diesen Zustand allein nach seiner Wirkung beurteilen, ist es konsequent, ihn, wie er auch bewirkt sein möge, stets als dem durch Reibung bewirkten gleichartig anzusehen, d. h., jede elektrische Kraft auf eine Elektrisierung zurückzuführen.

Bringen wir in das Feld, welches einen beliebigen endlichen oder unendlich kleinen elektrisierten Körper und außerdem unseren Meßkörper enthält, einen anderen unelektrischen Körper, Leiter oder Nichtleiter, so ändert sich die Kraft, welche der Meßkörper erfährt. Oder noch allgemeiner, wenn zwei elektrische Körper, von denen jedenfalls einer endlich ist, gleichzeitig auf den Meßkörper wirken, so ist die auf letzteren ausgeübte Wirkung nicht die Resultierende aus den Wirkungen, die nach Entfernung des zweiten Körpers jeder für sich in derselben Position ausüben würde. [2])

Nach dem vorangestellten Prinzip wirkt also die gleichzeitige Anwesenheit mehrerer elektrisierter Körper verändernd auf die Ladung eines jeden von ihnen ein; diesen Vorgang nennt man Elektrisierung durch Influenz.

Körper, welche unendlich klein sind gegen die Entfernung von anderen, können auf diese influenzierend wirken, werden aber selbst nicht merklich influenziert. Dies Resultat können wir zunächst, wie oben ausgesprochen, als Erfahrungsthatsache annehmen, werden es jedoch weiter unten aus einem allgemeinen Prinzip beweisen.

Die auf endliche Körper geübte Influenzierung ist je nach deren Natur verschieden stark. Isolierte Leiter werden unter denselben Umständen stärker influenziert, als gleich große und gleich gestaltete Nichtleiter, und unter letzteren ist wiederum eine Ab-

stufung der Wirkung je nach der Substanz festgestellt. Ganz unzugänglich ist der Influenzierung kein bekannter Körper; doch ist anscheinend kein physikalischer Grund vorhanden, dergleichen Körper als unmöglich anzusehen. Da nun die Annahme solcher influenzloser oder absoluter Isolatoren für manche theoretische Entwickelungen nützlich ist, so wollen wir sie ausdrücklich zulassen. —

Aus dem soeben über Influenz Zusammengestellten ziehen wir zunächst eine Folgerung in Bezug auf das Einheitspotential Φ_{10} eines elektrischen Systemes (1), dessen sichere Auffassung eine gewisse Schwierigkeit bietet.

Nach der Art seiner Einführung ist Φ_{10} das Potential der Wechselwirkung zwischen dem elektrisierten System (1) und einem Körper (0), der die spezielle Eigenschaft besitzt, die Einheit der Ladung zu tragen und unendlich klein gegen die Entfernung von (1), kurz gesagt, ein Einheitspol zu sein. Wenn nun infolgedessen auch der Einheitspol selbst influenzlos ist, so wirkt er doch influenzierend auf das System (1), und dessen Ladung ist daher von seiner Position abhängig. Hieraus folgt, daß Φ_{10} die Koordinaten des Einheitspoles in doppelter Weise enthält: explicite in r, welches ja gleich $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$ ist, implicite in de_1.

Diese allgemeinere Abhängigkeit des Einheitspotentiales kommt nun aber offenbar in den Formeln (3′), die für uns die charakteristischen Eigenschaften von Φ_{10} aussprechen, gar nicht zur Geltung. In ihnen erscheint vielmehr die elektrische Ladung des wirkenden Systems (1) ganz unabhängig von der Anwesenheit und von dem Verhalten des Einheitspoles vorgeschrieben, kann beispielsweise durch Ursachen bestimmt sein, die in derselben Weise wirken, wenn der Einheitspol ganz entfernt, d. h. ins Unendliche gerückt wird.

Es dient zur Klärung der vorliegenden Verhältnisse, wenn wir das in diesem speziellen Sinne verstandene Einheitspotential von dem allgemein aufgefaßten durch die Bezeichnung unterscheiden. Wir setzen demgemäß, indem wir durch den Index e wieder die feste Gebundenheit der Ladungen an die ponderabeln Massen andeuten,

$$(\Phi_{10})_e = \left(f\int\frac{de_1}{r}\right)_e = \varphi \tag{3''}$$

und nennen φ die Potentialfunktion des elektrischen Systemes (1).

Hierdurch ist dann festgesetzt, daß bei Benutzung der Potentialfunktion φ eines elektrischen Systemes weiterhin die influenzierende Wirkung des Einheitspoles auf das

System stets ausgeschlossen und demgemäß bei seinen Bewegungen die Ladung des Systems an dessen Massen haftend gedacht werden soll; dagegen mag bei Anwendungen der Potentiale Φ_{hk} der Wechselwirkung zwischen zwei Körpern (h) und (k) die Veränderung der Ladungen durch Influenz infolge von Dislokationen aus später hervortretenden Gründen ausdrücklich zugelassen bleiben.

Die Potentialfunktion φ eines Systemes ist somit von dem Potential Φ_{10} desselben auf einen Einheitspol — aus dem φ zuerst abgeleitet war — wesentlich unterschieden, aber der Potentialfunktion der Gravitation oder der NEWTON'schen Potentialfunktion vollständig gleichartig geworden. Wir können infolgedessen nunmehr die Formeln (3') für die Komponenten der Feldstärke einfacher schreiben

$$3'')\qquad X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ferner können wir auch alle die im III. Kapitel des I. Teiles über NEWTON'sche Potentialfunktionen erhaltenen Sätze auf die elektrische Potentialfunktion anwenden.

Hierzu sei bemerkt, daß es sich im Laufe der Entwickelung in der That notwendig erweisen wird, nicht nur räumlichen Gebilden, sondern auch Flächen und Kurven elektrische Ladungen zuzusprechen. Schon die Elektrisierung durch Reibung legt diese Vorstellung nahe; denn wenn dieselbe an einem Nichtleiter vorgenommen wird, kann man sich ihre Wirkung auch nur auf dessen Oberfläche erstreckt denken. Demgemäß übertragen wir die betreffenden Vorstellungen und Bezeichnungen von der NEWTON'schen auf die elektrische Potentialfunktion und definieren, indem wir die Elemente dk, do, ds des Körpers k, der Oberfläche o, der Kurve s einführen und unter de die auf ihnen befindliche Ladung — gemessen wie S. 3 und 5 gesagt — verstehen,

$$4)\qquad \frac{de}{dk} = \varrho, \quad \frac{de}{do} = \sigma, \quad \frac{de}{ds} = \tau,$$

soweit die Differentialverhältnisse einen bestimmten Grenzwert liefern, als die Raum-, Flächen- und Kurvendichte der Ladung. Elektrische Ladung von Kurven kommt nur selten in Betracht und soll daher bei allgemeinen Entwickelungen ausgeschlossen werden.

Wir lassen weiter auch elektrische Doppelflächen zu und bezeichnen das Produkt aus der Ladungsdichte σ jeder Fläche in ihren gegenseitigen Abstand λ

$$\sigma\lambda = \nu$$

als das elektrische Moment der Flächeneinheit.

Indessen dient es mitunter zur Vereinfachung sehr allgemeiner Überlegungen, davon Gebrauch zu machen, daß die Verteilungen der Elektricität auf Kurven, auf einfachen und auf doppelten Flächen sich auch als Grenzfälle räumlicher Verteilungen auffassen lassen, und demgemäß alle Dichten als räumliche aufzufassen. Wir werden dies Verfahren in der That vielfach vorteilhaft anwenden.

Für die demnächstige Anwendung ist es nützlich, die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktionen dieser verschiedenen Verteilungen übersichtlich zusammenzustellen.

Allen gemeinsam ist das reguläre Verhalten der Funktion, wie aller Differentialquotienten, und die Erfüllung der Gleichung

$$\triangle \varphi = 0$$

außerhalb wirkender Ladungen; ferner das Verschwinden der Funktion im Unendlichen wie E/r_0, der ersten Differentialquotienten wie E/r_0^2, falls alle Ladungen im Gesamtbetrag E im Endlichen liegen und r_0 den Abstand vom Koordinatenanfang bezeichnet.

Die Potentialfunktion einer räumlichen Verteilung ist mit ihren ersten Differentialquotienten auch im Innern und in der Oberfläche der geladenen Körper regulär und erfüllt im Innern die Beziehung

$$\triangle \varphi = -4\pi f \varrho . \qquad 4')$$

Diejenige einer flächenhaften Verteilung geht stetig durch die sie tragende Oberfläche hindurch, während für die Differentialquotienten nach der Normalen gilt

$$\left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial n}\right)_2 = -4\pi f \sigma ; \qquad 4'')$$

hierin sind die Normalen n_1 und n_2 auf beiden Seiten der geladenen Fläche und von dieser hinweg positiv gerechnet.

Die Potentialfunktion einer Kurvenbelegung wird in der Kurve unendlich wie $-2f\tau l(n)$, worin n den normalen Abstand von der Kurve bezeichnet. Diejenige einer Doppelfläche ist überall endlich und genügt in der geladenen Fläche der Bedingung

$$\overline{\varphi}_+ - \overline{\varphi}_- = 4\pi f \nu , \qquad 4''')$$

worin die Werte φ_+ und φ_- auf der Seite der positiven, resp. der negativen Ladung zu nehmen sind; die Differentialquotienten gehen stetig durch die Grenze.

Auf diese Eigenschaften, die sich durch Grenzübergänge sämt-

lich aus denen der Potentialfunktion räumlicher Verteilungen ableiten lassen, werden wir weiter unten wiederholt Bezug nehmen. —

Die Elektrisierung durch Influenz erschwert ersichtlich die Aufsuchung fundamentaler Gesetze über elektrische Wirkung mit Hilfe von Beobachtungen ungemein. Denn die Einführung eines, gleichviel ob elektrisierten oder nicht elektrisierten Meßkörpers in das elektrische Feld eines Systemes ändert dieses ihrerseits mehr oder weniger, und ein Zurückschließen von den beobachteten Kräften auf die Verhältnisse des Feldes vor Einbringung des Meßkörpers erfordert im allgemeinen umständliche theoretische Erwägungen.

Nur ein einfacher Fall ist ausgenommen, der seiner prinzipiellen Bedeutung halber Hervorhebung verdient. Wenn jeder beliebige unelektrische Körper in jeder Position innerhalb des Feldes eine Einwirkung nicht erfährt, so darf man mit Gewißheit schließen, daß die Feldstärke gleich Null, die Potentialfunktion φ also konstant ist; denn im anderen Falle müßte der Körper durch Influenz geladen werden und ein Potential erfahren, welches durch (2) gegeben ist, also nicht in allen Positionen konstant oder gleich Null sein kann. —

Wir wenden uns nunmehr zu der genaueren Untersuchung der Influenzwirkungen, welche sich speziell an Leitern zeigen.

Die auffälligste Wirkung dieser Art, welche auch den Schlüssel zum Verständnis aller übrigen bietet, ist die Thatsache, daß jeder unelektrische Körper dadurch der Wirkung einer beliebigen elektrischen Verteilung vollständig entzogen werden kann, daß man ihn mit einer aus einem homogenen Leiter gebildeten Schale vollständig umgiebt, die ihn von allen geladenen Körpern sondert. Fassen wir diese Erscheinung als eine Wirkung der Influenzierung der Hülle auf, wozu wir berechtigt sind, da die letztere nach außen elektrische Kräfte übt, so kompensieren hier die influenzierten Ladungen für alle Punkte im Innern die Wirkung der äußeren Ladungen vollkommen.

Nach dem eben Gesagten werden wir aus der beschriebenen Beobachtung schließen müssen, daß in dem rings von einem homogenen Leiter umgebenen Hohlraume die Potentialfunktion φ konstant ist, und gleiches dürfen wir von dem Innern eines homogenen Leiters selbst aussagen, der unter der Wirkung einer äußeren ruhenden elektrischen Verteilung steht; denn jedes seiner inneren Volumenelemente können wir als innerhalb einer von den übrigen gebildeten leitenden Hülle befindlich ansehen. Die gleichen Erwägungen gelten mit einer weiter unten zu besprechenden Aus-

nahme auch für das Innere jedes homogenen Teiles eines aus mehreren Stücken zusammengesetzten Leiters.

Gemäß dieser Schirmwirkung kann man die Leiter als in Bezug auf die elektrischen Kräfte, welche von ruhenden Ladungen ausgehen, undurchlässig oder adiëlektrisch, die Nichtleiter umgekehrt als durchlässig oder diëlektrisch bezeichnen.

Wenn innerhalb eines Leiters die Potentialfunktion konstant ist, so verschwinden in demselben nach (3‴) die Kraftkomponenten X, Y, Z; die Feldstärke K ist also gleich Null. Von einem homogenen Leiter, der dieser Bedingung genügt, sagt man, daß er sich im elektrischen Gleichgewicht befindet, und unterscheidet überhaupt Zustände, bei denen in den homogenen Leitern die Kräfte K verschwinden, als elektrostatische von denen, bei welchen sie zwar auch zeitlich konstant oder nur in gewisser, S. 8 bemerkter Weise veränderlich, aber von Null verschieden sind, die man als stationäre elektromagnetische bezeichnet.

Der Name des elektrostatischen Zustandes beruht auf der, Bd. I, S. 260 erörterten Vorstellung, daß die Elektricität ein Fluidum wäre, das in den Leitern jeder elektrischen Kraft Folge zu leisten vermöchte und daher in denselben nur dann ruhen könnte, wenn dort die Kräfte verschwänden.

Ein konstanter Wert P von φ läßt weiter auch $\triangle\varphi$ identisch verschwinden, und dies hat nach (4′) die Folge, daß im Falle des elektrischen Gleichgewichtes innerhalb der Leiter die räumliche Dichte ϱ gleich Null ist. Gleiches gilt nach (4″) auch von der Flächendichte σ an der Begrenzung von Hohlräumen innerhalb eines Leiters, welche keine elektrisierten Körper enthalten.

Dagegen wird für die Grenze nach dem äußeren Raum und ebenso für die nach einem Hohlraum hin, welcher elektrisierte Körper enthält, die Formel (4″) sich auf $\overline{\partial\varphi/\partial n_a} = -4\pi f\sigma$ reduzieren, wobei die Normale n_a aus dem Leiter heraus positiv gerechnet ist; dort, und allein dort, werden sich also bei Leitern Ladungen, und zwar flächenhafte, vorfinden.

Über den Wert P, welchen die Potentialfunktion in einem homogenen Leiter oder aber in einem homogenen Stück eines heterogenen Leitersystemes annimmt, geben uns die bisherigen Entwickelungen noch keinen Aufschluß. An sich ist die Potentialfunktion nur bis auf eine additive Konstante definiert, die man auf verschiedene Weise bestimmen kann. Eine Verfügung enthält der obige Ansatz (1′), der Φ'_{12}, und somit φ, im Unendlichen verschwinden läßt. Eine andere gewinnt man, indem man berück-

sichtigt, daß im Innern der Erde der Wert der Potentialfunktion φ, mindestens sehr nahe, zeitlich konstant sein muß, denn die Wirkungen elektrischer Veränderungen, die an der Erdoberfläche innerhalb mäßiger Bereiche stattfinden, sind infolge der Größe der Erde unmerklich, und kosmische Einflüsse kommen anscheinend nicht in Betracht. Man kann also die Konstante auch dadurch bestimmen, daß man φ am Beobachtungsort in der Erde gleich Null setzt. Endlich ist es unter den in der Praxis gewöhnlichen Umständen, nämlich bei Beobachtungen in weiten Räumen, die ringsum von mit der Erde verbundenen Leitern begrenzt sind, zulässig, die beiden vorstehenden Verfügungen als gleichwertig zu betrachten, also φ gleichzeitig in der Erde und im Unendlichen Null zu setzen. Aber für einen aus beliebiger Substanz gebildeten Konduktor, gleichviel, ob derselbe isoliert oder zur Erde abgeleitet ist, haben wir durch das Bisherige noch kein Mittel erhalten, um den Wert von P zu bestimmen, den unter gegebenen Umständen die Potentialfunktion auf ihm annimmt. Dies erfordert Hilfsmittel, die wir erst später gewinnen werden. —

Eine zweite indirekte Methode zur Elektrisierung eines Leiters liefert die Berührung mit einem anderen, unelektrischen oder bereits elektrisierten Leiter. Während der Berührung bilden beide ein einziges Leitersystem, auf dessen homogenen Teilen (h) nach dem Vorstehenden die Potentialfunktion der ganzen Ladung je einen konstanten Wert P_h' besitzen muß. Nach der Trennung erweist sich im allgemeinen jeder Teil als elektrisch, und wiederum muß die Potentialfunktion der neuen Elektrisierung auf jedem homogenen Teil (h) einen konstanten Wert P_h haben. Aber über die Werte beider Systeme von Konstanten P_h wie P_h' geben uns die bisher zusammengestellten Grundsätze noch keinen Aufschluß; wie oben, so genügen also auch hier die bisherigen Mittel zur theoretischen Behandlung des Problems nicht.

Wir bedürfen dazu der Aufstellung zweier neuer, auf Erfahrungsthatsachen gegründeter Hypothesen oder Prinzipien.

Das erste Prinzip wollen wir dahin formulieren, daß durch keinen Prozeß, der sich ganz innerhalb eines abgeschlossenen, d. h. nach außen durch den leeren Raum begrenzten, Systemes von Leitern und Nichtleitern vollzieht, die Gesamtsumme der in oder auf denselben vorhandenen Ladungen sich ändert.

Dieses Prinzip ist eine Erweiterung des auf S. 2 erwähnten Erfahrungssatzes, welcher zeigt, daß bei der Reibung jederzeit gleiche und entgegengesetzte Elektrisierungen entstehen, und kann auch in anderen einfachen Spezialfällen leicht durch die Messung

geprüft werden, während im allgemeinen sich nur gewisse aus ihm theoretisch abgeleitete Folgerungen zur Vergleichung mit der Beobachtung bieten.

Das zweite Prinzip sprechen wir dahin aus, daß je zwei in Berührung befindliche Leiter (h) und (k) im Zustande des elektrischen Gleichgewichtes eine Potentialdifferenz besitzen, die sogenannte elektromotorische Kraft P_{hk} der Kombination (h, k), welche nur von der Natur, sowie dem thermischen und mechanischen Zustand jener Leiter, aber nicht von ihrer Gestalt und Größe, sowie von der Gestalt und Größe ihrer Berührungsfläche abhängt[3]).

Dies Prinzip ist noch weniger einer direkten Prüfung zugänglich, als das vorige, zumal die Potentialdifferenzen, welche es betrifft, klein sind gegen die, mit welchen man sonst in der Elektrostatik operiert; die schärfste Prüfung geschieht durch Vergleichung gewisser theoretisch aus ihm gewonnener Folgerungen mit der Beobachtung.

Das erste Prinzip legt die Auffassung der elektrischen Ladungen als Quantitäten eines Agens so nahe, daß dieselbe in der Entwickelung der Elektricitätslehre eine große Rolle gespielt hat. Indessen ist sie keineswegs geboten; gerade die oben hervorgehobene Analogie der Elektrisierung eines ponderabeln Körpers mit seiner Erwärmung ist geeignet, dies klarzustellen. Nach dem Bd. I, S. 555 über den Vorgang der Wärmeleitung Entwickelten bleibt nämlich bei einem beliebigen körperlichen System, welches gegen Wärmeabgabe und -aufnahme geschützt ist, das Raumintegral über die Temperatur τ multipliziert in eine gewisse Funktion $\Gamma_p \varrho_o$ des Ortes, die von den thermischen Qualitäten der dort befindlichen ponderabeln Materie abhängt, bei allen innerhalb des Systemes stattfindenden Veränderungen konstant; dies Produkt $\tau \Gamma_p \varrho_o$ hat also in der Wärmelehre genau die Eigenschaft, wie oben die Elektrisierung; daß es trotzdem nicht eine auf die Volumeneinheit bezogene wirkliche und unzerstörbare Ladung repräsentiert, erhellt unmittelbar daraus, daß in dem S. 555 Vorhergehenden gezeigt ist, wie in dem thermisch isolierten System durch mechanische Einwirkung jenes Integral $\int \tau \Gamma_p \varrho_o dk$ geändert werden kann. Und analog kann es möglich sein, daß sich auf bisher noch nicht bekanntem Wege auch in einem, wie oben vorausgesetzt elektrisch isolierten System Änderungen der Gesamtladung bewirken lassen.

Von Anwendungen des ersten Prinzips sei jetzt nur eine einzige erwähnt, nämlich die Erklärung der oben erwähnten Thatsache, daß ein unendlich kleiner isolierter Körper durch Influenz nicht elektrisch erregt wird. In der That können nach seinem Inhalt durch Influenz in einem isolierten Körper nur gleiche Mengen positiver und nega-

tiver Elektricität entstehen; ist nun der Körper unendlich klein, so sind dieselben einander unendlich nahe, neutralisieren sich also, wenn sie, wie anzunehmen gestattet ist, endlich sind, bezüglich ihrer Wirkung auf alle in endlicher Entfernung befindlichen Punkte vollkommen.

Das erste Prinzip giebt auch den bisher nur als Rechnungsgrößen eingeführten elektrischen Ladungen ein ganz neues Interesse und erweckt die Frage nach den für ihre Behandlung geeigneten Einheiten. Da Ladungen jederzeit an ponderabeln Massen haften, und ihre Größe bisher allein in dem Elementargesetz (1′) der Wechselwirkung und den aus ihm folgenden Formeln aufgetreten ist, so befinden wir uns, wie in der Einleitung S. 4, Bd. I ausgeführt ist, in der Lage, die Einheiten für die Ladungen willkürlich so wählen zu können, daß diese Formeln die einfachste Gestalt annehmen. Wir thun dies, indem wir für den leeren Raum (und damit angenähert für den lufterfüllten) den Faktor f gleich einer reinen Zahl, und zwar gleich Eins setzen. Dadurch wird für die Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Massenpunkten

5) $$K'_{12} = -\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \qquad \Phi'_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

und somit die Einheit der Ladung als diejenige definiert, welche, auf einen Punkt konzentriert, im leeren Raum auf die gleiche in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt.

Für die Dimensionen der elektrischen Ladungen und Dichten ergiebt sich gleichzeitig, da $[K] = m l t^{-2}$, $[\Phi] = m l^2 t^{-2}$ ist,

5′) $$[e] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-1},$$

5″) $$[\varrho] = m^{1/2} l^{-3/2} t^{-1}, \quad [\sigma] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}, \quad [\tau] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1},$$

5‴) $$[\nu] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1};$$

für die elektrische Kraft oder Feldstärke K, resp. ihre Komponenten, und für die elektrische Potentialfunktion erhält man

5⁗) $$[K] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}, \quad [\varphi] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}.$$

Dieses System von Einheiten und Dimensionen, welches aus der getroffenen Verfügung über den Faktor f hervorgeht, heißt das elektrostatische Maßsystem und soll hier ausschließlich benutzt werden. Auf ein anderes für die Technik besonders geeignetes gehen wir im IV. Kapitel kurz ein.

Durch die Festsetzung des Maßsystemes ist die theoretische Grundlage für die Messung elektrostatischer Größen gegeben. Was

deren praktische Ausführung angeht, so folgt aus dem S. 4 Gesagten, daß die Gesamtladung eines beliebigen elektrisierten Körpers bestimmt werden kann, indem man die Kraft mißt, welche er auf einen Körper von gegebener Ladung innerhalb des leeren Raumes ausübt, während die gegenseitige Entfernung beider Körper unendlich groß ist gegen ihre Dimensionen. Diese Methode ist unvollkommen, da unter den genannten Umständen die Wirkung sehr schwach ist; wir werden aber später Mittel kennen lernen, diese Bestimmung mit größerer Genauigkeit auszuführen. —

Das zweite Prinzip giebt ein für die Praxis höchst wichtiges Mittel an die Hand, um Potentialdifferenzen und auch absolute Potentialwerte von einmal bestimmter Größe immer wieder in derselben Weise herzustellen; denn nach ihm besitzen die Teile einer Reihe hintereinander verbundener, nach außen isolierter Leiter bei gleicher Reihenfolge der Substanzen und bei gleicher Temperatur immer die gleichen relativen Potentiale, wie groß und wie gestaltet sie auch seien. Ist etwa die Potentialdifferenz zwischen dem $h$ten und $k$ten Körper P_{hk}, so nimmt der $h$te das absolute Potential P_{hk} an, wenn man den $k$ten zur Erde ableitet — vorausgesetzt, daß man die Potentialdifferenz P_{0k} der Erde gegen den $k$ten Leiter ignorieren und den Potentialwert der Erde gleich Null setzen kann.

Um insbesondere eine Anzahl von Potentialwerten herzustellen, die eine arithmetische Reihe bilden, kann man eine Folge von drei verschiedenen Leitern wiederholt aneinander fügen, sodaß eine Kette von der Anordnung

$$abcabcabc\ldots$$

entsteht; befolgen dann die elektromotorischen Kräfte P_{hk} nicht die spezielle Bedingung

$$P_{ab}+P_{bc}+P_{ca}=0,$$

die in der That, wie weiter unten zu erörtern, von gewissen Körpern allgemein erfüllt wird, so werden die Potentialdifferenzen der folgenden Leiter (a) gegen den ersten eine arithmetische Reihe bilden, und man kann absolute Potentiale von analoger Eigenschaft erhalten, wenn man den ersten Leiter (a) zur Erde ableitet. Solche Ketten sind zum Zwecke der Graduierung gewisser elektrostatischer Messinstrumente sehr brauchbar; bei ihrer Herstellung ist einzig zu beachten, daß die elektromotorischen Kräfte von der chemischen Beschaffenheit der Leiter stark abhängen, letztere also sicher definiert sein muß, damit verschiedene Ketten vergleichbare Reihen von Werten ergeben. Dieser Anforderung entspricht in sehr vollkommener Weise eine Anordnung, die von L. Clark angegeben

ist, und bei welcher für die hintereinander geordneten Körper Quecksilber, eine Lösung von Quecksilbersulfat und Zinksulfat, und metallisches Zink gewählt sind.

Schließlich mag noch darauf hingewiesen werden, daß der Sprung der Potentialfunktion in der Grenze zweier Leiter bei Festhaltung der Vorstellung elektrischer Ladungen die Annahme einer elektrischen Doppelschicht auf der Grenzfläche verlangt.[4]) Die Größe ihres Einheitsmomentes ν ist nach S. 10 mit dem bezüglichen Potentialsprung proportional, also von den gleichen Umständen abhängig und unabhängig, wie dieser.

§ 3. Die Eindeutigkeit des elektrostatischen Problems für Leiter. Allgemeine Sätze über die elektrische Verteilung auf Leitern.

Das allgemeinste Problem des elektrischen Gleichgewichtes für Leiter würde etwa folgendermaßen zu formulieren sein.

Gegeben ist ein im Endlichen liegendes System von unveränderlichen elektrischen Massen, — etwa gebildet durch beliebig erregte influenzlose Isolatoren, — daneben ein gleichfalls im Endlichen liegendes System von Leitern beliebiger Form und Substanz, teils miteinander oder mit derselben Stelle der Erde verbunden, teils isoliert; für erstere Leiter seien die Potentialsprünge, für letztere die Ladungen vorgeschrieben; zu bestimmen ist das Gesetz des dem System zugehörigen elektrischen Feldes, d. h. dasjenige seiner Potentialfunktion φ. Aus ihm berechnet sich dann die sogenannte Dichte der elektrischen Verteilung, wie auch das Potential, welches Konduktoren und Isolatoren erfahren.

Die Potentialfunktion φ hat folgende Bedingungen zu erfüllen. Im ganzen Raum außerhalb der Leiter muß sie sich regulär verhalten und der Gleichung

$$\triangle \varphi = -4\pi\varrho \tag{6}$$

genügen, in welcher ϱ die vorgeschriebene Raumdichte der gegebenen elektrischen Massen bezeichnet; im Unendlichen muß sie sich verhalten, wie E/r_0, worin E eine endliche Größe und r_0 die Entfernung vom Koordinatenanfang bezeichnet, und an der Oberfläche jedes homogenen Konduktors muß sie konstant werden. Für die mit der Erde verbundenen Konduktoren bestimmen sich aus den elektromotorischen Kräften $P_{hk} = P_h - P_k$ die Werte dieser Konstanten P_h selbst, für isolierte, aus heterogenen Teilen bestehende dagegen nur die Potentialdifferenzen zwischen den einzelnen Teilen. Für jeden der isolierten, gleichviel ob homogenen oder heterogenen Konduktoren ist noch vorgeschrieben die Größe der Gesamtladung

$$E_h = \int \sigma_h do_h = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}\right)_h do_h, \qquad 6')$$

worin n_a die in Bezug auf den Konduktor äußere Normale bezeichnet.

Diese Bedingungen bestimmen φ vollständig. Denn gäbe es zwei Lösungen φ' und φ'', so würde die Differenz $\varphi' - \varphi'' = U$ außerhalb der Konduktoren überall der Gleichung

$$\triangle U = 0$$

genügen, an allen mit der Erde verbundenen Leitern den Wert Null haben und auf den isolierten Konduktoren, seien sie nun homogen oder heterogen, konstant sein müssen, dabei im Unendlichen wie φ verschwinden und an jedem isolierten Konduktor die Bedingung

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial n_a} do$$

erfüllen. Nach den Betrachtungen auf S. 180 des I. Bandes muß dann U gleich Null sein; die aufgestellten Bedingungen lassen sich also nur durch eine Funktion φ befriedigen, womit indessen nicht bewiesen ist, daß sie überhaupt unter allen Umständen erfüllt werden können.

Gefundenes φ bestimmt für jedes Oberflächenelement eines Konduktors die Dichte σ gemäß der Formel

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \qquad 6'')$$

und vermittelt auch die Kenntnis des Potentiales, welches ein beliebiger Körper des Systems, gleichviel ob Konduktor oder influenzloser Isolator, durch die Gesamtwirkung des Systemes erfährt.

Denn man kann allgemein das auf den Körper (h) des Systemes ausgeübte Potential schreiben

$$\Phi_h = \int (\varphi)_h de_h, \qquad 7)$$

wobei $(\varphi)_h$ den Wert der Potentialfunktion am Orte des Ladungselementes de_h bezeichnet, und die Integration über den Körper (h) zu erstrecken ist.

Wendet man die Formel (7) auf einen Isolator mit räumlicher Ladung an, so ist $de_h = \varrho_h dk_h$, und ϱ_h eine gegebene Funktion des Ortes; wendet man sie auf einen homogenen Leiter an, so ist $de_h = \sigma_h do_h$, zugleich aber $(\varphi)_h$ konstant gleich P_h, und somit hier nach (6')

$$\Phi_h = P_h \int \sigma_h do_h = P_h E_h. \qquad 7')$$

Wir haben uns bisher ausschließlich auf den Fall homogener oder aus homogenen Stücken zusammengesetzter Leiter beschränkt; unsere Betrachtungen lassen sich aber leicht auf stetig veränderliche übertragen, indem wir diese als den Grenzfall von jenen ansehen.

Hier sind dann an jeder Stelle des Leiters die Änderungen von φ nach allen Richtungen hin, d. h. seine Differentialquotienten nach den Koordinatenaxen, vorgeschrieben; damit ist dann, wenn das Problem überhaupt auf elektrisches Gleichgewicht führt, innerhalb des Leiters φ selbst bis auf eine additive Konstante bestimmt. Diese Konstante kann entweder direkt gegeben sein, indem eine Stelle des Leiters durch Verbindung mit der Erde auf ein bekanntes Potential, z. B. auf Null, gebracht ist, oder sie kann durch die vorgeschriebene Ladung des Leiters indirekt bestimmt sein. —

Weiterhin werden wir uns ausschließlich auf homogene Konduktoren beschränken, was umsomehr zulässig ist, als die Potentialdifferenzen zwischen den Teilen eines zusammengesetzten Leiters, wie schon oben bemerkt, meist neben denen, die sonst in der Elektrostatik auftreten, zu vernachlässigen sind. Nur der eine auf inhomogene Konduktoren bezügliche und sofort einleuchtende Satz, welcher weiteres Interesse besitzt, und auf den bereits S. 17 verwiesen worden ist, mag hier erwähnt werden.

Die Bedingungen, daß auf jedem homogenen Teil φ konstant ist und beim Übergang über die Grenze um eine der Kombination der daselbst zusammenhängenden Substanzen individuelle Konstante springt, sind auf einem aus mehr als zwei homogenen Teilen zusammengesetzten Konduktor nur dann erfüllbar, wenn bei allen geschlossenen Kurven, die man in dem Leiter ziehen kann, die darauf liegenden Potentialsprünge sich zu Null ergänzen, d. h., wenn bei im Sinne des Umlaufs gerechneten Indices

$$7'')\qquad \mathop{S}_{hk} P_{hk} = 0$$

ist. Dies giebt in dem speziellen Falle dreier homogener Teile, von denen jeder mit den beiden anderen zusammenhängt, die Gleichung

$$7''')\qquad P_{12} + P_{23} + P_{31} = 0 \quad \text{oder} \quad P_{12} + P_{23} = P_{13}.$$

Diese Gleichung, welche den Namen des VOLTA'schen Spannungsgesetzes[5]) trägt, ist die Vorbedingung für die Möglichkeit des elektrischen Gleichgewichtes auf einem inhomogenen Leiter. Sie ist keineswegs bei allen Kombinationen beliebiger Substanzen erfüllt, doch giebt es eine Klasse von Leitern, die ihr bei konstanter Temperatur des ganzen Systemes in allen Kombinationen genügt. Diese

Leiter heißen Leiter erster Klasse; es gehören zu ihnen die Metalle und außerdem die Kohle. Bei stetig veränderlichen Leitern nimmt die Bedingung für die Möglichkeit des elektrischen Gleichgewichtes die Form an, daß das Linienintegral der vorgeschriebenen stetigen Potentialänderungen für jede geschlossene Kurve innerhalb des Leiters gleich Null, φ also einwertig sein muß.

Leitersysteme, welche diesen Bedingungen für die Möglichkeit des Gleichgewichtes nicht genügen, werden uns im folgenden Kapitel ausführlich beschäftigen. —

Die Gleichung

$$\triangle \varphi = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = -4\pi\varrho \tag{8)}$$

für die Potentialfunktion räumlicher und die entsprechende

$$\overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1} + \overline{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2} = -(N_1 + N_2) = -4\pi\sigma \tag{8')}$$

für diejenige flächenhafter elektrischer Ladungen bilden die Grundlage gewisser sehr allgemeiner Sätze über elektrische Verteilung, die wir im folgenden ableiten wollen.

In Bezug hierauf sei beiläufig bemerkt, daß, weil in den Gleichungen (8) und (8′) gemäß den Formeln (79′) in Bd. I, S. 300 die Kraftkomponenten X, Y, Z und N sich als Komponenten der stationären Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit deuten lassen, die durch räumliche Quellen von der Ergiebigkeit $\mathfrak{r} = 4\pi\varrho$ und flächenhafte von der Ergiebigkeit $\mathfrak{f} = 4\pi\sigma$ bewirkt wird, manche der folgenden Sätze anschaulich in hydrodynamischer Form, nämlich für den stattfindenden elektrischen Kraftfluß, ausgesprochen werden können; doch bietet diese Ausdrucksweise nicht überall Vorteile.

Integriert man $\overline{(\partial\varphi/\partial n)}\,do$ über eine beliebige geschlossene Fläche o, die räumliche und flächenhafte Ladungen umschließt, und versteht unter n die innere Normale, so erhält man unter Benutzung von (8) und (8′)

$$\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\, do = 4\pi(E_i), \tag{8'')}$$

wo (E_i) die Summe aller innerhalb o liegenden elektrischen Ladungen bezeichnet. Umschließt o keine Ladungen, so wird hieraus

$$\int \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}\, do = 0. \tag{8''')}$$

Aus dieser Formel kann man ähnlich, wie aus der Gauss'schen Gleichung des arithmetischen Mittels (s. Bd I, S. 188), schließen, daß außerhalb der elektrischen Ladungen die Potentialfunktion weder ein Maximum, noch ein Minimum besitzen kann. Ist also nur ein

isolierter Konduktor vorhanden, so muß φ von ihm nach außen hin durchaus abnehmen oder durchaus zunehmen; der Konduktor kann daher nur eine Art von Elektricität enthalten.

Ist speziell φ an der ganzen Begrenzung o eines Raumes k, zu der auch die unendlich große Kugelfläche gehören kann, konstant, etwa gleich Null, und erfüllt es innerhalb k die Gleichung $\triangle \varphi = 0$, so folgt, daß es innerhalb k überall konstant, resp. gleich Null ist.

Wendet man die Formel (8‴) auf eine sogenannte Kraftröhre an, d. h. auf einen unendlich engen Kanal, dessen Wand ausschließlich aus Kraftlinien (s. S. 7) gebildet ist, und der durch zwei beliebig gelegene und gegen die Axe der Röhre beliebig geneigte Schnitte (α) und (β) begrenzt wird, so giebt die Wandfläche keinen Anteil zu dem Integral, und man erhält daher

9) $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} do\right)_\alpha + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} do\right)_\beta = 0,$$

worin die Indices α und β sich auf die Endflächen der Kraftröhre beziehen.

Diese Formel sagt aus, daß für beliebige Schnitte durch dieselbe Kraftröhre das Produkt aus der Normalkomponente der Kraft in die Größe des Schnittes stets denselben Wert hat.

Sind diese Schnitte Teile von zwei beliebigen Niveauflächen, so fallen die Normalen n mit der Axe s der Röhre zusammen, und wir können die letzte Formel schreiben, indem wir s nach einer beliebigen Richtung hin positiv rechnen:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} do\right)_\alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} do\right)_\beta .$$

Hieraus folgt, daß längs derselben Kraftlinie, so lange sie Ladungen nicht berührt, φ entweder immer zunehmen oder immer abnehmen muß, wodurch dem obigen Satz über die Maxima und Minima der Potentialfunktion eine für manche Anwendungen noch bequemere Fassung gegeben ist.

Sind die beiden Niveauflächen, zwischen denen die Kraftröhre verläuft, speziell die Oberflächen zweier Konduktoren (1) und (2), so erhält man unter Rücksicht auf (6″)

9′) $$\sigma_1 do_1 + \sigma_2 do_2 = 0,$$

woraus folgt, daß die durch dieselbe Kraftröhre aus den Oberflächen zweier Konduktoren ausgeschnittenen Flächenelemente entgegengesetzt gleiche Ladungen haben müssen. Der Satz gestattet unmittelbar die Erweiterung auf Kraftröhren von endlichem Querschnitt und giebt dann unter anderen die nachstehenden Folgerungen.

Wird ein System abgeleiteter Konduktoren, auf denen das Potential gleich Null gesetzt werden kann, durch einen isolierten und irgendwie geladenen Konduktor influenziert, so entsteht auf ersteren nur die entgegengesetzte Elektricität, wie auf letzterem, und zwar ist die Gesamtladung des influenzierten Systemes stets kleiner, als die des influenzierenden Leiters, ausgenommen den Fall, daß die influenzierten Konduktoren den influenzierenden mit einer Schale umgeben, und daher alle von dem letzteren ausgehenden Kraftlinien auf den ersteren endigen und keine ins Unendliche verlaufen; in diesem Falle sind dann beide Ladungen gleich.

Sind die influenzierten Konduktoren isoliert und mit der Ladung Null versehen, so muß an einem jeden $\overline{\partial \varphi / \partial n_a}$ zum Teil positiv, zum Teil negativ sein, es muß also für einen jeden der Wert von $\bar{\varphi}$ zwischen dem auf dem influenzierenden Konduktor geltenden und Null liegen. Es entsteht auf einem jeden ferner der influenzierenden entgegengesetzte Elektricität, soweit ihn Kraftlinien von dem influenzierenden Konduktor treffen, gleichnamige, soweit aus dem Unendlichen kommende Kraftlinien auf ihm endigen. Die gleichnamige, wie die ungleichnamige Ladung für sich betrachtet, muß also im allgemeinen wieder geringer sein, wie die sie influenzierende. —

Ist ein homogener Leiter gegeben, welcher einen Hohlraum, und innerhalb desselben beliebige elektrisierte, gegen den Leiter isolierte Körper enthält, so giebt die Formel (8″), auf eine den Hohlraum umschließende, innerhalb des Leiters verlaufende Fläche angewandt, wegen des im Leiter konstanten φ,

$$(E_i) = 0$$

oder, wenn man mit E_i die Ladung der im Hohlraum befindlichen Körper, mit $\mathfrak{E}_i$ die auf der inneren Wand o_i influenzierte Ladung bezeichnet

$$E_i + \mathfrak{E}_i = 0. \qquad 9'')$$

In dem speziellen Fall, daß die Körper im Hohlraume Leiter sind, folgt dieses Resultat auch aus dem vorhergehenden Satz über die Kraftröhren.

War die leitende, aber isolierte Schale vor Einbringung der Körper unelektrisch, so müssen die Körper eine Belegung der äußeren Fläche o_a influenzieren, deren Gesamtladung $\mathfrak{E}_a$ nach dem auf S. 14 gegebenen ersten Prinzip die Gleichung

$$\mathfrak{E}_i + \mathfrak{E}_a = 0 \qquad 9''')$$

erfüllt; es ist somit auch

9'''') $$E_i = \mathfrak{E}_a,$$

also die auf der Oberfläche o_a erscheinende Ladung gleich derjenigen des inneren Systemes.

Diese Ladung verteilt sich auf o_a ganz so, als wenn das innere System, oder überhaupt der Hohlraum, gar nicht vorhanden wäre, wie denn die in letzterem gegebenen und influenzierten Massen in den Außenraum keinerlei Wirkung üben. In der That ist ja die Potentialfunktion im äußeren Raum, außer durch die übrigen, auf den Hohlkörper gar nicht bezüglichen Bedingungen, dadurch vollständig bestimmt, daß sie an der Oberfläche o_a konstant sein und die Formel

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} do_a = -4\pi \mathfrak{E}_a = -4\pi E_i$$

erfüllen muß.

Sonach tritt bei Umschließung des Systemes mit dem Hohlkörper bezüglich der Wirkung auf äußere Punkte die äußere Ladung $\mathfrak{E}_a$ vollständig an Stelle der im Hohlraum gegebenen E_i, und die Potentialfunktionen der Ladungen E_i und $\mathfrak{E}_i$ müssen sich im äußeren Raum zerstören.

Denkt man den oben betrachteten Hohlkörper zur Erde abgeleitet und dadurch das Potential Null auf ihm hergestellt, so ist nach S. 22 im ganzen äußeren Raume, wenn dort keine elektrischen Massen vorhanden sind, die Potentialfunktion φ gleich Null.

In diesem Falle — aber nur in diesem — übt also der Hohlkörper für äußere Punkte die Schirmwirkung gegen innere Massen, die er für innere Punkte gegen äußere Massen unter allen Umständen übt. —

Aus der bewiesenen entgegengesetzten Gleichheit der Potentialfunktionen der Ladungen E_i und $\mathfrak{E}_i$ im äußeren Raum folgt nun weiter, daß, wenn man um das innere System eine Fläche o konstruiert, die ebenso verläuft, wie die Wand o_i des Hohlraumes, und diese mit der entgegengesetzten der zuvor dort influenzierten Dichte belegt, diese Ladung, die wir kurz mit $-\mathfrak{E}_i$ bezeichnen wollen, im äußeren Raum die gleiche Potentialfunktion giebt, wie zuvor die innere Masse E_i und die letztere daher für äußere Punkte völlig ersetzt.

Ist die Fläche leitend, so ist die so erhaltene Belegung im allgemeinen nach Beseitigung der Massen E_i nicht im Gleichgewicht; sie ist dies nur dann, wenn die Fläche o eine Niveaufläche für die inneren Ladungen E_i bildet. Denn da außerhalb und an der Fläche o die Potentialfunktion von E_i und die von $-\mathfrak{E}_i$ einander gleich sind,

so ist in diesem Falle jene Fläche auch für die Ladung $\mathfrak{E}_i$ eine Potentialfläche. —

Die vorstehenden Resultate lassen sich in leicht ersichtlicher Weise nahezu ungeändert auf den allgemeineren Fall übertragen, daß auch außerhalb des Hohlkörpers beliebige elektrisierte Körper vorhanden sind; ihre Gesamtladung werde mit E_a bezeichnet.

Auch hier ist E_i durch $\mathfrak{E}_i$ für den Außenraum völlig kompensiert, und man kann demnach das innere System durch die auf einer dasselbe umschließenden Oberfläche o geeignet ausgebreitete Ladung $-\mathfrak{E}_i$ in seiner Wirkung auf Punkte außerhalb o vollkommen ersetzen. Damit diese Ladung im Gleichgewicht sei, ist aber jetzt erforderlich, daß längs o die Potentialfunktion der beiden Systeme E_i und E_a konstant sei.

Denn im äußeren Raume ist die Potentialfunktion der Verteilungen $E_i + E_a$ gleich derjenigen von $-\mathfrak{E}_i + E_a$, und da letztere an der leitenden Fläche im Falle des Gleichgewichtes konstant sein muß, so gilt dasselbe für erstere.

In dem von der Fläche o umschlossenen Raume ist die Potentialfunktion φ_i der Verteilung $-\mathfrak{E}_i + E_a$ konstant, da gleiches auf der Oberfläche stattfindet, und außerdem im Innern die Gleichung

$$\triangle \varphi_i = 0$$

gilt. Es ist dort also auch die Potentialfunktion von $+\mathfrak{E}_i$ nur um eine Konstante von derjenigen von E_a verschieden; $+\mathfrak{E}_i$, d. h. die durch das innere System E_i influenzierte Verteilung, vermag also die Wirkung von E_a auf die inneren Punkte zu ersetzen. —

Die oben gefundenen Resultate über die Influenzierung eines Hohlkörpers durch ein im Hohlraume befindliches elektrisiertes System können u. a. dazu dienen, das erste der S. 14 angegebenen Prinzipe mannigfaltiger experimenteller Prüfung zu unterwerfen. Denn umschließt man ein beliebiges System von elektrisierten Leitern und Nichtleitern durch eine leitende isolierte Oberfläche — die etwa aus zwei Teilen zusammengesetzt ist — und bringt man Vorkehrungen an, um das System zu verändern, seine Teile zur Berührung zu bringen, zu trennen, gegeneinander zu reiben, so muß hierbei die äußere Ladung der leitenden Oberfläche, und demgemäß ihre Wirkung auf einen Meßkörper, ganz ungeändert bleiben.

Ferner können sie benutzt werden, um die Gesamtladung eines körperlichen Systemes, dessen Konfiguration eine theoretische Berechnung der auf ihm stattfindenden Verteilung unmöglich macht, experimentell zu bestimmen. Hierzu braucht man nur das System

durch eine homogene, leitende und isolierte Oberfläche zu umschließen, deren Gestalt so, z. B. kugelförmig, gewählt ist, daß das Gesetz der Dichtigkeit der Ladung auf ihr theoretisch ableitbar ist; dann kann man durch die Beobachtung der Wirkung auf den Meßkörper die Ladung der Oberfläche und somit auch die Ladung des gegebenen Systemes bestimmen. —

§ 4. Influenzierung eines Konduktors durch ein System von geladenen Isolatoren; gegenseitige Influenzierung zweier Konduktoren.

Die oben abgeleiteten allgemeinen Sätze über die Ersetzbarkeit eines elektrischen Systemes durch eine geladene, dasselbe umschließende Oberfläche geben eine wichtige Methode an die Hand, um lösbare Fälle der Influenzierung eines isolierten oder abgeleiteten Leiters durch geladene Isolatoren zu konstruieren [6]).

Sei ein beliebiges System von geladenen Isolatoren gegeben und die ihm entsprechende Potentialfunktion φ, sowie das System der ihr entsprechenden Niveauflächen bestimmt. Ersetzt man nun eine beliebige dieser Niveauflächen durch eine leitende, isolierte Oberfläche o, beseitigt die von ihr umschlossenen elektrischen Ladungen und bringt auf ihr eine Dichte

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$$

an, so ist diese Ladung im Gleichgewicht und stellt die auf o durch die äußeren Massen bei einer Anfangsladung

$$E = \int \sigma \, d o$$

influenzierte Verteilung dar.

Zugleich ergiebt die entgegengesetzte Dichte $-\sigma$ diejenige Verteilung, welche auf der Begrenzung eines Hohlraumes in einem homogenen Leiter von der Gestalt jener Oberfläche o durch die innerhalb derselben liegenden Massen influenziert werden würde.

Entspricht die Niveaufläche speziell dem Werte $\varphi = 0$, so giebt das Verfahren die vollständige Bestimmung der Influenzierung der zur Erde abgeleiteten Oberfläche o durch das äußere System.

Reduziert sich hierbei das influenzierende System auf einen Punkt mit der Ladung Eins, so verwandelt sich φ nach S. 185 des I. Bandes in die erste abgeleitete Green'sche Funktion für den Raum zwischen der unendlich großen Kugel und der leitenden Oberfläche, resp. für den von der leitenden Oberfläche umschlossenen Raum; die auseinandergesetzte Methode führt also speziell auch zu

der Konstruktion von Fällen, für welche die abgeleitete erste GREEN'sche Funktion, die weiter mit Γ, statt wie früher mit Γ_1, bezeichnet werden soll, angebbar ist.

Die Kenntnis von Γ ermöglicht dann auch sogleich die Lösung des Problemes der Influenzierung jener bestimmten leitenden Oberfläche o durch beliebige geladene Isolatoren bei Zulassung einer beliebigen anfänglichen Ladung.

Die Lösung wird gegeben durch die allgemeine Formel (183') auf S. 185 des I. Bandes, welche unter Rücksicht auf das auf S. 187 Gesagte lautet

$$V_{abc} = \frac{1}{4\pi}\int \overline{V}\,\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}\,do - \frac{1}{4\pi}\int \Gamma \triangle V dk \qquad 10)$$

und den Wert einer regulären Funktion V an einer beliebigen Stelle a, b, c eines vollständig begrenzten Raumes k ausdrückt durch die Werte von V an der Oberfläche und die von $\triangle V$ im Innern von k. Γ ist definiert durch sein reguläres Verhalten innerhalb k mit Ausnahme der Stelle a, b, c, wo es sich wie die reciproke Entfernung verhält, durch Erfüllung der Formel $\triangle \Gamma = 0$, durch die Oberflächenwerte $\overline{\Gamma} = 0$ an Begrenzungsflächen, die im Endlichen liegen, und $\partial \overline{\Gamma} / \partial n = -1/r_0^2$ an der unendlichen Kugel vom Radius r_0. n bezeichnet die innere Normale auf der Begrenzung in Bezug auf das Integrationsgebiet k, also die äußere in Bezug auf die durch die Oberfläche o ausgeschlossenen Räume.

Wenden wir diese Formel auf unseren Fall an, identifizieren wir also V mit der elektrischen Potentialfunktion φ, so ist $\overline{\varphi}$ an dem — ganz im Endlichen gedachten — Konduktor konstant gleich P, an der unendlichen Kugel unendlich klein wie $1/r_0$; außerdem gilt innerhalb k die Gleichung $\triangle \varphi = -4\pi\varrho$, worin ϱ sich auf die Ladung der Isolatoren bezieht.

Wir erhalten demnach, wenn wir noch den Punkt a, b, c weiter x, y, z nennen und die Koordinaten des Raum- und des Oberflächenelementes mit x_1, y_1, z_1 und $\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1$ bezeichnen,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} P \int \left(\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}\right)_1 d o_1 + \int \varrho_1 \Gamma_1 \, d k_1. \qquad 10')$$

Sind keine geladenen Isolatoren vorhanden, steht also der Konduktor nur unter der Wirkung der Selbstinfluenz, so ist $\varrho = 0$ zu setzen.

Die Gleichung (10') giebt in dem Falle, daß der Potentialwert P auf dem Konduktor vorgeschrieben ist, unmittelbar die vollständige Lösung des Problems; ist dagegen die Gesamtladung E

des Konduktors gegeben, so hat man den Wert (10′) für φ in die Formel (6′) einzusetzen und mit Hilfe des Resultates P durch E auszudrücken.

Das Resultat besitzt die Form

10″) $$E = PC + C_0,$$

worin C und C_0 Konstanten sind, von denen C nur von der Gestalt und Größe des Konduktors, C_0 außerdem von der Konfiguration und der Ladung der Isolatoren abhängt.

C hat dabei speziell die Bedeutung der Elektricitätsmenge, welche man der Ladung zufügen muß, um den Potentialwert P um die Einheit zu steigern, dividiert durch die Einheit der Potentialfunktion. Diese Menge ist nach dem Gesagten unabhängig von den etwa auf Isolatoren vorhandenen Ladungen und wird die Kapacität des Konduktors genannt[7]); ihre Dimensionalgleichung lautet nach (5′) und (5‴).

10‴) $$[C] = [e/\varphi] = l.$$

Auf einer Kugel, die im leeren Raume allein vorhanden ist, verteilt sich die Ladung E nach Symmetrie gleichförmig; die Potentialfunktion dieser Verteilung ist für äußere Punkte nach S. 161, Bd. I $\varphi = E/r$, worin r die Entfernung vom Mittelpunkt bezeichnet; auf der Oberfläche wird

$$\bar{\varphi} = P = E/R,$$

es ist also $C = R$, die Kapacität einer Kugel daher gleich ihrem Radius. —

Ein einfaches Beispiel für das Vorstehende wird durch zwei Massenpunkte mit den Ladungen $+e_1$ und $-e_2$ im gegenseitigen Abstand A geboten. Die Oberfläche $\varphi = 0$ ist hier eine Kugel, welche die größere Ladung so umschließt, daß der Radius R die mittlere Proportionale zwischen den Abständen beider Massenpunkte vom Kugelcentrum ist; zugleich wird, falls $-e_2 > +e_1$ ist,

$$-e_2 : e_1 = A : R.$$

Die Influenzierung einer abgeleiteten Kugel durch einen äußeren oder einen inneren Punkt, und damit zugleich die entsprechende erste Green'sche Funktion, ist hiernach also durch eine Art von Spiegelpunkt mit gegebener Masse bestimmt[8]).

Wenn die Kugel isoliert ist und eine beliebige Anfangsladung E besitzt, so kann man den oben angegebenen allgemeinen Weg einschlagen; man gelangt aber noch einfacher zum Ziele, wenn man zu der auf der abgeleiteten Kugel influenzierten, mit dem Ort

variierenden Verteilung von dem Betrage $-e_2$ noch eine konstante von der Gesamtgröße $(E+e_2)$ hinzufügt. Diese ist für sich allein im Gleichgewicht; sie ergänzt also die frühere in einer Weise, welche alle Bedingungen erfüllt bleiben läßt. —

Da die zur Konstruktion der Lösung angenommenen inneren Ladungen für alle Punkte außerhalb der sie umschließenden Oberfläche der eingeführten Oberflächenbelegung vollständig äquivalent sind, so kann man auch die Kraft, welche die äußeren Massen seitens der geladenen und materiell gedachten Oberfläche erfahren, berechnen, indem man an Stelle der letzteren die Körper, welche die inneren Ladungen tragen, wirksam denkt.

Dies Verfahren liefert in dem obigen speziellen Problem, wo diese Körper sich auf einen einzigen Massenpunkt reduzieren, den höchst einfachen Wert

$$K = \frac{e_1 e_2}{A^2}. -$$

Die im Vorstehenden auseinandergesetzte Methode zur Ableitung der Influenzierung eines Konduktors durch ein System elektrisierter Isolatoren bildet die Grundlage eines wichtigen Verfahrens zur Bestimmung der gegenseitigen Influenzierung zweier Konduktoren (1) und (2) durch successive Annäherung.

Dasselbe setzt voraus, daß nach früheren Methoden für jeden der beiden Konduktoren gelöst sei erstens das Problem des Gleichgewichts der Elektricität, wenn er für sich allein vorhanden und isoliert ist, sowie zweitens dasjenige der Influenzierung durch einen elektrischen Punkt, wenn der Konduktor zur Erde abgeleitet ist; diese Forderungen erfüllt gedacht, führt der folgende Weg zur Lösung der vorliegenden allgemeineren Aufgabe[9]).

Sei (1) zunächst allein vorhanden und auf das Potential Eins geladen, so entsteht auf ihm eine gewisse Verteilung, die man nach dem Gesagten berechnen kann, und die einer Ladung e_1 entsprechen möge.

Wird nun diese Verteilung fest gehalten gedacht, der Konduktor (2) an seine Stelle gebracht und zur Erde abgeleitet, so wird auf ihm eine Ladung $-e_2'$ influenziert, die gleichfalls angebbar ist.

Ferner werde $-e_2'$ festgehalten und seine Influenz auf den abgeleiteten Konduktor (1) untersucht, welche dort die Ladung e_1' bewirken mag, und es werde so wechselsweise weiter verfahren, wodurch Ladungen $e_1'', e_1''', \ldots$ auf (1), Ladungen $-e_2'', -e_2''', \ldots$ auf (2) entstehen.

Superponiert man alle diese Verteilungen und bildet die Summe φ_1

aller ihrer Potentialfunktionen, so entsteht auf (1) eine Gesamtladung

11) $$C_{11} = e_1 + e_1' + e_1'' + \dots$$

und ein Potential Eins, auf (2) eine Gesamtladung

11') $$C_{21} = -(e_{2'}' + e_{2'}'' + e_{2'}''' + \dots)$$

und ein Potentialwert Null.

Analog, wie oben mit (1), kann man mit dem Konduktor (2) beginnen und erhält dadurch eine zweite Reihe von Verteilungen auf beiden Konduktoren; superponiert man auch diese und bildet die Summe φ_2 aller ihrer Potentialfunktionen, so erhält man auf (1) die Gesamtladung

11'') $$C_{12} = -(e_{1'}' + e_{1'}'' + e_{1'}''' + \dots)$$

und den Potentialwert Null, auf (2) die Gesamtladung

11''') $$C_{22} = e_2 + e_2' + e_2'' + \dots$$

und den Potentialwert Eins.

In dem Falle, daß die Potentialfunktion auf (1) den Wert P_1, auf (2) den Wert P_2 besitzt, nimmt die Potentialfunktion aller Verteilungen die Form

12) $$\varphi = P_1 \varphi_1 + P_2 \varphi_2$$

an, und die Gesamtladungen von (1) und (2) werden

12') $$\begin{cases} E_1 = C_{11} P_1 + C_{12} P_2, \\ E_2 = C_{21} P_1 + C_{22} P_2. \end{cases}$$

Die Konstanten C_{hk}, welche ersichtlich nur von der Gestalt und der gegenseitigen Orientierung der beiden Leiter (1) und (2) abhängen, heißen wegen der formalen Verwandtschaft dieser Beziehungen mit (10'') die Kapacitätskoefficienten des Systemes; in der That geht C_{11} in das frühere C über, wenn man den Leiter (2) unendlich klein gegen seine Entfernung werden läßt, sodaß er als Massenpunkt betrachtet werden kann. C_{hk} hat die Bedeutung des Zuwachses, welchen man der Ladung des Konduktors (h) geben muß, um bei konstantem P_h den Potentialwert P_k um die Einheit zu vergrößern, und ist, wie später zu zeigen, gleich C_{kh}.

Aus den Formeln (12') kann man umgekehrt, wenn nicht die Potentialwerte, sondern die Ladungen gegeben sind, erstere berechnen; man erhält

12'') $$P_1 = \frac{E_2 C_{12} - E_1 C_{22}}{C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}}, \qquad P_2 = \frac{E_1 C_{21} - E_2 C_{11}}{C_{12} C_{21} - C_{11} C_{22}};$$

ebenso dienen sie, wenn eine Ladung und ein Potentialwert vorgeschrieben ist, dazu, die beiden anderen Größen zu finden.

Das obige Verfahren verliert offenbar die Anwendbarkeit, wenn die Summen (11) bis (11'''), welche die Kapacitätskoefficienten C_{hk} definieren, unbestimmt werden; dies geschieht z. B., wenn der eine der beiden Konduktoren den anderen vollständig umschließt, weil hier alle e_1 resp. e_2 unter sich gleich werden.

Es bietet dagegen keine Schwierigkeit, nach der vorstehenden Methode die gegenseitige Influenzierung zweier leitender Kugeln zu berechnen [10]); ist ihr Abstand einigermaßen beträchtlich neben ihren Durchmessern, so konvergiert die für das Resultat erhaltene Reihe ziemlich stark und ist für die numerische Rechnung wohl geeignet.

Dies Problem hat eine große praktische Bedeutung, weil eines der wichtigsten elektrostatischen Meßinstrumente, die COULOMB'sche Drehwage, an die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten isolierten Kugeln anknüpft. Die Anordnung dieses Instrumentes ist bekanntlich die, daß eine isolierte leitende Kugel (die Standkugel), mit der zu bestimmenden Ladung versehen, derart fest aufgestellt wird, daß sie ihre Wirkung auf eine andere, an einem leicht drehbaren Hebel befestigte und mit bekannter Ladung, z. B. mit der Ladung Null versehene, ausüben kann. Man beobachtet dabei meistens das Moment, welches erforderlich ist, um den Hebelarm in derjenigen Lage festzuhalten, die er einnimmt, wenn beide Kugeln unelektrisch sind; in anderen Fällen auch den Winkel, um welchen der Hebel durch die gleichzeitige Wirkung des Drehungsmomentes der elektrischen Kraft und der Aufhängung aus seiner Ruhelage abgelenkt wird.

Über die allgemeine Methode zur Berechnung der Wechselwirkungen zwischen Konduktoren aus ihrem Potential ist im ersten Paragraphen gesprochen worden; hier genügt es, darauf hinzuweisen, daß nach den Entwickelungen auf S. 29 alle die in den Formeln (11) bis (11''') aufgeführten Partialladungen e beider Kugeln für äußere Punkte mit je einem im Innern der betreffenden Kugel liegenden Punkt von gleicher Ladung äquivalent sind. Die ganze Wechselwirkung zwischen den beiden Kugeln wird also durch die Summe der parallelen Kräfte erhalten, welche alle, jene Ladungen tragenden Punkte innerhalb der einen Kugel von allen denjenigen innerhalb der anderen erleiden.

Beiläufig sei übrigens bemerkt, daß die Theorie der Drehwage sich in Wirklichkeit erheblich komplizierter gestaltet, als aus dem Vorstehenden hervorzugehen scheint, weil faktisch nicht nur die

beiden Kugeln, sondern durch deren Influenz alle Teile des Instrumentes, seien sie nun Leiter oder Diëlektrica, influenziert werden und demgemäß rückwirkend elektrische Kräfte ausüben.

Ferner ist zu erwähnen, daß nur in seltenen Fällen eine zu untersuchende Elektricitätsmenge sich vollständig auf die Standkugel der Drehwage übertragen läßt; die Versuchsanordnung ist demgemäß meist die, daß man von dem untersuchten Konduktor einen Teil der Ladung, entweder durch direkte Berührung mit der Standkugel, oder aber durch Verbindung mittels eines langen, dünnen Drahtes entnimmt; in beiden Fällen ist, um die Beobachtung verwerten zu können, die vorherige Lösung des theoretischen Problems der Verteilung auf dem aus Kugel, Konduktor und event. Verbindungsdraht bestehenden System erforderlich.

Ist die Entfernung der Kugel von dem untersuchten Konduktor so groß, daß die wechselseitige Influenz vernachlässigt werden kann, so hat die Aufgabe die denkbar einfachste Gestalt, da die Einwirkung des Verbindungsdrahtes bei hinreichender — übrigens nicht leicht praktisch erreichbarer — Kleinheit des Querschnittes vernachlässigt werden kann.

Dies erhellt aus dem S. 157 Bd. I abgeleiteten und oben S. 11 wiederholten Resultat, daß die NEWTON'sche Potentialfunktion einer Kurvenbelegung von endlicher linearer Dichte τ in der Kurve selbst logarithmisch unendlich wird. Denn wenn der Draht mit dem Konduktor leitend verbunden ist, so nimmt er dessen endliches Potential an; er kann somit auch nur unendlich wenig Ladung auf sich festhalten und giebt demnach in alle endlichen Entfernungen nur einen unendlich kleinen Anteil zur Potentialfunktion.

Hieraus folgt, daß das Gesetz der elektrischen Verteilung auf dem Konduktor und auf der Kugel dasselbe ist, als wäre jeder dieser Körper bei ungeänderten sonstigen Umständen für sich allein vorhanden; nur der absolute Wert der Dichte wird durch die Verbindung beeinflußt werden, und zwar gilt, wenn P den konstanten Potentialwert und C' die Kapacität des Konduktors, C'' diejenige der Kugel bezeichnet — beide im weiteren Sinne des Wortes, unter Berücksichtigung des Einflusses der benachbarten, am einfachsten sämtlich zur Erde abgeleiteten Körper verstanden —, und E' resp. E'' die auf beiden Körpern befindlichen Anteile der Gesamtladung E bedeuten,

$$E' = PC', \quad E'' = PC'';$$

hieraus folgt das Gesetz der Verteilung

$$E' : E'' : E = C' : C'' : (C' + C''),$$

während die Änderung des ursprünglichen Potentialwertes P_0 des mit E geladenen Konduktors durch Anschluß der Standkugel gegeben wird durch die Beziehung

$$\frac{E'}{P} = \frac{E}{P_0} \quad \text{oder} \quad \frac{C'}{P} = \frac{C' + C''}{P_0}.$$

Ist also die Kapacität der Standkugel klein neben derjenigen des Konduktors, so wird der Potentialwert durch ihren Anschluß nicht merklich herabgedrückt.

Wir haben die vorstehenden Entwickelungen an eine spezielle, theoretisch relativ einfache Gestalt des Elektrometers angeknüpft; sie lassen sich leicht auf jede andere Konstruktion übertragen, bei welcher ein irgendwie gestalteter Leiter mit dem zu untersuchenden System verbunden und der Einwirkung eines mit gegebener Ladung versehenen zweiten Leiters ausgesetzt wird. Bei manchen Einrichtungen verzichtet man der Schwierigkeit wegen auf die theoretische Bestimmung des Gesetzes, nach welchem die Einwirkung des festen auf den beweglichen Teil des Elektrometers von der Gestalt und der gegenseitigen Lage beider Körper abhängt; es ist dann erforderlich, das Instrument zu graduieren, was dadurch geschieht, daß man bekannte Potentialdifferenzen zur Wirkung gelangen läßt und die ihnen entsprechenden Gleichgewichtslagen des beweglichen Teiles beobachtet. Hier finden jene, am Ende von § 2 beschriebenen Ketten erfolgreiche Anwendung. —

§ 5. Das allgemeine Problem des elektrischen Gleichgewichtes für Leiter. Kondensatoren.

Für die Lösung des allgemeinen Problems des elektrischen Gleichgewichtes auf einem System von p beliebigen Konduktoren bei Anwesenheit beliebiger geladener Isolatoren ist natürlich die Anwendung der ersten abgeleiteten Green'schen Funktion Γ und der Formel (10) ebenso zulässig, wie für die Behandlung der einfacheren Aufgabe auf S. 27, obgleich in Praxis dieser Weg kaum eingeschlagen werden wird. Man erhält das Resultat in der Form

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \sum P_h \int \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}\right)_h d o_h + \int \varrho_1 \Gamma_1' \, d k_1, \tag{13}$$

worin die Oberflächenintegrale über alle Konduktoren, die sämtlich im Endlichen liegend gedacht werden mögen, das Volumenintegral über

den ganzen, zwischen den Konduktoren und der unendlich großen Kugel liegenden Raum zu erstrecken sind. Schreiben wir die letzte Formel kurz

13′) $$\varphi = \sum P_h V_h + V_0,$$

so giebt V_0 den Wert, welchen φ annimmt, wenn bei ungeänderter Konfiguration alle Konduktoren zur Erde abgeleitet sind; es genügt der Gleichung $\triangle V_0 = -4\pi\varrho$ und verschwindet an allen Konduktoren. V_h stellt den Wert von V dar, welcher entsteht, wenn alle Isolatoren beseitigt und alle Konduktoren (1), (2),.. $(h-1)$, $(h+1)$,..p abgeleitet sind, (h) aber auf das Potential Eins geladen ist; es genügt der Hauptgleichung $\triangle V_h = 0$, ist am Konduktor (h) gleich Eins und verschwindet an allen übrigen.

Bildet man gemäß der Formel (6′) aus (13′) den Ausdruck für die Ladung E_k des Konduktors (k), so erhält man einen Ausdruck von der Form[11])

14) $$E_k = \sum_h P_h C_{kh} + C_{k0}, \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2, \ldots p,$$

worin

14′) $$C_{kh} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\left(\frac{\partial V_h}{\partial n}\right)}_k do_k$$

die spezielle Ladung bezeichnet, welche der Konduktor (k) erhält, falls nach Beseitigung der geladenen Isolatoren der Konduktor (h) auf das Potential Eins, alle übrigen auf das Potential Null gebracht sind,

14″) $$C_{k0} = -\frac{1}{4\pi}\int \overline{\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right)}_k do_k$$

dagegen diejenige, welche durch die geladenen Isolatoren auf dem Konduktor (k) influenziert wird, wenn sowohl dieser, als alle anderen Konduktoren abgeleitet sind.

Die Faktoren C_{kh} und C_{k0} stellen die allgemeinen Kapacitätskoefficienten des Systems dar; die S. 28 eingeführte Kapacität C bildet einen speziellen Wert eines solchen, und die Dimensionalgleichung der C_{hk} lautet demgemäß

14‴) $$[C_{hk}] = l.$$

Ist für eine Anzahl von j Konduktoren der in Formel (13) auftretende Potentialwert P_h nicht direkt vorgeschrieben, sondern die Ladung E_h, so können die j Formeln (14) für diese Ladungen benutzt werden, um die bezüglichen P_h durch sie und durch die übrigen Potentialwerte auszudrücken. Es läßt sich daher, wie auch

immer das Problem formuliert sei, jederzeit für jeden Konduktor eine Gleichung von der Form (14) aufstellen. —

Wir wollen weiterhin von der Anwesenheit geladener Isolatoren absehen, also statt (14) die vereinfachte Formel

$$E_k = \sum_h P_h C_{kh}, \text{ für } h \text{ und } k = 1, 2, \ldots p \tag{15}$$

voraussetzen.

Wendet man die Gleichung (181') von S. 179 des I. Bandes, d. h. die Beziehung

$$\int (U \triangle V - V \triangle U) dk = -\int \left(\overline{U} \frac{\partial \overline{V}}{\partial n} - \overline{V} \frac{\partial \overline{U}}{\partial n}\right) do$$

auf zwei der Glieder V_h an, so liefert sie

$$\int \overline{V}_h \frac{\partial \overline{V}_k}{\partial n} do = \int \overline{V}_k \frac{\partial \overline{V}_h}{\partial n} do,$$

die Integrale über die Oberflächen aller Konduktoren ausgedehnt; nach den Werten, welche $\overline{V}_h$ und $\overline{V}_k$ daselbst besitzen, folgt daraus sogleich

$$\int \left(\frac{\partial V_k}{\partial n}\right)_h do_h = \int \left(\frac{\partial V_h}{\partial n}\right)_k do_k, \text{ d. h. } C_{hk} = C_{kh}. \tag{15'}$$

Ist nun einmal nur P_h, das andere Mal nur P_k von Null verschieden, so erhält man resp.

$$E_k = C_{kh} P_h \quad \text{und} \quad E_h = C_{hk} P_k, \tag{15''}$$

also für den Fall $P_h = P_k$ auch $E_k = E_h$, und damit einen leicht in Worte zu fassenden Reciprocitätssatz.

Löst man die Gleichungen (15) nach den P_h auf, so gewinnt man das System[11])

$$P_k = \sum_h V_{hk} E_h, \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2 \ldots p, \tag{16}$$

dessen Koefficienten V_{hk} die Potentialkoefficienten des Systemes von Konduktoren heißen. Da zwischen den Koeffizienten C_{hk} des primären Systemes die Beziehungen $C_{hk} = C_{kh}$ bestehen, so gilt auch für die Potentialkoeffizienten

$$V_{hk} = V_{kh}. \tag{16'}$$

Ist einmal nur E_h, das andere Mal nur E_k von Null verschieden, so erhält man resp.

$$P_k = V_{hk} E_h, \quad P_h = V_{kh} E_k, \tag{16''}$$

und damit einen zweiten leicht zu formulierenden Reciprocitätssatz. —

Bezüglich der Werte der Koefficienten C_{hk} und V_{hk} kann man mit Hilfe der allgemeinen Sätze auf S. 23 leicht einige Aufschlüsse erhalten.

C_{kh} ist die Ladung des Konduktors (k), wenn auf (h) der Potentialwert Eins, auf allen übrigen Null stattfindet. Demgemäß ist

17) $$C_{hh} > 0, \quad C_{kh} < 0 \text{ für } h \gtreqless k,$$

und zugleich muß

17′) $$C_{hh} \geqq - \sum_{k(h)} C_{kh}$$

sein, wobei der Index $k(h)$ wie früher bezeichnet, daß für k alle Werte von 1 bis p mit Ausnahme von h genommen werden sollen.

V_{hk} ist der Potentialwert auf dem Konduktor (k), wenn (h) mit der Ladung Eins versehen ist, und alle übrigen eine Ladung nicht besitzen. Demgemäß ist

18) $$V_{hh} > 0, \quad \text{und auch} \quad V_{hk} > 0;$$

außerdem gilt

18′) $$V_{hh} > V_{hk}.$$

Wendet man die allgemeinen Formeln (13), (15) und (16) auf den speziellen Fall nur zweier Konduktoren an, so gelangt man zu den Gleichungen (12) bis (12″) zurück; die Werte, welche dabei die Koefficienten C_{hk} und V_{hk} gemäß den Formeln (11) bis (11‴) besitzen, gestatten leicht, die soeben ausgesprochenen Sätze zu verifizieren. Außerdem geben sie noch zu einer weiteren Bemerkung Veranlassung.

Nach den Überlegungen, durch welche die Größen $e_1, e_1', \ldots$ $e_2, e_2', \ldots$ u. s. w. eingeführt sind, ist e_1 die Kapacität C_1 des Konduktors (1), wenn er im leeren Raum allein vorhanden ist. Da

$$C_{11} = e_1 + e_1' + e_1'' + \ldots$$

ist, und in dieser Summe sämtliche Glieder positiv sind, so ist C_{11}, die Kapacität von (1) in Gegenwart des zur Erde abgeleiteten Konduktors (2), stets größer, als C_1, und zwar umsomehr, je stärker die influenzierende Wechselwirkung zwischen (1) und (2) ist. Daß dieses Verhältnis auch bestehen bleibt, wenn der auf S. 29 eingeschlagene Weg zur Bestimmung von φ nicht gangbar ist, läßt sich durch eine einfache geometrische Betrachtung erweisen.

Denken wir uns z. B. einen Konduktor auf ein vorgeschriebenes Potential geladen und durch eine leitende und zur Erde abgeleitete Schale umschlossen, so werden die Potentialwerte von der Oberfläche des Konduktors um so schneller nach Null abfallen

müssen, je dichter die Schale ihn umschließt; da aber nach (6″) die Flächendichte σ der Ladung mit $\partial\varphi / \partial n_a$ proportional ist, so entspricht dem schnelleren Abfall eine stärkere Ladung, und somit eine größere Kapacität.

Bei gleicher Ladung kann also der Potentialwert auf einem isolierten Konduktor dadurch verkleinert werden, daß man in seiner Umgebung andere, zur Erde abgeleitete Konduktoren aufstellt.

Da nun die Elektricitätsverluste infolge von unvollständiger Isolation auf einem geladenen Konduktor um so größer sind, auf je höherem Potential — absolut gesprochen — seine Ladung sich befindet, so eignet sich ein isolierter, von abgeleiteten dicht umgebener Konduktor hervorragend zum Ansammeln und Aufbewahren von elektrischen Ladungen. Solche Leitersysteme nennt man Kondensatoren; ihre Theorie ist ein spezieller Fall des oben behandelten allgemeinen Problemes. Ist (1) der zur Aufnahme der Ladung bestimmte Konduktor, so stellt C_{11} die Kapacität des Kondensators dar.

Auch durch Annäherung weiterer isolierter, ungeladener Konduktoren wird die Kapacität eines isolierten Leiters vergrößert.

Indessen ist die Steigerung eine wesentlich geringere, als in dem Falle, daß der Konduktor (2) zur Erde abgeleitet war; hier galt

$$E_1 = P_1 C_{11},$$

während aus den Formeln (12′) in dem Falle, daß E_2 verschwindet, sich

$$E_1 = P_1 \left(C_{11} - \frac{C_{12} C_{21}}{C_{22}} \right)$$

ergiebt; wegen $C_{12} = C_{21}$ und $C_{22} > 0$ ist aber das zweite Glied in der Klammer stets positiv. —

Einige der praktisch wichtigsten Kondensatoren — Franklin'sche Tafel, Leydener Flasche — haben die einfache Form zweier paralleler leitender Flächen (0) und (1), deren Abstand gegen ihre seitlichen Dimensionen als verschwindend betrachtet werden kann. In diesem Falle, wie in allen, wo die Hauptgleichung der Potentialfunktion $\triangle\varphi = 0$ sich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert, bedarf es zur Lösung des elektrostatischen Problemes nicht der Anwendung der auf S. 33 u. f. auseinandergesetzten allgemeinen Methode.

Wir bezeichnen mit n den normalen Abstand eines Punktes zwischen beiden Platten von der Platte (0), mit a den Abstand beider Platten; dann ist jedenfalls

$$\varphi_1 = \varphi_0 + a \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_0 + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} \right)_0 + \dots \qquad 19)$$

Ferner konstruieren wir von einem Punkt p_0 der Platte (0) aus außer der Normalen n noch die zwei Krümmungslinien s_1 und s_2, bezeichnen ihre Linienelemente mit ds_1 und ds_2, ihre Krümmungsradien im Punkte p_0 mit R_1 und R_2 und betrachten die Richtungen der Normalen n, sowie der Tangenten t_1 und t_2 an den Krümmungslinien im Punkte p_0 als Koordinatenaxen.

Entspricht dem Fortschreiten um ds_h längs s_h eine Bewegung um dn_h parallel n, so ist

19′) $$(ds_h)^2 = 2R_h dn_h,$$

wobei die Richtung von R_h parallel mit n, d. h. positiv nach der Platte (1) hin, gerechnet ist.

Für einen Nachbarpunkt von p_0 auf der Platte (0) hat φ den Wert φ_0', gegeben durch

$$\varphi_0' = \varphi_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 dn + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)_0 dt_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)_0 dt_2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 (dn)^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right)_0 (dt_1)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}\right)(dt_2)^2 + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n\, \partial t_1}\right) dn\, dt_1 + \ldots,$$

wobei nun gilt

$$\varphi_0' = \varphi_0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right)_0 = 0,$$

da die Fläche (0) Niveaufläche ist, und dt_1, dt_2 in erster Näherung mit ds_1, ds_2 zusammenfallen. Die höchsten übrig bleibenden Glieder lauten bei Rücksicht auf die Beziehung $dn = dn_1 + dn_2$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 (dn_1 + dn_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2}\right)_0 (dt_1)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2}\right)_0 (dt_2)^2;$$

sie müssen für sich verschwinden und liefern wegen der Willkürlichkeit von dt_1 und dt_2 unter Rücksicht auf (19′)

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_h^2}\right)_0 = -\frac{1}{R_h}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0.$$

Da nun

$$\triangle \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} = 0$$

ist, so erhält man hieraus

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}\right)_0 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = 0,$$

und bei Kombination mit (19) auch

19″) $$\varphi_1 - \varphi_0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 \left(a + \tfrac{1}{2} a^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right).$$

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_0 = -4\pi\sigma_0,$$

unter σ_0 die Flächendichte auf der Platte (0) verstanden; zugleich gilt $\varphi_0 = P_0$, $\varphi_1 = P_1$, und es wird also

$$P_1 - P_0 = -4\pi\sigma_0 a\left(1 + \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right) \qquad 20)$$

und bei Beschränkung auf die erste Ordnung des Verhältnisses a/R_h

$$\sigma_0 = -\frac{P_1 - P_0}{4\pi a}\left(1 - \tfrac{1}{2}a\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right). \qquad 20')$$

Bezeichnet man die Größe der Fläche (0) mit F, so ergiebt sich für die ganze Ladung[12])

$$E_0 = -\frac{P_1 - P_0}{4\pi a}\left(F - \tfrac{1}{2}a\int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)dF\right) \qquad 20'')$$

und für die Kapacität der Fläche (0)

$$C = \frac{1}{4\pi a}\left(F - \tfrac{1}{2}a\int\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)dF\right); \qquad 20''')$$

für den Fall zweier paralleler Ebenen verschwindet das zweite Glied in der Klammer, für den zweier koncentrischer Kugelflächen wird das Integral gleich $\pm 8\pi R$, worin R den Radius der Kugel (0) bezeichnet, und das positive Vorzeichen gilt, wenn sie die abgeleitete Kugelfläche umschließt, das negative, wenn sie von ihr umschlossen wird.

Übrigens läßt sich der Fall zweier koncentrischer leitender Kugelflächen ohne Schwierigkeit bei beliebigem Radienverhältnis auch streng erledigen.

§ 6. Das Potential eines Systemes von Konduktoren auf sich selbst und die bei Lagenänderungen innerhalb desselben geleistete Arbeit. Die elektrostatische Energie.

Das Potential eines beliebigen elektrisierten Systemes auf sich selbst ist im leeren Raume nach der Grunddefinition

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int de\int\frac{de_1}{r}, \qquad 21)$$

worin sowohl die Integration nach de, wie die nach de_1 über alle Ladungen des Systemes zu erstrecken ist. Hierfür kann man nach Formel (3'') unter Berücksichtigung des hierzu Gesagten schreiben

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int \varphi\, de, \qquad 21')$$

worin der Wert von φ an der Stelle des Elementes de der Ladung zu nehmen, und das Integral nach de, über alle Ladungen zu erstrecken ist.

Enthält das System ausschließlich Konduktoren, so ist das letzte Integral in Teile, die sich auf je einen Konduktor (k) beziehen, zu zerlegen; für jeden Teil ist dann φ konstant gleich P_k und $\int d e_k = E_k$, d. i. gleich der Ladung des Konduktors. Man erhält demgemäß[13])

21'') $$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum E_k P_k ,$$

und unter Berücksichtigung von (15) und (16) auch

21''') $$\Phi = \tfrac{1}{2} \sum_h \sum_k E_h E_k V_{hk} = \tfrac{1}{2} \sum_m \sum_n P_m P_n C_{mn} ;$$

aus (21'') folgt beiläufig

21'''') $$\frac{\partial \Phi}{\partial E_k} = P_k , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_h} = E_h . -$$

Von der Summe in Gleichung (21'') hat auch jedes einzelne Glied $P_k E_k$ eine einfache Bedeutung, die man erkennt, wenn man das Potential Φ des ganzen Systemes auf sich selbst durch die Potentiale Φ_{kk} der einzelnen Konduktoren auf sich selbst und durch die Potentiale Φ_{hk} der Wechselwirkungen zwischen zwei Konduktoren (h) und (k) ausdrückt. Es gilt dann nämlich

22) $$\Phi = \sum \Phi_{kk} + \sum{}' \Phi_{hk} ,$$

wobei die zweite Summe über alle Kombinationen verschiedener h und k zu erstrecken ist; und zwar bedeutet

22') $$\Phi_{kk} = \tfrac{1}{2} \int d e_k \int \frac{d e_k}{r} ,$$

22'') $$\Phi_{hk} = \int d e_k \int \frac{d e_h}{r} = \int d e_h \int \frac{d e_k}{r} .$$

Hieraus folgt dann sofort, daß

22''') $$2 \Phi_{kk} + \sum_{h(k)} \Phi_{hk} = \int d e_k \left[\int \frac{d e_k}{r} + \sum_{h(k)} \int \frac{d e_h}{r} \right] = \int \varphi \, d e_k = P_k E_k$$

ist, wodurch die erwähnte Deutung geliefert ist.

Bei einer unendlich kleinen Änderung der Konfiguration des Leitersystemes erleidet Φ eine Änderung, die wir durch $d\Phi$ bezeichnen wollen. $d\Phi$ besteht aus zwei Teilen, deren einer $d_e \Phi$ von der veränderten Anordnung der Konduktoren bei ungeänderter Ladung, deren anderer $d_a \Phi$ von der infolge der Lagenänderung veränderten Ladung der Konduktoren herrührt.

Der letztere Teil, den man beliebig auch zuerst bewirkt denken kann, ist ersichtlich gleich Null; denn da die neue Verteilung wiederum dem elektrischen Gleichgewicht entspricht, befinden sich bei ihr auch wieder alle Ladungen auf den Oberflächen der Kon-

duktoren, die Änderungen können also durch Verschiebungen auf diesen, d. h. auf Flächen konstanten Wertes φ, bewirkt werden, und solche Verschiebungen lassen ersichtlich Φ ungeändert.

Dasselbe, wie diese einfache Überlegung, giebt auch die Berechnung der Änderung von Φ, welche durch bloße Ladungsänderung bewirkt wird[14]). Sei dieselbe zunächst nur auf (k) stattfindend angenommen, was durch die Bezeichnung $\delta_a^{(k)}$ angedeutet werden mag, so erhält man nach (22′) und (22″)

$$\delta_a^{(k)} \Phi_{kk} = \tfrac{1}{2}\int \delta(d\,e_k)\int \frac{d\,e_k}{r} + \tfrac{1}{2}\int d\,e_k \int \frac{\delta(d\,e_k)}{r} = \int \delta(d\,e_k)\int \frac{d\,e_k}{r},$$

$$\delta_a^{(k)} \Phi_{hk} = \int \delta(d\,e_k)\int \frac{d\,e_h}{r}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\delta_a^{(k)} \Phi_{kk} + \sum_h \delta_a^{(k)} \Phi_{hk} = \int \varphi\, d(\delta\, e_k) = P_k\, \delta\, E_k, \tag{23}$$

wofür man unter Rücksicht auf (22) auch schreiben kann:

$$\delta_a^{(k)} \Phi = P_k\, \delta\, E_k. \tag{23′}$$

Diese allgemeine Formel spezialisiert sich, wenn die Ladungsänderungen, wie oben angenommen, nicht willkürliche sind, sondern die infolge einer Dislokation in dem Leitersystem von selbst eintretenden, in welchem Falle wir das Variationszeichen δ mit dem Differentialzeichen d vertauschen wollen. Ist der Konduktor (k) zur Erde abgeleitet, so ist nämlich $P_k = 0$, ist er isoliert, so ist nach dem ersten Prinzip auf S. 14 $d\,E_k = 0$, in beiden Fällen gilt somit

$$d_a^{(k)} \Phi = 0,$$

und bei Summation über (k) auch

$$d_a \Phi = \sum d^{(k)} \Phi = 0. \tag{23″}$$

Damit ist auch rechnerisch erwiesen, daß eine Ladungsänderung der vorausgesetzten Art das innere Potential Φ nicht ändert, und wir können das Resultat dieser Untersuchung in die Formel

$$d\,\Phi = d_e \Phi \tag{23‴}$$

zusammenfassen, in welcher d_e, wie S. 6, eine Änderung bei konstanter Ladung jedes Volumen- oder Flächenelementes bezeichnet. Diese Formel ist offenbar auch für den Fall gültig, daß das betrachtete elektrische System neben Konduktoren auch influenzlose Isolatoren enthält, da bei diesen eine Änderung der Ladung infolge von Dislokationen innerhalb des Systemes von vornherein ausgeschlossen ist.

Aus diesen Resultaten ist nun zu schließen, daß $d\Phi$ aus dem ersten Werte (21‴) des Potentiales folgendermaßen zu erhalten ist

24) $$d\Phi = \tfrac{1}{2}\sum_h \sum_k E_h E_k \, d V_{hk};$$

denn aus konstanten e folgt die Konstanz der Gesamtladungen E_h, und es ist somit auch

24′) $$d\Phi = d_E \Phi .$$

Man kann aber auch aus (21″) folgern

24″) $$d\Phi = \tfrac{1}{2}\sum_k E_k \, d P_k .$$

Kombiniert man hiermit die Gleichung (15)

$$E_k = \sum_h C_{kh} P_h$$

und die hieraus unter Rücksicht auf $d_e E_k = 0$ folgende Beziehung

$$\sum_h C_{kh} \, d P_h = - \sum_h P_h \, d C_{kh},$$

so erhält man auch

24‴) $$d\Phi = + \tfrac{1}{2}\sum_h \sum_k C_{hk} P_h \, d P_k = - \tfrac{1}{2}\sum_h \sum_k P_h P_k \, d C_{hk} .$$

Dieser Wert, verglichen mit dem in (21‴) gegebenen zweiten Ausdruck für Φ, zeigt, daß man auch schreiben kann

24⁗) $$d\Phi = - d_P \Phi,$$

wo der Index P andeutet, daß bei der Variation die Potentialwerte auf den einzelnen Konduktoren konstant zu halten sind. —

Verbinden wir mit der Gleichung (23″) den Wert (22) des inneren Potentiales und beachten, daß bei einer Dislokation der starren Teile des elektrisierten Systemes, welche die Ladungen an ihren Massen beläßt, die Potentiale Φ_{kk} der einzelnen Konduktoren auf sich selbst sich nicht ändern, so erhält man

25) $$d\Phi = d_e \Phi = d_e \sum{}' \Phi_{hk} .$$

Nun ist aber die Variation d_e äquivalent mit δ_e aus dem ersten Paragraphen, und daher ergiebt die Kombination dieser Formel mit (2‴) sogleich

25′) $$d\Phi = d_e \Phi = - d' A_i ,$$

worin $d' A_i$ die Arbeit der Wechselwirkungen zwischen den Konduktoren bei der vorausgesetzten Dislokation bezeichnet.

Denkt man sich diese Wechselwirkungen durch äußere, an den Konduktoren angreifende Kräfte derartig kompensiert, daß dieselben

bei der Verschiebung dauernd im Gleichgewicht sind, so ist deren Arbeit $d'A_a = -d'A_i$ und demgemäß

$$d\Phi = d'A_a. \tag{25''}$$

Zieht man die allgemeine Definition (48) der Energie von S. 40 des I. Bandes heran, so ergiebt sich, daß, falls bei den betrachteten Vorgängen, wie es scheint, anderweit ein Arbeitsverbrauch nicht stattfindet, z. B. eine Wärmeentwickelung ausgeschlossen ist, das innere Potential Φ eines Systemes von Konduktoren bis auf eine additive Konstante die elektrostatische Energie des Systemes darstellt. Dieser Zusammenhang bleibt nach dem zu Formel (23''') Gesagten auch bestehen, wenn das System außer den Konduktoren geladene absolute Isolatoren enthält.

Es ist indessen wohl zu beachten, daß von der durch Φ dargestellten elektrischen Energie sich jederzeit nur ein Teil direkt als Arbeit aus dem System gewinnen läßt.

Besteht z. B. das System aus zwei gleichnamig geladenen Konduktoren (1) und (2), so enthält die Energie in der Ausgangsposition die drei Teile Φ_{11}^0, Φ_{22}^0 und Φ_{12}^0, von denen der erste und zweite das Selbstpotential je eines der beiden Leiter, der letzte das Potential ihrer Wechselwirkung darstellt. Entfernt man die beiden Leiter voneinander, so gewinnt man dauernd Arbeit, bis ihre Entfernung unendlich geworden ist; hier ist indessen die Energie noch nicht erschöpft, sondern besteht noch aus der Summe der Selbstpotentiale Φ_{11} und Φ_{22} der beiden Leiter, wie dieselben sich gestalten, wenn jeder von ihnen mit der ursprünglichen Ladung für sich allein vorhanden ist. Die gewonnene Arbeit ist somit

$$A = (\Phi_{11}^0 + \Phi_{22}^0 + \Phi_{12}^0) - (\Phi_{11} + \Phi_{22});$$

weitere wäre nur zu entnehmen, wenn man die Konduktoren sich gegen äußeren Druck unbegrenzt ausdehnen lassen könnte.

Man kann indessen einem geladenen Konduktor seine elektrische Energie völlig entziehen, indem man ihn zur Erde ableitet; es bleibt die Frage zu beantworten, in welcher Gestalt sie dann fortexistiert.

Ähnliche Überlegungen lassen sich an ein System aus zwei verschiedenartig geladenen Konduktoren anknüpfen. Hier wird Arbeit gewonnen, wenn dieselben einander genähert werden, und der maximale Betrag ist entzogen, wenn eine solche gegenseitige Position erreicht ist, in der, ohne daß die Konduktoren einander berühren oder eine Entladung zwischen ihnen einsetzt, Φ seinen kleinsten

Wert besitzt. In diesem Falle ist also Φ_{12} in der zweiten Position nicht gleich Null, und die ganze gewonnene Arbeit lautet

$$A = (\Phi_{11}^0 + \Phi_{22}^0 + \Phi_{12}^0) - (\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{12}).$$

Eine weitere Reduktion erfährt der Betrag der Energie, wenn man die beiden Leiter zur Berührung bringt und damit zu einem Leiter vereinigt; hierbei ändert sich nach dem ersten Prinzip auf S. 14 die Gesamtladung nicht, aber da sich jetzt nach S. 22 nur eine Elektricität auf dem Leiter befindet, ist die Dichte allenthalben geringer und das Potential auf sich selbst kleiner als zuvor. Auch hier ist der Verbleib der verlorenen Energie nachzuweisen.

Die Beobachtung weist darauf hin, daß sie im allgemeinen vollständig in Wärme umgesetzt wird, die zum Teil in den Leitern selbst, zum Teil aber auch in dem Nichtleiter zwischen den Konduktoren auftritt, in welchem bereits vor der Berührung die Ausgleichung der Ladungen anhebt und sich durch einen sogenannten elektrischen Funken — die Wirkung der frei werdenden Wärme — ankündigt.

Das Zustandekommen dieser Entladungen durch das Diëlektricum hindurch ist noch nicht ganz aufgeklärt; auf die Wärmeentwickelung in den Leitern kommen wir weiter unten zurück. —

Die Beziehung (25″) zwischen der äußeren Arbeit und dem Selbstpotential eines Systemes gestattet eine Verwertung noch in einer anderen Richtung.

Verschiebt man einen geladenen Isolator in Gegenwart eines isolierten oder abgeleiteten Konduktors, so ist dazu, wie gesagt, eine gewisse Arbeit erforderlich; da nun gleichzeitig auf dem Konduktor eine Ladungsänderung entsteht, so kann man dieselbe als eine Wirkung der aufgewandten Arbeit betrachten und erhält dann durch die Formel (25″) die Größe der Influenzierungsarbeit dargestellt. Dieses Resultat gestattet, mancherlei Folgerungen abzuleiten.

Ist z. B. ein isolierter, ursprünglich unelektrischer Konduktor gegeben, und wird ein geladener Isolator aus dem Unendlichen bis in seine Nähe geführt, so ist die hierzu aufgewandte Gesamtarbeit

$$A_1 = \Phi_1,$$

wobei Φ_1 den Wert der Summe aus dem Potential der Wechselwirkung zwischen Konduktor und Isolator und dem Selbstpotential des Konduktors in der Endposition (1) bezeichnet; das Selbstpotential des Isolators kann als konstant ganz außer Betracht bleiben, da es sich hier nur um Differenzen der Werte von Φ in verschiedenen Zuständen handelt.

Leitet man nunmehr den Konduktor durch einen dünnen Draht zur Erde ab, so wird der Potentialwert Φ von Φ_1 auf Φ_2 sinken, ohne daß dabei eine äußere Arbeit gewonnen ist. Wird nunmehr der Konduktor wieder isoliert und sodann der Isolator ins Unendliche zurückgeführt, so steigt dabei Φ von Φ_2 auf einen Endwert Φ_3, welcher das Potential des allein im Raum vorhandenen Konduktors auf sich selbst im Zustand einer zurückgebliebenen Ladung darstellt; hierbei ist die Arbeit

$$A_2 = \Phi_3 - \Phi_2$$

aufzuwenden, so daß die Hervorbringung des Endzustandes auf dem Konduktor die gesamte Arbeit

$$A = \Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_3$$

erfordert.

Indessen ist die Energie des geladenen Konduktors schließlich nicht gleich A, sondern nur gleich Φ_3; der Anteil $\Phi_1 - \Phi_2$ ist nach dem oben Gesagten in Wärme umgesetzt worden und für die Elektrisierung verloren gegangen.

Ein Prozeß, welcher mit dem eben beschriebenen große Ahnlichkeit besitzt, findet in den zur Erzeugung großer Elektricitätsmengen aus Arbeit konstruierten Influenzelektrisiermaschinen andauernd statt. Das oben Gesagte giebt eine Vorstellung davon, nach welchen Gesetzen die Umsetzung erfolgt, zeigt insbesondere auch, daß nicht die ganze aufgewandte Arbeit in Gestalt von elektrischer Energie zurückgewonnen wird. —

Wie man aus dem Potential Φ_{hk} der Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Körpern (h) und (k) die auf jeden von ihnen ausgeübten Kräfte und Momente berechnet, ist bereits in § 1 erörtert worden. Im Falle eines Systemes von beliebig vielen Körpern tritt das Selbstpotential Φ an Stelle von Φ_{hk}, und es gilt ohne weiteres für die ganze auf den Körper (k) ausgeübte Wirkung statt (2′)

$$\left.\begin{aligned} \Xi_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial u_k}, & H_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial v_k}, & Z_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial w_k}, \\ A_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial l_k}, & M_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial m_k}, & N_k &= -\frac{\partial_e \Phi}{\partial n_k}. \end{aligned}\right\} \qquad 25''')$$

Den Beweis liefert die Formel (22) für Φ; denn da die Verschiebungen und Drehungen von (k) bei konstant erhaltenen elektrischen Verteilungen vorzunehmen sind, ändern sich die Selbstpotentiale Φ_{kk} bei ihnen überhaupt nicht, von den Wechselpotentialen nur die zwischen dem Körper (k) und einem der anderen; daher ist in dem obigen System Φ durchaus gleichwertig mit $\Sigma_{h(k)} \Phi_{hk}$. —

Wenn man die Gesamtkomponenten und Momente, die ein Konduktor von anderen Konduktoren und auch von geladenen Nichtleitern erfährt, durch die Wirkungen ausdrücken will, welche die einzelnen Flächenelemente erleiden, so ist eine gewisse Vorsicht nötig.

Bezeichnet man nämlich mit X, Y, Z die auf die Einheit der Ladung an dem Punkte x, y, z ausgeübten Kraftkomponenten, setzt also

$$
26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Xi_k = \int X d e_k, \quad H_k = \int Y d e_k, \quad Z_k = \int Z d e_k, \\ \Lambda_k = \int (y Z - z Y) d e_k, \quad M_k = \int (z X - x Z) d e_k, \\ \qquad N_k = \int (x Y - y X) d e_k, \end{array} \right.
$$

so sind hierin keineswegs ohne weiteres die Werte (3‴) für X, Y, Z zu benutzen, denn die ersten Differentialquotienten von φ sind in eben der Fläche, auf die sich die Integration bezieht, unstetig, und es ist von vornherein keineswegs klar, welcher Wert zwischen den Grenzen Null, die innerhalb des Konduktors, und $\partial \varphi / \partial n_a$, die außerhalb in unmittelbarer Nähe der Oberfläche gilt, für $\partial \varphi / \partial n$ einzusetzen ist.

Die Schwierigkeit läßt sich erledigen, indem man die Oberflächenbelegung in einer Weise, die bereits auf S. 11 angedeutet ist, als den Grenzfall einer räumlichen Verteilung von stetig mit dem Ort wechselnder Dichte ansieht, die auf der Oberfläche des Konduktors liegt.

Wir schreiben demgemäß zunächst

$$
26') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Xi = \int d o \int \varrho X d n; \ldots \\ \Lambda = \int d o \int \varrho (y Z - z Y) d n, \ldots \end{array} \right.
$$

wobei wir die unendlich dünne Schicht durch Flächen o, längs deren ebenso, wie auf der Oberfläche des Konduktors, φ konstant ist, in Elementarschichten von der Dicke dn zerlegt denken. Da aber hier, bei gegenüber der mittleren Krümmung der Oberfläche geringer Dicke der Schicht nach S. 38

$$
-4 \pi \varrho = \triangle \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2}
$$

gesetzt werden darf, außerdem

$$
X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \cos(n, x), \ldots
$$

ist, und x, y, z wie $\cos(n, x) \ldots$ in der sehr dünnen Schicht als konstant angesehen werden können, so giebt (26′) bei Einführung von $\partial \varphi / \partial n = 0$ für die untere, von $\partial \varphi / \partial n = \partial \varphi / \partial n_a$ für die obere Integrationsgrenze

$$\left.\begin{aligned}\Xi &= \frac{1}{4\pi}\int \cos(n,x)\,do\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dn = \frac{1}{8\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right)^2\cos(n,x)\,do\\ &= -\tfrac{1}{2}\int\sigma\,\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial n_a}\cos(n,x)\,do = -\tfrac{1}{2}\int\sigma\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x}\right)_a do\end{aligned}\right\}\quad 26'')$$

und ebenso

$$\Lambda = -\tfrac{1}{2}\int\sigma\left(\bar{y}\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial z}\right)_a - \bar{z}\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\right)_a\right)do.$$

Hiernach kann man für die Berechnung der gegen eine geladene Fläche wirkenden Kraft in der Grenzfläche selbst die auf die Masseneinheit wirkenden Komponenten

$$X = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial x}\right)_a,\quad Y = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial y}\right)_a,\quad Z = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial z}\right)_a,\qquad 26''')$$

d. h. gleich dem arithmetischen Mittel aus den diesseits und jenseits stattfindenden Werten setzen.

Dieses Resultat hat ein wesentliches Interesse, wenn es sich um die Bestimmung der Deformation eines nichtstarren elektrisierten Leiters infolge der elektrischen Kräfte handelt. Es sind dann in den allgemeinen Formeln (14''') auf S. 225 des I. Bandes für die Komponenten X_{hk}, Y_{hk}, Z_{hk} des in der Grenze zweier Körper — von denen hier der eine meist der leere Raum sein wird — wirkenden Grenzdruckes die Komponenten $\overline{X}_e$, $\overline{Y}_e$, $\overline{Z}_e$ der auf die Fläche Eins bezogenen elektrischen Kräfte zu setzen, welche definiert sind durch

$$\overline{X}_e = \sigma X,\quad \overline{Y}_e = \sigma Y,\quad \overline{Z}_e = \sigma Z$$

und mit Hilfe der oben erhaltenen Resultate leicht zu bilden sind.

Der resultierende elektrische Oberflächendruck D_e steht jederzeit normal zu der Oberfläche des Leiters, da dieselbe eine Niveaufläche ist, und hat den Wert[15])

$$D_e = -\tfrac{1}{2}\sigma\frac{\overline{\partial\varphi}}{\partial n_a} = +\frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\right)^2;\qquad 26'''')$$

er hat die Tendenz, das Oberflächenelement in der Richtung aus dem Konduktor hinaus zu treiben.

Ein besonders einfacher Fall ist der einer elektrisierten Seifenblase; hier summiert sich der elektrische Druck einfach zu dem hydrostatischen Druck der eingeschlossenen Luft und dehnt die Seifenblase so lange aus, bis die Verminderung des inneren Luftdruckes die gleichzeitig abnehmende elektrische Wirkung kompensiert.

Auf kompliziertere Fälle, bei denen insbesondere Dielektrica eine Rolle spielen, werden wir weiter unten eingehen.

§ 7. Konduktoren innerhalb einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit. Die Potentialfunktion eines influenzierten Dielektricums. Allgemeine Formeln für isotrope Dielektrica.

In § 1 dieses Teiles ist das Resultat der Beobachtung erwähnt, daß die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Körpern in Entfernungen, die groß sind gegen ihre Dimensionen, wenn dieselbe statt innerhalb des leeren Raumes innerhalb einer unendlichen, homogenen, dielektrischen Flüssigkeit gemessen wird, sich um einen, diesem Dielektricum individuellen Faktor geändert findet[16]. Diese Thatsache wollen wir jetzt theoretisch verfolgen.

Während auf S. 16 aus dem allgemeinen Ansatz (1) resp. (1') für die Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten Massenpunkten im leeren Raum durch Verfügung über die Maßeinheit der Elektrisierung die speziellen Formeln (5) gebildet waren, werden wir jetzt, unter Beibehaltung jener Einheit, für die Wechselwirkung und das Elementarpotential derselben Ladungen innerhalb einer isolierenden Flüssigkeit die allgemeinen Formeln

$$K'_{12} = -f\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}, \quad \Phi'_{12} = f\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

beibehalten müssen, wo f der Flüssigkeit individuell ist. Da erfahrungsgemäß die Wechselwirkung gleicher Ladungen im leeren Raum am stärksten ist, wird $f < 1$ sein; wir setzen

27) $$f = \frac{1}{\mathfrak{d}},$$

wo $\mathfrak{d} > 1$ ist und die Dielektricitätskonstante[17] der Flüssigkeit heißt, und haben dabei, da $\mathfrak{d}$ ersichtlich eine reine Zahl ist,

27') $$[\mathfrak{d}] = 1.$$

Für die Entwickelung der Theorie, soweit sie das Verhalten der Konduktoren angeht, spielt der Zahlenwert des Faktors, mit welchem jetzt das Elementarpotential

27'') $$\Phi'_{12} = \frac{1}{\mathfrak{d}}\frac{e_1 e_2}{r_{12}}$$

multipliziert erscheint, nicht die geringste Rolle.

Wir können daher, genau wie in § 1, auch hier aus dem Elementarpotential Φ'_{12} das Potential Φ_{12} der Wechselwirkung zwischen zwei elektrisierten endlichen und in endlicher Entfernung befindlichen Körpern ableiten und schreiben

27''') $$\Phi_{12} = \frac{1}{\mathfrak{d}}\iint\frac{de_1\, de_2}{r_{12}},$$

auch die Komponenten und Momente der Wechselwirkungen nach den früher hierzu aufgestellten Formeln (2') berechnen.

Ferner können wir statt der früheren Potentialfunktion

$$\varphi = \int \frac{d e_1}{r}$$

eine neue

$$\varphi' = \frac{1}{\mathfrak{d}} \int \frac{d e_1}{r} \tag{28}$$

einführen und sie in derselben Weise zum Aufbau der Theorie der elektrischen Verteilung auf Konduktoren, die innerhalb einer unendlichen, homogenen, dielektrischen Flüssigkeit liegen, benutzen, wie φ im Falle des leeren Raumes. Sie bestimmt uns durch die Formeln

$$X = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z}, \tag{28'}$$

worin die Ladungen $d e_1$ nach S. 10 bei der Variation ungeändert bleiben, die auf einen innerhalb der Flüssigkeit gelegenen Einheitspol, — d. h. auf einen Massenpunkt, der sich im leeren Raum als mit der Einheit der Ladung behaftet erweist, — wirkende Kraft genau ebenso, wie φ die im leeren Raum ausgeübte ergab.

Die im Vorstehenden eingeführte Bezeichnung ist nicht völlig konsequent, insofern nur φ' von dem früheren φ durch den Index unterschieden ist. Dies hat seinen äußerlichen Grund darin, daß Φ und die Komponenten X, Y, Z weiterhin nur in der neuen Bedeutung — die sich überdies, wie später zu zeigen, von der alten nicht wesentlich unterscheidet — geführt werden sollen, während φ und φ' mehrfach nebeneinander erscheinen werden. —

Die Einführung der neuen Potentialfunktion φ' statt φ läßt sich dahin deuten, daß durch die Wirkung des umgebenden Dielektricums alle Ladungen e scheinbar in dem Verhältnis $1/\mathfrak{d}$ geschwächt, also in Ladungen $e' = e/\mathfrak{d}$ verwandelt werden. Demgemäß treten auch an die Stelle der räumlichen und flächenhaften Dichten ϱ und σ, wie sie sich im leeren Raume wirksam erweisen, im Dielektricum die anderen

$$\varrho' = \frac{\varrho}{\mathfrak{d}}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\mathfrak{d}}. \tag{28''}$$

Man erklärt dies dadurch, daß durch Influenz im Dielektricum selbst eine scheinbare Ladung entsteht, welche sich in ihrer Wirkung über die ursprünglichen Ladungen superponiert und diese zum Teil neutralisiert. In der That läßt sich die Differenz

$$\varphi' - \varphi = \frac{1-\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \int \frac{d e_1}{r} = \varphi'' \tag{29}$$

als die Potentialfunktion einer Ladung auffassen, die, zu der direkt gegebenen gefügt, die in (28) eingeführte ergiebt.

Um dies in der Bezeichnung auszudrücken, nennt man[18]) die Ladungen e resp. die Dichten ϱ und σ, auf welche man aus den im leeren Raum stattfindenden Wirkungen schließt, die wahren, die Ladungen e' resp. die Dichten ϱ' und σ', welche die Wirkungen innerhalb des Dielektricums bestimmen, die freien, ihre Differenzen

29') $$e'' = e' - e, \quad \varrho'' = \varrho' - \varrho, \quad \sigma'' = \sigma' - \sigma$$

die in dem Dielektricum influenzierten oder gebundenen. —

Durch die vorstehende Behandlungsweise ist eine eigentümlich unsymmetrische Auffassung des Elementarpotentiales

29'') $$\Phi'_{12} = \frac{e_1 e'_2}{r_{12}} = \frac{e'_1 e_2}{r_{12}}$$

gegeben, auf welche bereits hier aufmerksam gemacht werden soll. Die Wechselwirkung findet nach derselben nämlich nicht zwischen zwei gleichartigen Ladungen statt, sondern zwischen einer wahren und einer freien. Diese Unsymmetrie bleibt auch noch bestehen, wenn man Φ'_{12} in der äußerlich symmetrischen Form

29''') $$\Phi'_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{e_1 e'_2 + e'_1 e_2}{r_{12}}$$

schreibt, die wir unten benutzen werden.

Naturgemäß fließen aus einer solchen Verfügung mancherlei Übelstände; sie werden indessen durch die gleichzeitigen Vorteile soweit überwogen, daß die obige Methode sich vor der naheliegenden, zwei freie Ladungen von den Größen $e_1/\sqrt{\mathfrak{d}}$, $e_2/\sqrt{\mathfrak{d}}$ einzuführen, weitaus empfiehlt. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

Beiläufig sei darauf aufmerksam gemacht, daß, wenn man Φ'_{12} schreibt

29'''') $$\Phi'_{12} = \frac{1}{\mathfrak{d}}\,\frac{e_1 e_2}{r_{12}} = \mathfrak{d}\,\frac{e'_1 e'_2}{r_{12}},$$

der letzte Teil dieser Formel einen Satz ausspricht, der sich dem Ausgangspunkt unserer Überlegungen symmetrisch zuordnet. Wie wir nämlich die Wechselwirkung zwischen denselben wahren Ladungen in verschiedenen Flüssigkeiten den resp. Dielektricitätskonstanten indirekt proportional setzten, so ergiebt sich hier unter den gleichen Umständen die Wechselwirkung zwischen denselben freien Ladungen den resp. Dielektricitätskonstanten direkt proportional. —

Mit Hilfe der Potentialfunktion φ' läßt sich nun das Problem

der elektrischen Verteilung auf einem System von p Konduktoren, die sich neben beliebigen geladenen influenzlosen Isolatoren innerhalb einer unendlichen, dielektrischen Flüssigkeit befinden, ganz ebenso, wie im Falle des leeren Raumes lösen.

Es handelt sich hier um die Auffindung einer in dem von den Konduktoren begrenzten Raume regulären Funktion, die ebenda die Gleichung

$$\triangle \varphi' = -\frac{4\pi\varrho}{\mathfrak{d}} \tag{30}$$

erfüllt, an jedem Konduktor (h) einen konstanten Wert

$$\overline{\varphi'} = P_h' \tag{30'}$$

annimmt und sich im Unendlichen verhält, wie die Potentialfunktion einer im Endlichen gelegenen Masse.

Versteht man unter Γ wieder die abgeleitete erste GREEN'sche Funktion, deren charakteristische Eigenschaften auf S. 27 zusammengestellt sind, so erhält man statt der Formel (13) jetzt

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\sum P_h' \int \left(\overline{\frac{\partial \Gamma}{d n}}\right)_h d o_h + \frac{1}{\mathfrak{d}}\int \varrho_1 \Gamma_1 \, d k_1, \tag{30''}$$

oder unter Anwendung der Abkürzungen von S. 34 statt (13')

$$\varphi' = \sum P_h' V_h + \frac{1}{\mathfrak{d}} V_0; \tag{30'''}$$

das letzte Glied verschwindet, wenn innerhalb des Dielektricums geladene absolute Isolatoren nicht vorhanden sind.

Nun ist aber an der Oberfläche der Leiter

$$\overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_a}} = -\frac{4\pi\sigma}{\mathfrak{d}}, \tag{31}$$

demgemäß nehmen die Gleichungen (14) für die wahren Ladungen E_k nunmehr die Gestalt an

$$E_k = \mathfrak{d}\sum_h P_h' C_{kh} + C_{k0} \quad \text{für } h \text{ und } k = 1, 2, \ldots p, \tag{31'}$$

denen bei fehlender Ladung des Dielektricums, wo $C_{k0} = 0$ ist, die reciproken Formeln

$$\mathfrak{d} P_k' = \sum_h V_{hk} E_h \tag{31''}$$

entsprechen.

Da die Koefficienten C_{kh} und V_{hk} nur von der geometrischen Konfiguration des Systems der Konduktoren abhängen, so zeigen die Formeln (31'), daß, um die Konduktoren auf dieselben Potentiale zu laden, in einer dielektrischen Flüssigkeit die $\mathfrak{d}$-fachen Ladungen nötig sind, wie im leeren Raum; die Formeln (31'') ergeben, daß

bei gleicher Ladung die Potentialwerte im Dielektricum nur die $\mathfrak{d}$ten Teile der im leeren Raum eintretenden betragen.

Hierauf beruht die wichtigste Methode zur experimentellen Bestimmung der Dielektricitätskonstante einer Flüssigkeit.

Mißt man nämlich in der auf S. 31 erörterten Weise die Potentialfunktion auf dem isolierten Teile eines Kondensators, während derselbe mit ungeänderter Ladung einmal vom Vakuum, einmal von einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit umgeben ist, so ist das Verhältnis der beiden Werte P und P'

$$P / P' = \mathfrak{d},$$

d. h. gleich der gesuchten Dielektricitätskonstante.

Die Voraussetzung, daß das Dielektricum unbegrenzt ist, läßt sich natürlich in der Praxis nicht streng verwirklichen; wir werden jedoch Mittel gewinnen, den Einfluß einer im Endlichen liegenden Begrenzung in Rechnung zu ziehen. —

Nachdem durch das Vorstehende das Problem der elektrischen Verteilung auf einem System von Konduktoren (k), das sich innerhalb einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit befindet, vollständig erledigt ist, gehen wir zu der Darlegung der Erweiterungen über, welche notwendig werden, wenn mehrere verschiedene Dielektrica vorhanden sind. Da wir nach S. 9 vollständige Isolatoren als ideale Grenzfälle von Dielektrica betrachten dürfen, so können wir weiterhin zunächst von dergleichen absehen; ferner wollen wir als mit wahren Ladungen versehen nur Konduktoren einführen und diese als sämtlich im Endlichen liegend annehmen.

Wir gehen aus von der durch Formel (29) eingeführten Differenz φ'' der Potentialfunktionen der freien und der wahren Ladungen $\varphi' - \varphi$, die sich in unserem Falle schreiben läßt

32) $$\varphi'' = \sum \int \frac{\sigma_k'' \, d o_k}{r} = \frac{1 - \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \sum \int \frac{\sigma_k \, d o_k}{r};$$

sie stellt, wie schon gesagt, den Anteil dar, den das Dielektricum zu der durch φ' bestimmten Gesamtwirkung liefert, und kann aufgefaßt werden als die Potentialfunktion einer scheinbaren, innerhalb des Dielektricums an den Grenzflächen nach den Konduktoren hin befindlichen Ladung von der Flächendichte

32') $$\sigma'' = \frac{1 - \mathfrak{d}}{\mathfrak{d}} \sigma = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi} \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_a}}.$$

Diese Betrachtungsweise gewinnt dadurch an Bedeutung, daß thatsächlich die Ladung eines Konduktors durch Einsenken in verschiedene Dielektrica nicht geändert wird und nach Entfernung aus

denselben sich immer wieder nachweisen läßt, während im Dielektricum, wenn es wirklich, wie vorausgesetzt, die Elektricität nicht leitet, nach Beseitigung des Konduktors irgend eine Ladung nicht zurückbleibt.

Zur Ausgestaltung dieser Vorstellung benutzen wir noch folgendes. Auf S. 13 ist begründet, daß auf einem Konduktor Elektricität nur als Oberflächenbelegung im Gleichgewicht verharren kann; jene Schlußreihe gestattet aber keine Anwendung auf Dielektrica, und somit kann man sich vorstellen, daß der Anteil φ'', welchen das Dielektricum an der Potentialfunktion φ' der freien Ladungen liefert, nur scheinbar allein von seiner Oberfläche, in Wirklichkeit aber von allen seinen Raumelementen ausgeht. Man darf daher erwarten, einen den wirklichen Verhältnissen vollkommener entsprechenden und daher allgemeineren Ausdruck zu gewinnen, wenn man φ'' in ein Raumintegral über das ganze Dielektricum verwandelt.

Dies bewirkt man, indem man einmal in den Ausdruck für φ'' den Wert von σ'' aus (32′) einsetzt und sodann dem Resultat gewisse Glieder hinzufügt, welche zwar verschwinden, aber mit φ'' zusammen ein Raumintegral ausmachen.

Wir setzen demgemäß

$$\varphi'' = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi}\left[\sum\int\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial n_a}\frac{d o_k}{\bar{r}}+\int\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial \nu_a}\frac{d\omega}{\bar{r}}+\int\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial N_a}\frac{dO}{\bar{r}}+\int\triangle\varphi'\frac{dk_1}{r}\right], \tag{32''}$$

worin das erste Glied sich wie (32) auf die Oberflächen aller Konduktoren bezieht, das zweite auf eine unendlich kleine, den Einheitspol x, y, z ausschließende Oberfläche, das dritte auf die unendlich große Kugel, welche das Dielektricum nach außen begrenzt, das vierte auf den vom Dielektricum erfüllten Raum zwischen diesen Oberflächen. Daß die letzten drei Integrale nach den gemachten Annahmen verschwinden, ist leicht erkennbar.

Wir erhalten nun aus (32″) durch eine einfache Umformung

$$\varphi'' = -\frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)dk_1, \tag{32'''}$$

wobei die Integration ohne Änderung des Wertes auch über den von der Hilfsfläche ω umschlossenen Raum und somit über das ganze Dielektricum ausgedehnt werden kann.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} = \mathfrak{e} \tag{33)}$$

und

33′) $$-\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \alpha, \quad -\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = \beta, \quad -\mathfrak{e}\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \gamma,$$

so erhält man schließlich [19])

33″) $$\varphi'' = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d k_1 .$$

Nach den Definitionsformeln (33′) sind die Größen α, β, γ Vektorkomponenten; wir nennen sie die auf die Volumeneinheit bezogenen oder spezifischen elektrischen Momente nach den Koordinatenaxen und bezeichnen den resultierenden Vektor

$$\mu = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

als das spezifische elektrische Gesamtmoment, dessen Richtung als die der lokalen elektrischen Axe und charakterisieren letztere weiterhin durch den Buchstaben λ; alle diese Größen beziehen sich nach ihrer Definition auf die bestimmte Stelle des Dielektricums, wo sich das Volumenelement dk befindet.

Die Konstante $\mathfrak{e}$ ist nach (27′) und (33) ersichtlich eine reine Zahl; es gilt also

33‴) $$[\mathfrak{e}] = 1,$$

und man kann $\mathfrak{e}$ als die Elektrisierungszahl des Dielektricums bezeichnen, weil sie die Größe der Potentialfunktion φ'' und damit die Stärke der elektrischen Erregung des Dielektricums bestimmt. Für die elektrischen Momente ergiebt sich aus (5⁗) die Dimensionalformel

33⁗) $$[\mu] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}.$$

Wir haben im Vorstehenden φ'' und α, β, γ als Funktionen von φ', d. h. der aktuellen Potentialfunktion dargestellt, weil dies der auf S. 49 auseinandergesetzten Auffassung am besten entspricht; selbstverständlich kann man durch die Beziehung $\varphi' = \varphi / \mathfrak{d}$ auch die Potentialfunktion φ der wahren Ladungen einführen.

Vergleicht man die Formel (33″) mit der Bd. I, S. 168 gegebenen Formel (173), so findet man vollständige Übereinstimmung. Man kann also die Betrachtungen, welche zu der letzteren führten, anwenden, um sich den Vorgang der Influenzierung eines Dielektricums zu veranschaulichen. —

Wir wollen nun, gemäß den der Umformung von φ'' vorausgeschickten Überlegungen, die Formel (33″) als den eigentlichen und allgemeingiltigen Wert der Potentialfunktion des erregten Dielektricums betrachten und ihn demgemäß hypothetisch sogleich auf ein beliebig begrenztes und beliebig erregtes flüssiges

Dielektricum übertragen; den Ausgangswert (32) dagegen als einen bis zu einem gewissen Grade zufälligen und speziellen ansehen, der nur in gewissen Fällen, wie z. B. in dem oben betrachteten, mit jenem allgemeinen übereinstimmt.

Welcher Ausdruck mit (33'') allgemein äquivalent ist, lehrt die schon auf S. 170 des I. Bandes unter Voraussetzung stetiger α, β, γ ausgeführte Umformung durch teilweise Integration, welche liefert

$$\varphi'' = \int \frac{\sigma_1'' \, do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' \, dk_1}{r}; \qquad 34)$$

hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} \varrho'' &= -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \\ \sigma'' &= -\left(\bar{\alpha} \cos(n_i, x) + \bar{\beta} \cos(n_i, y) + \bar{\gamma} \cos(n_i, z)\right) \end{aligned}\right\} \qquad 34')$$

und n_i bezeichnet die innere Normale relativ zu dem vom Dielektricum erfüllten Raum, stimmt also an den Konduktoren mit dem früher eingeführten n_a überein. Da $\int \sigma'' do + \int \varrho'' dk$ verschwindet, so ist die influenzierte Gesamtladung eines Dielektricums stets gleich Null.

Gegebene, durch vorgeschriebene Werte von α, β, γ charakterisierte Erregungen lassen sich in der S. 194, Bd. I erörterten Weise durch Zerlegung anschaulich deuten. Es ist dort gezeigt, daß die allgemeinste Erregung sich als die Superposition einer lamellaren und einer solenoidalen auffassen läßt, deren erste durch die Ausdrücke

$$\alpha' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \quad \beta' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \quad \gamma' = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \qquad 34'')$$

deren letzte durch die Werte

$$\alpha'' = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \; \beta'' = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \; \gamma'' = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \qquad 34''')$$

gegeben war; $\mathfrak{F}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bezeichneten dabei vollkommen bestimmte Funktionen der Koordinaten.

In dem Fall, von dem wir ausgingen, ist nach (33') die Erregung in der speziellen Weise lamellar, daß die äquivalente räumliche Dichte ϱ'' verschwindet. —

Während σ'' und ϱ'' durch α, β, γ eindeutig bestimmt sind, gilt nicht Gleiches umgekehrt; vielmehr lassen sich zu gegebenen σ'' und ϱ'' unendlich viele äquivalente Momente angeben, welche sich voneinander um Beträge $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ unterscheiden, die den Formeln

$$0 = \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + \frac{\partial \beta_0}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_0}{\partial z},$$

$$0 = \bar{\alpha}_0 \cos(n, x) + \bar{\beta}_0 \cos(n, y) + \bar{\gamma}_0 \cos(n, z)$$

genügen. Diese $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ lassen sich nach S. 194, Bd. I in der

Form (34‴) darstellen und entsprechen somit solenoidalen Erregungen mit Solenoiden, deren Axen an der Oberfläche tangential verlaufen und daher in einem endlichen Körper notwendig geschlossene Kurven bilden müssen.

Indessen geben derartige Erregungen keine elektrostatische Potentialfunktion und können daher bei unseren jetzigen Betrachtungen außer Betracht bleiben. —

Unsere Entwickelungen haben sich bisher ausschließlich auf homogene flüssige Dielektrica bezogen; aber wir dürfen die erhaltenen Endresultate mit großer Wahrscheinlichkeit auf beliebige isotrope, feste oder flüssige, homogene oder inhomogene Dielektrica übertragen.

Diese Übertragung ist, wenn es sich um ein einziges homogenes festes Dielektricum handelt, nur deshalb hypothetisch, weil das Grundphänomen, von welchem wir ausgegangen sind, die Modifikation der Wechselwirkung zwischen zwei geladenen, in dem unendlichen Dielektricum eingebetteten Konduktoren, sich in diesem Falle der Beobachtung entzieht. Die Prüfung der Berechtigung muß hier demgemäß an Folgerungen aus der Grundhypothese anknüpfen, und es kommt dabei vor allem die Veränderung der Kapacität eines Kondensators in Betracht, welche eintritt, wenn man seine Teile — z. B. die Scheiben eines Plattenkondensators — durch ein festes Dielektricum trennt.

Nachdem aber die in der angedeuteten Weise ausgeführten Beobachtungen die Berechtigung der Anwendung der Formeln (33′) und (33″) auf ein homogenes isotropes festes Dielektricum erwiesen haben, ist dann die Übertragung auf nicht homogene feste oder flüssige eine einfache Konsequenz der vorausgeschickten Auffassung, daß das Raumintegral (33″) der wahre Ausdruck für die Wirkung des homogenen Dielektricums sei. Denn der Anteil, den jedes Volumenelement desselben liefert, ist nur von dessen Zustand und nicht von dem irgend welcher anderer Volumina abhängig, bleibt also derselbe, wenn das Element nicht einem homogenen, sondern einem inhomogenen Körper angehört. —

Wir wollen nunmehr die Eigenschaften der Potentialfunktion φ' der freien Ladungen in dem allgemeineren Falle eines Systemes von beliebigen, im Endlichen liegenden und mit endlichen Ladungen versehenen Konduktoren und von beliebigen inhomogenen, aber isotropen, mit räumlichen oder flächenhaften Ladungen behafteten Dielektrica entwickeln, und machen dabei nur die eine nicht wesentlich beschränkende Annahme, daß das Dielektricum im Unendlichen

homogen sei. Dann läßt sich nämlich zeigen, daß φ' im Unendlichen verschwindet, wie die Potentialfunktion endlicher, im Endlichen liegender Massen. Denn man kann in unserem Falle alle wahren Ladungen durch eine endliche, ganz in einem homogenen Dielektricum verlaufende Fläche O einschließen und die innerhalb befindliche freie elektrische Verteilung für alle äußeren Punkte nach S. 24 durch eine endliche Belegung der Oberfläche O ersetzen. Eine solche influenziert aber nach dem im Anfang dieses Paragraphen Gesagten innerhalb des äußeren homogenen Dielektricums keine Elektricität, sondern nur an der Begrenzung O selbst, und zwar, wenn dort eine Flächendichte σ_0 vorhanden ist, eine scheinbare Dichte $\sigma_0(1-\mathfrak{d})/\mathfrak{d}$. Im Raume außerhalb O ist somit die ganze elektrische Verteilung durch eine Ladung der Fläche O mit der Dichte $\sigma_0/\mathfrak{d}$ zu ersetzen, wodurch die obige Behauptung erwiesen ist.

Um nun die φ' charakterisierenden Eigenschaften abzuleiten, haben wir auszugehen von dem Ansatz

$$\left.\begin{aligned}\varphi' = \sum\int\frac{\sigma_k\,d o_k}{r} + \sum{}'\int\frac{\sigma_{hi}\,d o_{hi}}{r} + \int\frac{\varrho_1\,d k_1}{r}\\ -\int\mathfrak{e}_1\left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d k_1;\end{aligned}\right\}\qquad 35)$$

hierin stellen die drei ersten Integrale die Potentialfunktion φ der wahren Ladungen dar, die auf den Oberflächen der Konduktoren (k) die Dichte σ_k, auf einzelnen Flächen innerhalb des Dielektricums, z. B. auf der etwa durch Reibung erregten Grenze zwischen zwei homogenen Dielektrica (h) und (i), die Dichte σ_{hi} und innerhalb des Dielektricums die Raumdichte ϱ besitzen; das letzte Integral giebt die Potentialfunktion φ'' der im Dielektricum influenzierten Momente.

Durch teilweise Integration des letzten Gliedes, wobei das Integral über die das Dielektricum nach außen begrenzende, unendlich große Kugel verschwindet, erhält man bei geänderter Ordnung der Glieder

$$\left.\begin{aligned}\varphi' = \sum\int\left(\sigma_k + \bar{\mathfrak{e}}_k\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial n_k}\right)\frac{d o_k}{r} + \sum{}'\int\left(\sigma_{hi} + \bar{\mathfrak{e}}_h\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial n_h} + \bar{\mathfrak{e}}_i\frac{\overline{\partial\varphi'}}{\partial n_i}\right)\frac{d o_{hi}}{r}\\ + \int\left(\varrho_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\mathfrak{e}_1\frac{\partial\varphi'}{\partial z_1}\right)\right]\right)\frac{d k_1}{r};\end{aligned}\right\}\quad 35')$$

darin bezeichnet n_k die innere Normale auf $d o_k$ bezüglich des Dielektricums, n_h, n_i die nach den Medien (h) und (i) hin gelegenen

Normalen auf der Unstetigkeitsfläche o_{hi}, endlich $\mathfrak{e}_h$ und $\mathfrak{e}_i$ die Werte von $\mathfrak{e}$ in den ihr beiderseitig anlagernden Volumenelementen.

Demgemäß besitzt die freie Ladung der Konduktoren die Flächendichte

$$36)\qquad \sigma'_k = \sigma_k + \overline{\mathfrak{e}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}},$$

die der Unstetigkeitsflächen analog

$$36')\qquad \sigma'_{hi} = \sigma_{hi} + \overline{\mathfrak{e}_h\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\mathfrak{e}_i\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}},$$

die im Inneren der Dielektrica liegende die Raumdichte

$$36'')\qquad \varrho' = \varrho + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{e}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{e}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{e}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right).$$

Nimmt man hinzu, daß nach der Definition von φ' auch gelten muß

$$36''')\quad -4\pi\sigma' = \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}}, \qquad -4\pi\sigma'_{hi} = \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}}, \qquad -4\pi\varrho' = \triangle\varphi',$$

so erhält man für die Dichten der wahren Ladungen bei Berücksichtigung von

$$\mathfrak{e} = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi}$$

$$37)\qquad -4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{d}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_k}}, \qquad -4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{d}_h\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_h}} + \overline{\mathfrak{d}_i\,\frac{\partial \varphi'}{\partial n_i}}$$

$$37')\qquad -4\pi\varrho = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{d}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{d}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{d}\,\frac{\partial \varphi'}{\partial z}\right).$$

Berücksichtigt man weiter, daß längs der Konduktoren (k)

$$37'')\qquad \overline{\varphi'_k} = P'_k,$$

d. h. konstant sein muß, daß an Unstetigkeitsgrenzen innerhalb des Dielektricums, wenn zum Zwecke größter Allgemeinheit elektromotorische Kräfte zugelassen werden, nach Analogie mit dem über Leiter S. 15 Gesagten

$$37''')\qquad \overline{\varphi'_h} - \overline{\varphi'_i} = P_{hi}$$

gesetzt werden kann, wo P_{hi} der Kombination der Substanzen (h) und (i) individuell ist, und daß schließlich im Unendlichen φ' wie die Potentialfunktion endlicher und im Endlichen befindlicher Massen unendlich klein wird, so ist durch diese Bedingungen φ' im ganzen Raum eindeutig bestimmt. Auf den Beweis dieser Behauptung kommen wir weiter unten zurück. —

§ 8. Elektrische Kräfte und Polarisationen innerhalb eines Dielektricums. Die Potentialfunktion krystallinischer Dielektrica.

Während die im Vorstehenden ausgeführte Umwandlung des Wertes (32) für die Potentialfunktion φ'' des influenzierten Dielektricums aus einem Oberflächenintegral über seine durch die Konduktoren gelieferte Begrenzung in das Raumintegral (33'') über das vom Dielektricum erfüllte Volumen und auch der analoge Übergang zu dem Ausdruck (34) vollständig glatt ausführbar war, bietet die Frage eine gewisse Schwierigkeit, ob auch die Differentialquotienten von φ' bei Anwendung der ersteren Form sich denen gleich ergeben, die aus der letzteren Form folgen.

Es läßt sich ja allerdings in der Bd. I, S. 170 gezeigten Weise nachweisen, daß in dem Ausdruck (32) resp. (34) für φ'' ebenso, wie in dem (33''), ein unendlich kleiner, um den Einheitspol konstruierter Bereich $\varkappa$ auch nur einen unendlich kleinen Anteil zu φ'' liefert. Zerlegt man demgemäß φ'' in φ_i'' und φ_a'', wo φ_i'' von dem kleinen Bereich, φ_a'' von dem übrigen Dielektricum herrührt, so ist φ_i'' unendlich kein, also $\varphi''=\varphi_a''$. Zu den Differentialquotienten von φ'' hingegen liefert φ_i'' in der Gestalt (32) resp. (34) zwar auch einen unendlich kleinen, dagegen in der Gestalt (33'') im allgemeinen einen endlichen Anteil, der von der Gestalt des ausgeschlossenen Bereiches $\varkappa$ abhängt, und hieraus folgt, daß man je nach dessen Wahl durch Grenzübergang unendlich viele Werte für die Differentialquotienten von φ'' erhalten kann.

Es läßt sich aber eine Form des Bereiches $\varkappa$ angeben, für welche, so wie φ_i'', auch seine ersten Differentialquotienten nach den Koordinaten verschwinden; es ist die Gestalt eines gegen seine Länge unendlich dünnen Cylinders mit einer der lokalen elektrischen Axe λ parallelen Längsaxe. Ist auch seine Länge unendlich klein, so kann in ihm das Moment μ, stetige Änderung desselben vorausgesetzt, nach Größe und Axenrichtung als konstant angesehen werden; φ_i'' ist daher, wie Bd. I, S. 171 ausgeführt, mit der Potentialfunktion einer Belegung μq seiner Endflächen q äquivalent, die unter den gemachten Voraussetzungen verschwindende Differentialquotienten liefert.

Führt man den Grenzübergang mit Hilfe dieses speziellen Bereiches $\varkappa$ aus, so wird $\partial\varphi_a''/\partial x=\partial\varphi''/\partial x$ u. s. f., und es ist somit einerseits der Wert der Differentialquotienten von φ'' bei Benutzung der Definition (33'') eindeutig bestimmt, andererseits auch übereinstimmend mit dem aus (32) resp. (34) jederzeit folgenden.

Nun ergeben aber nach S. 10 die ersten Differentialquotienten der Potentialfunktion nach den Koordinaten, so, wie oben, bei konstanten Ladungen genommen, die negativen Kraftkomponenten, welche die betreffenden Ladungen auf einen wahren Einheitspol ausüben; daher zeigt das eben Auseinandergesetzte, daß $-\partial\varphi''/\partial x$, u. s. f. bei der getroffenen Festsetzung die Komponenten darstellen, die ein wahrer Einheitspol innerhalb eines unendlich kleinen cylindrischen Hohlraumes von den Größen- und Lagenverhältnissen des Bereiches $\varkappa$ bei festgehaltenen Ladungen seitens des elektrisierten Dielektricums erfahren würde. Da aber nach (29) die aktuelle Potentialfunktion φ' die Summe der Potentialfunktionen φ aller wahren Ladungen und φ'' aller in den Dielektrica influenzierten ist, und da $-\partial\varphi/\partial x$ u. s. f. außer in dem S. 47 erledigten Falle jederzeit die von den wahren Ladungen ausgehenden Komponenten darstellen, so geben die Formeln

38) $$X = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z}$$

die vollständigen, von allen Ladungen herrührenden Kräfte, wenn man sie auf einen wahren Einheitspol innerhalb eines geeignet gelegten und gestalteten Hohlraums bezieht. Die Resultante

38') $$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

stellt daher nach S. 10 auch die Stärke des elektrischen Feldes in dem Dielektricum dar.

Führt man außer X, Y, Z noch die Komponente N normal zu einem Flächenelement do durch die Beziehung

38'') $$N = -\frac{\partial\varphi'}{\partial n} = X\cos(n, x) + Y\cos(n, y) + Z\cos(n, z)$$

ein, so erhält man aus den Formeln (36'''), (37) und (37') folgende für die Kräfte charakteristischen Beziehungen.

Überall innerhalb des Dielektricums ist die wahre und die freie räumliche Dichte gegeben[20]) durch

39) $$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{d}X}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{d}Y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{d}Z}{\partial z}, \quad 4\pi\varrho' = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

an Konduktoren die wahre und die freie Flächendichte durch

39') $$4\pi\sigma_k = \bar{\mathfrak{d}}\bar{N}_k, \quad 4\pi\sigma'_k = \bar{N}_k,$$

an Unstetigkeitsflächen o_{hi} analog durch

39'') $$4\pi\sigma_{hi} = \bar{\mathfrak{d}}_h\bar{N}_h + \bar{\mathfrak{d}}_i\bar{N}_i, \quad 4\pi\sigma'_{hi} = \bar{N}_h + \bar{N}_i.$$

Die letzten Formeln zeigen, daß die Normalkomponente $\bar{N}$ nur dann stetig durch o_{hi} geht, wenn σ'_{hi} verschwindet, resp. $\bar{\mathfrak{d}}_h = \bar{\mathfrak{d}}_i$ und $\sigma_{hi} = 0$ ist. Die Tangentialkomponente $S = -\partial\varphi'/\partial s$, worin s

eine beliebige zu o_{hi} tangentiale Richtung bezeichnet, befolgt nach (37‴) die Gleichung

$$\overline{S_i} - \overline{S_h} = \frac{\partial P_{hi}}{\partial s}, \tag{39''}$$

sie ist also stetig nur in Grenzen zwischen zwei h o m o g e n e n Dielektrica.

Bezeichnen wir nunmehr, wie früher, als K r a f t l i n i e eine Kurve, deren Tangente an jeder Stelle mit der Richtung der dort wirkenden Kraft zusammenfällt, so ergiebt diese Überlegung, daß die Kraftlinien in Zwischengrenzen im allgemeinen einen Knick besitzen.

Trägt die Grenze keine wahre Ladung, und scheidet sie zwei homogene Dielektrica, so nimmt die erste Gleichung (39″) die Form an

$$0 = \mathfrak{d}_h \overline{N_h} + \mathfrak{d}_i \overline{N_i}, \tag{40}$$

während für die Komponenten S_h, S_i die Beziehung

$$\overline{S_h} = \overline{S_i} \tag{40'}$$

gilt. Hieraus folgt leicht das B r e c h u n g s g e s e t z d e r K r a f t l i n i e n, welches dahin lautet, daß die in einem Punkte der Grenzfläche eintretende und die austretende Kraftlinie mit ihren letzten Elementen in einer Ebene liegen, welche das Lot auf der Grenze enthält, und daß die trigonometrischen Tangenten der Winkel ν, welche diese Elemente mit der Normalen einschließen, sich verhalten wie die Dielektricitätskonstanten der Medien, in denen sie liegen. Wir schreiben das Gesetz demgemäß:

$$\operatorname{tg} \nu_h : \operatorname{tg} \nu_i = \mathfrak{d}_h : \mathfrak{d}_i. \tag{40''}$$

Aus dieser Formel folgt, daß zu jedem Einfallswinkel ein reeller Brechungswinkel gehört, daß also etwas der totalen Reflexion analoges in diesem Gebiet nicht stattfindet.

Bei Einführung der tangentialen G e s a m t komponente T erhält man aus (38′) zunächst

$$K_h^2 = N_h^2 + T_h^2 = T_h^2\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \nu_h}\right) = \frac{T_h^2}{\sin^2 \nu_h},$$

und da nach (40′) $\overline{T_h} = \overline{T_i}$ ist, auch

$$\overline{K_h} : \overline{K_i} = \sin \nu_i : \sin \nu_h. \tag{40'''}$$

Die beiden elektrischen Gesamtkräfte K_h und K_i sind sonach in der Grenze den Sinus der Neigungswinkel der Kraftlinien indirekt proportional. Hieraus folgt, daß die Kraftlinien auf die äußere Begrenzung eines Raumes, innerhalb dessen die Kraft verschwindet, normal auftreffen müssen.

Man kann sich nach diesen Resultaten leicht eine Vorstellung

von der Wirkung bilden, die ein homogenes isotropes Dielektricum (1), welches in einem anderen (2) eingelagert ist, auf die Kraftlinien ausübt.

Besitzt (1) dieselbe Dielektricitätskonstante $\mathfrak{d}$, wie (2), so gehen die Kraftlinien ungebrochen durch die Oberfläche; hat es eine kleinere, so werden sie nach dem Einfallslot hin, hat es eine größere, so vom Einfallslot hinweg gebrochen. Ist $\mathfrak{d}_1$ unendlich groß, so treten sie bei schiefem Auftreffen tangential ein, verlaufen also der Grenze entlang; bei normalem wird ihre Eintrittsrichtung unbestimmt, woraus folgt, daß die Kraft K in einem Dielektricum von unendlich großer Konstante $\mathfrak{d}$, wie innerhalb eines Leiters, verschwinden muß.

In einem gleichförmigen elektrischen Felde, wo die Kraftlinien parallele Gerade sind, lenkt ein eingeführtes fremdes Dielektricum die Kraftlinien auf sich hin, wenn es eine größere, von sich hinweg, wenn es eine kleinere Dielektricitätskonstante besitzt, als die Umgebung. —

Wir wollen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{K}$ mit den Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ resp. $\mathfrak{N}$ einführen durch die Beziehungen

41) $$\mathfrak{d}X = \mathfrak{X}, \quad \mathfrak{d}Y = \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{d}Z = \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{d}N = \mathfrak{N};$$

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ mögen die elektrischen Polarisationen[21]) nach den Richtungen X, Y, Z, N, und

41') $$\mathfrak{K} = \sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}$$

mag die resultierende oder die Gesamtpolarisation heißen.

Für diese Größen gelten dann an Stelle der ersten Formeln (39) bis (39'') die folgenden

41'') $$4\pi\varrho = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z},$$

41''') $$4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{N}}_k, \quad 4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i;$$

die Polarisationen verhalten sich also ähnlich, wie Kraftkomponenten im leeren Raum. Ihre Normalkomponenten werden durch Unstetigkeiten im dielektrischen Verhalten nicht berührt und werden unstetig nur an Flächen, welche wahre Ladungen tragen; ihre Tangentialkomponenten dagegen springen an Unstetigkeitsflächen.

Vergleicht man die Formeln (41) bis (41''') mit den auf S. 300 des I. Bandes aufgestellten für die stationäre Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit innerhalb eines isotropen Körpers, der nur durch die Oberflächen der Konduktoren und eventuell durch die unendliche Kugelfläche begrenzt ist, so erhält man eine vollständige Übereinstimmung, wenn man $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ als die Strömungskompo-

nenten nach den Richtungen X, Y, Z und N auffaßt, die Oberflächen der Konduktoren als Eintrittsstellen von der Ergiebigkeit $4\pi\sigma$ pro Flächeneinheit für das Fluidum ansieht, an den geladenen Flächen innerhalb oder in Zwischengrenzen der Dielektrica Quellen von der Ergiebigkeit $4\pi\sigma_{hi}$ pro Flächeneinheit und außerdem innerhalb der Dielektrica räumliche Quellen von der Ergiebigkeit $4\pi\varrho$ pro Raumeinheit annimmt. Die Dielektricitätskonstante $\mathfrak{d}$ vertritt die Stelle der Leitungsfähigkeit und kann daher auch als dielektrische Leitungsfähigkeit oder, um Verwechselungen mit der später zu betrachtenden elektrischen Leitfähigkeit zu vermeiden, auch als dielektrische Permeabilität[22]) bezeichnet werden. —

Die gewonnene mechanische Analogie ist von Wichtigkeit für die Erweiterung unserer Ansätze auf krystallinische Dielektrica. Zwar kann sie hier, wie in ähnlichen, uns später begegnenden Fällen, die allgemeinere Form nur wahrscheinlich machen, nicht als richtig erweisen, aber immerhin ist dadurch überall, wo man ohne spezielle Hypothesen über den Mechanismus eines Vorganges vorschreiten will, schon Erhebliches gewonnen.

Wir wollen daher jene allgemeinen Ansätze, die wir auf S. 290 des I. Bandes für die Strömungskomponenten eines imponderabeln Fluidums innerhalb eines krystallinischen Körpers erhalten haben, auf unseren Fall übertragen und setzen[23])

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mathfrak{d}_{11}X + \mathfrak{d}_{12}Y + \mathfrak{d}_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{d}_{21}X + \mathfrak{d}_{22}Y + \mathfrak{d}_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{d}_{31}X + \mathfrak{d}_{32}Y + \mathfrak{d}_{33}Z, \\ \mathfrak{R}^2 &= \mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2, \end{aligned}\right\} \qquad 42)$$

worin wir die $\mathfrak{d}_{hk}$, welche an Stelle der Leitfähigkeitskonstanten des früheren Ansatzes stehen, als die allgemeinen Dielektricitätskonstanten oder als die Konstanten der dielektrischen Permeabilität des krystallinischen Mediums bezeichnen. Die $\mathfrak{d}_{hk}$ sind innerhalb eines homogenen Mediums konstant, aber abhängig von dessen Orientierung gegen das Koordinatensystem; demgemäß spezialisiert sich der Ansatz (42) für die verschiedenen Krystallgruppen nach dem Schema II Bd. I, S. 137. Auf eine ganz allgemein geltende Beziehung zwischen den verschiedenen $\mathfrak{d}_{hk}$ gehen wir später ein.

Verbinden wir hiermit die früheren Beziehungen

$$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z},$$

$$4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{N}}_k, \quad 4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i, \qquad 42')$$

worin

42′′) $$\mathfrak{N} = \mathfrak{X} \cos(n, x) + \mathfrak{Y} \cos(n, y) + \mathfrak{Z} \cos(n, z)$$

die Komponente des Vektors $\mathfrak{K}$ nach der Richtung von n bezeichnet, sowie die Grenzbedingungen

42′′′) $$\varphi_k' = P_k', \quad \varphi_h' - \varphi_i' = P_{hi},$$

worin P_{hi}, wie S. 58, die elektromotorische Kraft bedeutet, so ist ein System von Bedingungen für φ' gewonnen, welches, wie gemäß S. 301, Bd. I, nachzuweisen, diese Funktion vollständig bestimmt, falls

42′′′′) $$\left\{ \begin{aligned} 8\pi \mathfrak{f} = \mathfrak{d}_{11} X^2 + \mathfrak{d}_{22} Y^2 + \mathfrak{d}_{33} Z^2 + (\mathfrak{d}_{23} + \mathfrak{d}_{32}) YZ \\ + (\mathfrak{d}_{31} + \mathfrak{d}_{13}) ZX + (\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21}) XY \end{aligned} \right.$$

eine wesentlich positive quadratische Form ist, was wir so lange, als keine Beobachtung das Gegenteil erweist, annehmen dürfen.

Die Zulässigkeit der im Vorstehenden ausgeführten Erweiterung hat, wie schon angedeutet, die Beobachtung zu beweisen; die Erfahrung hat diese Bestätigung in ausgedehntem Maße geliefert. —

Es ist nützlich, darauf aufmerksam zu machen, wie durch die vorstehenden Bedingungen die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen, bei dem Problem der Influenzierung eines dielektrischen Systemes auftretenden Größen formuliert ist.

Der einfachste Fall ist der, daß Konduktoren überhaupt nicht vorhanden sind, die wahren Ladungen also an Dielektrica haften, und daß somit die σ_{hi} und ϱ vollständig vorgeschrieben sind. Die letzteren Größen bestimmen φ' vollständig, und damit auch X, Y, Z, aus denen dann gemäß den Formeln (39) und (39′′) die freien Dichten sich berechnen lassen.

Sind homogene Konduktoren innerhalb des Systemes vorhanden, so sind nicht direkt die Dichten σ_k an ihren Grenzen vorgeschrieben, sondern entweder die konstanten Potentialwerte P_k' oder die Gesamtladungen $E_k = \int \sigma\, d o_k$ auf denselben. Hier werden dann zur Bestimmung von φ' Umwege nötig, den auf S. 34 erörterten analog.

Wesentlich ist aber, daß überall die freien Dichten als Folgerungen aus der Theorie, nicht als gegebene Größen auftreten. —

Verglichen mit den dielektrischen Polarisationen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ besitzen die auf S. 54 eingeführten dielektrischen Momente α, β, γ für die nächsten Untersuchungen nur eine sekundäre Bedeutung; doch gestatten sie, die allgemeinen Resultate in einem anderen Sinne zu veranschaulichen, als jene, und mögen daher hier nochmals in Betracht gezogen werden.

Durch Einführung der Komponenten X, Y, Z erhält man aus (33) und (33') für isotrope Medien die Beziehungen

$$\alpha = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} X = \mathfrak{e} X, \quad \beta = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} Y = \mathfrak{e} Y, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi} Z = \mathfrak{e} Z. \qquad 43)$$

Auch sie erfahren beim Übergang zu krystallinischen Dielektrica eine Erweiterung, die man sehr einfach gewinnt, wenn man die influenzierten Dichten der Ladungen im Dielektricum einmal durch α, β, γ, einmal durch φ' ausdrückt. Die Kombination der Formeln (34') mit (29) und (39) bis (39'') führt auf die Beziehungen

$$-\sigma_k'' = \bar{\alpha} \cos(n, x) + \bar{\beta} \cos(n, y) + \bar{\gamma} \cos(n, z) = \frac{1}{4\pi}(\overline{\mathfrak{N}}_k - \overline{N}_k),$$

$$-\sigma_{hi}'' = (\bar{\alpha} \cos(n,x) + \dots)_h + (\bar{\alpha} \cos(n,x) + \dots)_i = \frac{1}{4\pi}[(\overline{\mathfrak{N}} - \overline{N})_h + (\overline{\mathfrak{N}} - \overline{N})_i],$$

$$-\varrho'' = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial (\mathfrak{X} - X)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{Y} - Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{Z} - Z)}{\partial z}\right),$$

woraus man erhält

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\alpha &= \mathfrak{X} - X = (\mathfrak{d}_{11} - 1) X + \mathfrak{d}_{12} Y + \mathfrak{d}_{13} Z, \\ 4\pi\beta &= \mathfrak{Y} - Y = \mathfrak{d}_{21} X + (\mathfrak{d}_{22} - 1) Y + \mathfrak{d}_{23} Z, \\ 4\pi\gamma &= \mathfrak{Z} - Z = \mathfrak{d}_{31} X + \mathfrak{d}_{32} Y + (\mathfrak{d}_{33} - 1) Z. \end{aligned}\right\} \qquad 43')$$

Für manche Zwecke ist es bequem, diesen Formeln die folgende, mit (43) analoge Gestalt zu geben

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{e}_{11} X + \mathfrak{e}_{12} Y + \mathfrak{e}_{13} Z, \\ \beta &= \mathfrak{e}_{21} X + \mathfrak{e}_{22} Y + \mathfrak{e}_{23} Z, \\ \gamma &= \mathfrak{e}_{31} X + \mathfrak{e}_{32} Y + \mathfrak{e}_{33} Z, \end{aligned}\right\} \qquad 43'')$$

worin also gesetzt ist

$$\frac{\mathfrak{d}_{hh} - 1}{4\pi} = \mathfrak{e}_{hh}, \quad \frac{\mathfrak{d}_{hk}}{4\pi} = \mathfrak{e}_{hk}, \qquad 43''')$$

und die $\mathfrak{e}_{hk}$ die allgemeinen Elektrisierungszahlen des Krystalles darstellen, die ähnliche Eigenschaften besitzen, wie die Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$. —

Hiermit ist die Aufstellung der allgemeinsten Gesetze für die Influenzierung der Dielektrica erledigt, und es mögen an den Schluß dieser Entwickelung nur noch einige auf ihre Anwendungen bezüglichen Bemerkungen gestellt werden.

Bei manchen allgemeinen elektrostatischen Untersuchungen ist es lästig, die Konduktoren neben den Dielektrica als andersartige Körper zu führen. Man vermeidet dies, indem man sie für den vorliegenden speziellen Zweck als Dielektrica mit unendlich großen Konstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ betrachtet. Da nämlich die Normalkomponenten der Polarisationen stetig durch die Grenzen zwischen

verschiedenen Dielektrica gehen und in den wirklichen Dielektrica — extreme Fälle ausgeschlossen — endlich sind, so müssen sie auch innerhalb Medien mit unendlich großen Dielektricitätskonstanten endlich sein, d. h., es müssen dort die Komponenten X, Y, Z verschwinden, oder es muß die Potentialfunktion φ' konstant sein, wie dies innerhalb der Konduktoren in der That stattfindet.

Ob die Leiter wirklich dielektrische Qualitäten besitzen, ist auf Grund elektrostatischer Erscheinungen nicht zu entscheiden. Denn da im Gleichgewichtszustande die Kräfte X, Y, Z in ihrem Innern verschwinden, können daselbst nach (42) Polarisationen in keinem Falle entstehen. Dagegen führt die Untersuchung veränderlicher Zustände dazu, auch den Leitern Dielektricitätskonstanten zuzusprechen, und liefert die Mittel zu ihrer experimentellen Bestimmung. Es sei schon hier bemerkt, daß ihre Werte sich endlich ergeben, daß also der obige Kunstgriff eine physikalische Bedeutung nicht besitzt.

Auch die geladenen influenzlosen Isolatoren lassen sich als Grenzfälle von Dielektrica auffassen. Wenn man nämlich in einem isotropen Körper $\mathfrak{d} = 1$ annimmt, so wird derselbe durch elektrische Kräfte nicht influenziert; legt man ihm außerdem noch eine wahre elektrische Dichte ϱ bei, so besitzt er alle Eigenschaften, die wir bei absoluten Isolatoren früher vorausgesetzt haben.

Ferner wirkte es schon bei der Bildung der Potentialfunktion φ' komplizierend, daß bisher drei Arten von wahren Ladungen unterschieden werden mußten: räumliche von der Dichte ϱ im Innern des Dielektricums, flächenhafte von der Dichte σ_k an der Grenze nach Konduktoren hin, flächenhafte von der Dichte σ_{hi} an Unstetigkeitsflächen innerhalb des Dielektricums. Man kann viele Entwickelungen vereinfachen, wenn man die letzten beiden Ladungen als Grenzfälle der ersteren ansieht, nämlich alle sprungweisen Änderungen im elektrischen Verhalten durch stetige Übergänge ersetzt, die innerhalb sehr dünner Schichten stattfinden. Dabei ist es zunächst gleichgültig, ob man damit — wie zumeist geschieht — eine Hypothese über das wirkliche Verhalten der Körper in Zwischengrenzen, oder nur eine zulässige Vereinfachung der Rechnungen eingeführt denken will.

Will man die Endresultate einer in der angedeuteten Weise vereinfachten Entwickelung dem Falle anpassen, daß Unstetigkeitsflächen vorhanden sind, so hat man nur die Schichten, innerhalb deren das dielektrische Verhalten sich um einen endlichen Betrag ändert, unendlich dünn werden zu lassen — ein Grenzübergang, der Schwierigkeiten im allgemeinen nicht bietet.

§ 9. Das Potential eines influenzierten Dielektricums auf andere Körper. Das innere Potential eines allgemeinen elektrischen Systemes und die innere Arbeit bei stattfindenden Dislokationen seiner Teile. Die Arbeit der Elektrisierung.

Da durch die Entwickelungen des § 7 sich der Ausdruck

$$\varphi'' = \int\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) dk_1$$
$$= \int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r}$$

als die Potentialfunktion des influenzierten Dielektricums ergeben hat, so ist sein Potential auf eine beliebige, auf einem Leiter oder einem Nichtleiter gelegene wahre Verteilung e_2 sogleich angebbar; man findet nämlich auf Grund des S. 49 erörterten Zusammenhanges der Potentialfunktion mit dem Einheitspotential sogleich

$$\Phi_{12}'' = \int \varphi'' de_2, \qquad 44)$$

wo der Wert von φ'' am Orte des Ladungselementes de_2 zu nehmen ist, oder auch

$$\Phi_{12}'' = \int de_2 \left[\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r}\right].$$

Betrachten wir den Fall, daß das Dielektricum (1) ganz im Endlichen liegt und rings durch den leeren Raum von der Ladung (2) getrennt ist, so haben wir die einfache Anordnung wieder, von der wir in § 1 ausgingen: Φ_{12}'' ist das Potential zwischen zwei gegebenen Ladungen (1) und (2), aus welchem die Arbeiten der Wechselwirkungen, sowie die Werte der von ihnen ausgeübten Komponenten und Momente durch geeignete Variation resp. Differentiation bei konstant gehaltenen elektrischen Dichten folgen. Es sei besonders bemerkt, daß in diesem Falle die influenzierten Dichten σ_1'' und ϱ_1'' ganz die Rolle wahrer Ladungen spielen.

Wir können deshalb auch für die Ladung (2) die in einem Dielektricum influenzierte wählen und erhalten so für das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei influenzierten Ladungen

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{12}'' = &\int \sigma_2'' do_2 \left(\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r}\right)\\ &+ \int \varrho_2'' dk_2 \left(\int \frac{\sigma_1'' do_1}{r} + \int \frac{\varrho_1'' dk_1}{r}\right),\end{aligned}\right\} \qquad 44')$$

oder nach einer einfachen Umformung wegen (34') auch

44'')
$$\left\{\begin{aligned}\Phi''_{12} = \iint \Bigg[& \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) \\ & + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) \\ & + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\Bigg] dk_1\, dk_2 ,\end{aligned}\right.$$

das die analoge Verwertung gestattet, wie das frühere Φ_{12}.

Haben die beiden Dielektrica neben den influenzierten auch noch wahre Ladungen, so superponieren sich deren Potentiale über die der influenzierten Ladungen; das Resultat ist die Formel (44'), statt für die influenzierten, für die freien Ladungen gebildet. Wir schreiben zu künftiger Verwendung sogleich den Ausdruck für das Potential Φ' der Wechselwirkung zwischen beliebig vielen durch den leeren Raum getrennten Körpern, indem wir zur Vereinfachung der Formel in der oben besprochenen Weise die flächenhaften Dichten als die Grenzfälle räumlicher ansehen,

44''')
$$\Phi' = \Sigma' \Phi'_{hi} = \Sigma' \iint \varrho'_h \varrho'_i \frac{dk_h\, dk_i}{r};$$

dazu fügen wir die seine Eigenschaft charakterisierende Gleichung

44'''')
$$\delta' A_i = -\,\delta_{\varrho'} \Phi',$$

in welcher der Index ϱ' andeutet, daß die Variation nur die Anordnung des Systemes betreffen, also die freie Ladung jedem Massenelement ungeändert erhalten bleiben soll. —

Die Verhältnisse komplizieren sich erheblich, wenn es sich um Systeme von Dielektrica handelt, die nicht durch den leeren Raum voneinander getrennt sind, sondern ineinander übergehen, demgemäß also, um Lagenänderungen zu gestatten, wenigstens teilweise nicht starr sein dürfen. Hier wird im allgemeinen bei jeder Verschiebung das ganze System mechanisch und demgemäß elektrisch in Mitleidenschaft gezogen; wir dürfen somit für seine Untersuchung nicht das Potential der Wechselwirkung zwischen einzelnen Teilen zu Grunde legen, sondern müssen das Potential Φ des ganzen Systemes auf sich selbst als Ausgangspunkt wählen.

Wir gelangen dazu, indem wir von dem Elementarpotential (29'')

$$\Phi'_{12} = \frac{1}{2}\,\frac{e_1 e'_2 + e_2 e'_1}{r_{12}}$$

ausgehen und dieses über alle möglichen Kombinationen wahrer und freier Ladungen summieren.

Das Resultat lautet:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\iint \frac{de\,de'}{r}, \tag{45}$$

wo beide Integrale über den ganzen Raum zu erstrecken sind, da offenbar das System im allgemeinen nach außen unbegrenzt ist. Der Vereinfachung halber mag indessen, wie auf S. 56, angenommen werden, daß das Dielektricum im Unendlichen homogen und isotrop ist, auch die wahren Ladungen nur im Endlichen liegen und einen endlichen Gesamtbetrag ergeben.

Die letzte Formel läßt sich bei Einführung der räumlichen und der flächenhaften Dichten ϱ und σ der wahren Ladungen schreiben

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int \sigma\varphi' do + \tfrac{1}{2}\int \varrho\varphi' dk. \tag{45'}$$

Beide Ausdrücke für Φ zeigen jene Unsymmetrie, auf welche schon im Eingang von § 7 aufmerksam gemacht worden ist, die sich eben jetzt aber als sehr vorteilhaft erweist.

Es ist bereits auf S. 59 darauf hingewiesen, daß die Differentialquotienten der Potentialfunktion φ'' eines erregten Dielektricums in dessen Innern vieldeutig sind; aus demselben Grunde wird der Wert (44'') des Potentiales der Wechselwirkung zwischen zwei erregten Dielektrica (1) und (2) unbestimmt, wenn die Integrationsgebiete k_1 und k_2 teilweise oder ganz zusammenfallen. Es wäre deshalb nicht möglich, aus dem Ausdruck (44'') einen eindeutigen Wert für das Potential eines Dielektricums auf sich selber abzuleiten; dagegen bietet die Anwendung der Formel (45) eine derartige Schwierigkeit nicht. —

Wir können unsere Ausgangsformel (45') in einer bemerkenswerten Weise umformen, indem wir die Werte von ϱ und σ aus (42') einsetzen und das Resultat durch Teile integrieren, wobei das auf die unendlich große Kugel bezügliche Oberflächenintegral verschwindet, und sich ergiebt

$$\Phi = \frac{1}{8\pi}\int\left(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z}\right)dk. \tag{45''}$$

Durch Einsetzen der Werte (42) für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ erhält man hieraus

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \frac{1}{8\pi}\int\Big(&\mathfrak{d}_{11}X^2 + \mathfrak{d}_{22}Y^2 + \mathfrak{d}_{33}Z^2\\ &+ (\mathfrak{d}_{23}+\mathfrak{d}_{32})YZ + (\mathfrak{d}_{31}+\mathfrak{d}_{13})ZX + (\mathfrak{d}_{12}+\mathfrak{d}_{21})XY\Big)dk,\end{aligned}\right\} \tag{45'''}$$

und bei Benutzung der Abkürzung $\mathfrak{f}$ aus (42'''')

45'''') $$\Phi = \int \mathfrak{f}\, dk.$$

Aus diesen Formeln, die wie (45) stets auf den ganzen unendlichen Raum zu beziehen sind, ist alles auf die Zwischengrenzen des Systemes Bezügliche völlig verschwunden.

Man kann den Wert (45') für Φ den vorstehenden konformer gestalten, indem man die schon S. 68 benutzte Vorstellung einführt, daß alle Übergänge zwischen verschiedenen Körpern stetig stattfinden, und daß demgemäß nirgends, auch nicht auf Konduktoren, flächenhafte, sondern überall räumliche Verteilungen vorhanden sind, die allerdings längs gewisser Schichten eine ausnahmsweise Dichte besitzen.

Unter dieser Voraussetzung kann man schreiben

46) $$\Phi = \tfrac{1}{2} \int \varrho \varphi' dk$$

und außerdem durch Kombination der beiden Werte (45'') und (46) für Φ auch noch andere Ausdrücke bilden.

Unter diesen besitzt der Wert

46') $$\Phi_0 = \int \left(\varrho \varphi' - \frac{1}{8\pi} (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z}) \right) dk,$$

den wir, um ihn von den übrigen zu unterscheiden, durch den Index $_0$ auszeichnen, eine besondere Bedeutung, insofern er bei einer Variation $\delta\varphi'$ von φ', die ϱ und die Konstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ ungeändert läßt, überdies im ganzen Raum stetig und im Unendlichen gleich Null ist, konstant bleibt, falls der ursprüngliche Zustand dem elektrischen Gleichgewicht entsprach.[24])

In der That folgt aus ihm bei Rücksicht auf (42) zunächst

$$\delta_{\varrho,\mathfrak{d}} \Phi_0 = \int \Big[\varrho \delta\varphi' - \frac{1}{8\pi} \Big(2\mathfrak{d}_{11} X \delta X + 2\mathfrak{d}_{22} Y \delta Y + \dots$$
$$+ (\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21})(Y\delta X + X\delta Y) \Big) \Big] dk,$$

und weiter wegen

$$\delta X = -\frac{\partial \delta\varphi'}{\partial x}, \dots \quad \text{und} \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \dots$$

nach einmaliger teilweiser Integration, bei welcher das auf die Grenzen bezügliche Glied verschwindet,

$$\delta_{\varrho,\mathfrak{d}} \Phi_0 = \int \left[\varrho - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \right) \right] \delta\varphi' dk;$$

dies giebt aber, falls, wie vorausgesetzt, die Variation von einem Gleichgewichtszustande aus stattfindet, nach der ersten Bedingung (42′)

$$\delta_{\varrho,\mathfrak{d}}\Phi_0 = 0. \qquad 46'')$$

Die zweite analog ausgeführte Variation wird

$$\delta^2_{\varrho,\mathfrak{d}}\Phi_0 = -\int\frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{d}_{11}(\delta X)^2 + \mathfrak{d}_{22}(\delta Y)^2 + \ldots(\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21})\,\delta X\delta Y\right)dk,$$

ist also, wenn nach der S. 64 gemachten Annahme die Funktion $\mathfrak{f}$, und damit auch der Ausdruck unter dem Integral, eine wesentlich positive quadratische Form ist, stets negativ.

Man kann hieraus schließen, daß die Funktion Φ_0, wie sie durch (46′) definiert ist, für den Fall des elektrischen Gleichgewichtes durch φ' bei gegebenen ϱ und $\mathfrak{d}_{hk}$ zu einem Maximum gemacht wird.

Noch ist klarzustellen, warum die im Vorstehenden angegebenen verschiedenen Ausdrücke für Φ, obwohl sie gleiche Werte ergeben, doch bezüglich der Variationen nicht unter allen Umständen gleichwertig sind. φ' hängt nämlich im allgemeinen von ϱ und den $\mathfrak{d}_{hk}$ ab, und bei einer Variation, welche φ' allein, nicht aber ϱ und die $\mathfrak{d}_{hk}$, betrifft, ist es demgemäß von Einfluß, inwieweit die letzteren Größen explicite vorkommen. Der Ausdruck (46) zeigt die $\mathfrak{d}_{hk}$, der Ausdruck (45″) ϱ überhaupt nicht, und somit können sie, wegen φ' allein variiert, nicht denselben Wert ergeben, wie der Ausdruck (46′), der beide Größen explicite enthält. —

Die Gleichung (46′) giebt noch Veranlassung zu einer wichtigen Überlegung anderer Art.

Unsere Ausgangsformel (45) und die daraus gebildeten folgenden enthalten nur die Wechselwirkungen zwischen den wahren und den freien, nicht die zwischen den freien und den freien Ladungen; demgemäß kommt in ihnen auch nichts direkt auf die Wechselwirkungen zwischen nur durch Influenz elektrisierten Dielektrica Bezügliches vor, und sie scheinen daher mit einer solchen unvereinbar. Es ist zu zeigen, daß dem nicht so ist.[25])

Nach Seite der Qualität läßt sich der geforderte Nachweis ganz ohne Rechnung führen. Denn nach den Grundformeln (42) bis (42‴) bestimmen sich die in einem Dielektricum influenzierten Ladungen bei gleichen influenzierenden geladenen Isolatoren wesentlich abhängig davon, welche und wie angeordnete andere Dielektrica noch außerdem der Wirkung der letzteren ausgesetzt sind. Das Potential Φ des ganzen Systemes ist also nicht nur von der Lage eines jeden Dielektricums gegen die influenzierenden Körper, son-

dern auch von der relativen Lage der verschiedenen Dielektrica abhängig. Somit sind also in der That in Φ Anteile enthalten, welche den Wechselwirkungen zwischen nur durch Influenz erregten Dielektrica entsprechen; daß sie für dieselben in der That das im Eingang dieses Paragraphen abgeleitete quantitative Gesetz ergeben, muß allerdings erst noch bewiesen werden.

Um diese Betrachtungen zu vereinfachen, wollen wir annehmen, unser System bestehe aus geladenen und influenzierten Dielektrica, welche durch den leeren Raum, also einen indifferenten Bereich, voneinander geschieden sind; nach S. 66 ist hierin der Fall von Konduktoren und absoluten Isolatoren mit eingeschlossen. Wir wollen die Variation $\delta\Phi$ von Φ berechnen, die eintritt, wenn die Teile des Systemes ohne Deformation des einzelnen, also wie starre Körper, beliebig gegeneinander verschoben werden, während die Ladungen, der geänderten Konfiguration des Systemes entsprechend, sich spontan gleichfalls verändern.

Diese Variation besteht, wie die analoge, auf S. 40 betrachtete, aus den zwei Teilen $\delta_\varrho\Phi$ und $\delta_a\Phi$, von denen der erste die Wirkung der Translation ohne Änderung der wahren Ladungen, der letztere nur die Wirkung der infolge der Translation eintretenden Ladungsänderung enthält.

Die freien Ladungen bestimmen sich in jedem Moment aus den wahren und aus der Konfiguration des Systemes.

Die Ladungsänderung wollen wir nun zuerst ausgeführt, also alle Teile in einen Zustand gebracht denken, wie sie ihn nach der Translation von selbst annehmen würden. Hierbei ändert sich ϱ, das nur auf den Isolatoren von Null verschieden, aber von vorgeschriebener Größe ist, nicht, und sonach ist dieser Teil $\delta_a\Phi$ der Variation ein solcher, der nur φ', nicht aber ϱ und die $\mathfrak{d}_{hk}$ berührt. Variationen dieser Art lassen aber, wie oben gezeigt ist, das Potential Φ in der durch (46') gegebenen Gestalt Φ_0 ungeändert, und demgemäß ist

47) $$\delta\Phi = \delta_\varrho\Phi_0 .$$

Um den noch übrigen Teil von $\delta\Phi$, der also die Körper des Systemes bei konstanten Ladungen verrückt, zu berechnen, wollen wir zunächst Φ_0 auf eine Form bringen, welche gestattet, die eigentlich über den ganzen unendlichen Raum erstreckte Integration nach dk auf die festen Körper allein zu beschränken. Dies erreichen wir, indem wir zu (46') die Gleichung

$$0 = \frac{1}{8\pi}\int(\varphi'\triangle\varphi' + \Theta\varphi')\,dk, \text{ worin } \Theta\varphi' = \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)^2,$$

addieren, welche identisch ist, da das bei teilweiser Integration des zweiten Gliedes auftretende Oberflächenintegral über die unendliche Kugelfläche verschwindet. Wir erhalten so den Wert

$$\Phi_0 = \int \left[\left(\varrho + \frac{1}{8\pi} \triangle \varphi' \right) \varphi' - \frac{1}{8\pi} (X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z} - \Theta \varphi') \right] dk, \qquad 47')$$

der dieselben Differentialeigenschaften besitzt, wie der in (46') gegebene, da durch die zugefügten Glieder weder ϱ noch ein $\mathfrak{d}_{hk}$ in die Formel neu eingeführt ist.

Von den in (47') unter dem Integral stehenden beiden Gliedern verschwindet im leeren Raume jedes für sich; denn dort ist

$$\triangle \varphi' = -4\pi\varrho = 0,$$

und wegen der Werte $\mathfrak{d}_{hh} = 1$, $\mathfrak{d}_{hk} = 0$, auch

$$X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z} = \Theta \varphi'.$$

Dadurch reduziert sich das Integrationsbereich, wie gewünscht, auf die einzelnen festen Körper (h) des Systemes, was wir andeuten wollen, indem wir das eine Integral über dk mit einer Summe solcher über alle dk_h vertauschen.

Um nun die spezielle, durch $\delta_\varrho \Phi_0$ bezeichnete Variation auszuführen, wollen wir jeden der getrennten festen Körper auf ein in ihm befestigtes Koordinatensystem bezogen und die Variation durch Veränderung der gegenseitigen Lage dieser Koordinatensysteme hervorgebracht denken. Es wird dann also φ' geändert werden, aber in anderer Weise, als zuvor, insofern außer den $\mathfrak{d}_{hk}$ und der wahren Dichte ϱ auch die mit $\triangle \varphi'$ proportionale freie Dichte ϱ' ungeändert bleibt.

Infolgedessen erhalten wir

$$\delta_\varrho \Phi_0 = \sum \int \Big[\left(\varrho + \frac{1}{8\pi} \triangle \varphi' \right) \delta \varphi' - \frac{1}{8\pi} (2\mathfrak{d}_{11} X \delta X + \ldots + (\mathfrak{d}_{12} + \mathfrak{d}_{21})(X \delta Y + Y \delta Z) - 2 (X \delta X + Y \delta Y + Z \delta Z)) \Big]_{h'} dk_h$$

und, nach ausgeführter teilweiser Integration des letzten Gliedes unter Rücksicht auf (38) und (41''),

$$\delta_\varrho \Phi_0 = -\frac{1}{8\pi} \sum \int (\triangle \varphi' \delta \varphi')_h dk_h. \qquad 47'')$$

Nun ist aber φ' die Potentialfunktion aller freien Ladungen, also gilt

$$\varphi' = \sum \int \frac{\varrho'_i \, dk_i}{r}, \quad \triangle \varphi' = -4\pi\varrho'$$

und, nach der Definition der Potentialfunktion auf S. 9,

$$\delta \varphi' = \sum \int \varrho_i' \, \delta \left(\frac{1}{r}\right) d k_i;$$

demgemäß wird schließlich

48) $$\delta_\varrho \Phi_0 = \delta \Phi = \tfrac{1}{2} \sum_h \sum_i \int \int \varrho_h' \varrho_i' \, \delta \left(\frac{1}{r}\right) d k_h \, d k_i,$$

worin $\delta(1/r)$ für jeden starren Körper in bekannter Weise durch dessen Verschiebungs- und Drehungskomponenten ausgedrückt werden kann. Weiter ist auch

48') $$\tfrac{1}{2} \sum_h \sum_i \int \int \varrho_h' \varrho_i' \frac{d k_h \, d k_i}{r} = \sum' \int \int \varrho_h' \varrho_i' \frac{d k_h \, d k_i}{r} = \Phi',$$

d. h. gleich dem oben durch (44'') definierten Potential der Wechselwirkung zwischen den freien Ladungen; zugleich ist die in (47'') ausgeführte Variation mit der in (44'''') vorgenommenen identisch, läßt nämlich die freien Dichten der Volumenelemente ungeändert.

Es gilt somit, wenn wir nunmehr die Variationen mit den Differentialen vertauschen, um anzudeuten, daß es sich um Änderungen handelt, die bei einer ausgeführten Bewegung wirklich eintreten:

48'') $$d \Phi = d_\varrho \Phi_0 = d_{\varrho'} \Phi' = - d' A_i;$$

die vollständige Änderung des Selbstpotentiales des Systemes ist also einerseits gleich der bei konstanten wahren Ladungen genommenen jener speziellen in (46') gegebenen Form Φ_0 desselben; sie ist aber auch gleich der bei konstanten freien Ladungen genommenen Variation des Wechselwirkungspotentiales Φ', und deshalb gleich der negativen Arbeit der inneren Kräfte.

Hieraus fogt, daß unsere Ausgangsformel (45) für Φ mit Kräften, die zwischen bloß influenzierten Dielektrica stattfinden, durchaus vereinbar ist.

Berücksichtigt man, daß, um die vorausgesetzten Lagenänderungen auszuführen, ohne das Gleichgewicht zu stören, in jedem Moment äußere Kräfte angebracht werden müssen, welche den inneren entgegengesetzt gleich sind, so erhält man für deren Arbeit $d'A_a$ den Wert

48''') $$d' A_a = - d' A_i = d \Phi.$$

Hieraus ergiebt sich, daß, wenn, wie es nach der Beobachtung scheint, bei dem betrachteten Vorgang Arbeit nicht noch in andere Formen, als in potentielle Energie, umgesetzt wird, das innere Potential Φ, wenigstens bis auf Glieder, die sich bei den oben vorausgesetzten Vorgängen nicht ändern, die elektrostatische Energie des betrachteten höchst allgemeinen Systemes darstellt. —

Die im Vorstehenden vorausgesetzte Verschiebung veranlaßt nun eine Änderung der Ladungen des elektrischen Systemes, und die Arbeit $\delta' A_a$ resp. $d' A_a$ läßt sich daher auch als der Arbeitsaufwand auffassen, **der erforderlich ist, um diese Veränderung zu bewirken.**

Um diesen Punkt noch weiter aufzuklären, knüpfen wir an die Formeln (48) und (48‴) an, wenden dieselben aber der Einfachheit halber auf nur **ein** Dielektricum ohne wahre Ladung und nur **ein** influenzloses System mit wahrer Ladung an. Es tritt dann an Stelle der Doppelsumme in (48) der Faktor 2, und wir erhalten

$$\delta_{\varrho'} \Phi' = \delta' A_a = \iint \varrho_i' \varrho_h' \, \delta \left(\frac{1}{r}\right) d\,k_i \, d\,k_h \,. \qquad 49)$$

Hierin beziehe sich der Index h auf das Dielektricum, der Index i auf das influenzierende System. In dem Dielektricum (h) ist eine wahre Ladung nicht vorhanden, also

$$\varrho_h' = \varrho_h'' = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right);$$

das influenzierende System (i) ist ein absoluter Isolator, also $\varrho_i' = \varrho_i$. Ferner schreiben wir, indem wir die Potentialfunktion

$$\varphi = \int \frac{\varrho_i \, d\,k_i}{r}$$

der wahren Ladung von (i) einführen, die Formel (49)

$$\delta' A_a = \int \varrho_h'' \, \delta_\varrho \varphi \, d\,k_h = -\int \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)_h \delta_\varrho \varphi \, d k_h \,,$$

woraus, da wir einen stetigen Übergang des Dielektricums in den leeren Raum angenommen haben, also in der Oberfläche $\alpha = \beta = \gamma = 0$ setzen müssen, durch teilweise Integration auch folgt:

$$\delta' A_a = \int \left(\alpha \frac{\partial\, \delta_\varrho \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial\, \delta_\varrho \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial\, \delta_\varrho \varphi}{\partial z}\right)_h d\,k_h \qquad 49')$$

oder

$$= \int \left[\alpha\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \beta\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \gamma\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right]_h d\,k_h \,.$$

Hierin bezeichnen $-\partial \varphi / \partial x$, $-\partial \varphi / \partial y$, $-\partial \varphi / \partial z$ die von der **wahren** Ladung herrührenden Kraftkomponenten, die wir vordem nicht gesondert eingeführt haben; man kann aber an ihre Stelle die Gesamtkomponenten

$$X = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z}$$

setzen, wenn man gleichzeitig die Variation δ_ϱ mit der Variation $\delta_{\varrho'}$

vertauscht. Denn die Unterschiede beider Größen sind wegen $\varphi' = \varphi + \varphi''$ die Komponenten, welche von den im betrachteten Körper influenzierten Momenten ausgehen, und diese ändern sich nicht bei einer Variation, welche die freien Ladungen, und somit diese Momente konstant läßt.

Wir erhalten sonach als definitives Resultat

$$\delta' A_a = -\int (\alpha\, \delta_{\varrho'} X + \beta\, \delta_{\varrho'} Y + \gamma\, \delta_{\varrho'} Z)\, d k_h, \tag{49''}$$

oder bei Beziehung auf die Volumeneinheit,

$$\delta' \alpha_a = -(\alpha\, \delta_{\varrho'} X + \beta\, \delta_{\varrho'} Y + \gamma\, \delta_{\varrho'} Z). \tag{49'''}$$

Es möge darauf aufmerksam gemacht werden, daß man ein durchaus abweichendes, falsches Resultat erhalten hätte, wenn man die Operation δ_ϱ an dem Ausdruck (46) für Φ, statt an dem vorstehend benutzten vorgenommen hätte. Denn jener ist unter den gemachten Voraussetzungen identisch mit

$$\Phi = \tfrac{1}{2} \int \varrho_i \varphi'\, d k_i,$$

worin

$$\varphi' = \int \frac{\varrho_h'' d k_h}{r} + \int \frac{\varrho_i\, d k_i}{r} = \varphi'' + \varphi$$

ist, würde also, da wegen des konstanten ϱ_i das Selbstpotential des Isolators konstant ist, liefern

$$\delta_\varrho \Phi = \tfrac{1}{2} \int \varrho_i\, \delta_\varrho \varphi''\, d k_i = \tfrac{1}{2} \int \varrho_i\, d k_i \int \left(\alpha\, \delta \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + \dots \right)_h d k_h$$

$$= \tfrac{1}{2} \int \left(\alpha\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \beta\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \gamma\, \delta_\varrho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right)_h d k_h,$$

und somit nur die Hälfte des oben erhaltenen Wertes (49'). —

Die Formel (49''') für die Influenzierungs- oder Elektrisierungsarbeit, welche sich ersichtlich sogleich von dem vorausgesetzten speziellen auf den allgemeinsten Fall übertragen läßt, gestattet mehrere wichtige Folgerungen.

Die Momente α, β, γ sind nach (43'') Funktionen von X, Y, Z, und zwar im allgemeinen von der Eigenschaft, daß, über einen Kreisprozeß summiert, die in (49'') angegebene Arbeit $\delta' A_a$ nicht verschwindet; ein solches Resultat würde aber nach dem allgemeinen Prinzip der Erhaltung der Energie verlangen, daß in dem System

eine Änderung einträte, welche den Aufwand (A_a) an Arbeit in sich enthielte, z. B. eine Temperaturänderung im Dielektricum. Da man dergleichen in dem hier vorausgesetzten Falle lineärer Abhängigkeit der Momente von den Kräften noch nicht beobachtet hat, so wird man annehmen dürfen, daß die Funktionen α, β, γ in Wahrheit denjenigen Bedingungen unterliegen, welche jenen Aufwand (A_a) zu Null machen; sie müssen demnach den Gleichungen

$$\frac{\partial \beta}{\partial Z} = \frac{\partial \gamma}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial X} = \frac{\partial \alpha}{\partial Z}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial Y} = \frac{\partial \beta}{\partial X} \tag{50}$$

genügen, welche darauf führen, daß α, β, γ die partiellen Differentialquotienten derselben Funktion der Komponenten X, Y, Z nach diesen Argumenten sind. Setzt man demgemäß

$$\alpha = -\frac{\partial f}{\partial X}, \quad \beta = -\frac{\partial f}{\partial Y}, \quad \gamma = -\frac{\partial f}{\partial Z}, \tag{50'}$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \delta' \alpha_a &= \delta f, \\ \delta' A_a &= \int \delta f \, dk = \delta F \end{aligned}\right\}, \tag{50''}$$

worin kurz $\int f \, dk = F$ gesetzt ist.

Die Funktion f könnte das Elektrisierungspotential der Volumeneinheit, F also dasjenige des ganzen influenzierten Körpers genannt werden. f hat für das spezielle Problem der Influenzierung eine gewisse Bedeutung und wird uns dabei weiter unten wieder begegnen. F ist sowohl von Φ, als von Φ' durchaus verschieden; das F definierende Integral ist über den influenzierten Körper allein erstreckt, die in Φ' vorkommenden Integrale sind über das influenzierte, wie das influenzierende System zu nehmen; Φ endlich ist durch ein Integral über den ganzen Raum gegeben. Ferner ist $\delta' A_a$ durch eine vollständige Variation von F resp. von Φ, dagegen durch eine partielle von Φ' bestimmt. —

Bisher ist ein spezieller Zusammenhang zwischen den Momenten α, β, γ und den Komponenten X, Y, Z nicht vorausgesetzt worden, die soeben erhaltenen Resultate besitzen also eine sehr allgemeine Bedeutung. Führen wir nun aber die speziellen Beziehungen (43'') ein, so ergiebt das System (50) die Bedingung [26])

$$\mathfrak{e}_{hk} = \mathfrak{e}_{kh}, \tag{51}$$

der nach (43''') auch entspricht

$$\mathfrak{d}_{hk} = \mathfrak{d}_{kh}; \tag{51'}$$

beide Formeln sind bei einer Reihe krystallinischer Medien gemäß

dem Bd. I, S. 137 Gesagten nach ihrer Symmetrie dadurch identisch erfüllt, daß bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems für $h \gtreqless k$ sowohl $\mathfrak{e}_{hk}$, als $\mathfrak{d}_{hk}$ verschwindet; gleiches gilt jederzeit für isotrope Körper.

Die Funktion f ist unter Voraussetzung von (43″) gegeben durch

51″) $$-2f = \mathfrak{e}_{11} X^2 + \mathfrak{e}_{22} Y^2 + \ldots + 2\mathfrak{e}_{12} XY,$$

was wegen (38′) und (43‴) sich umgestalten läßt in

51‴) $$+8\pi f = K^2 - (\mathfrak{d}_{11} X^2 + \mathfrak{d}_{22} Y^2 + \ldots + 2\mathfrak{d}_{12} XY),$$

oder wegen (42⁗) auch in

51⁗) $$8\pi(f + \mathfrak{f}) = K^2.$$

Da nach unserer Annahme die quadratische Form $\mathfrak{f}$ wesentlich positiv ist, und da $\mathfrak{d}_{11}$, $\mathfrak{d}_{22}$, $\mathfrak{d}_{33}$ größer als Eins sind, so ist nach den vorstehenden Formeln auch $-f$ wesentlich positiv, $+f$ somit wesentlich negativ.

Dies hängt damit zusammen, daß wir f bei verschwindenden elektrischen Kräften, d. h. also, wenn das influenzierende System im Unendlichen ist, gleich Null gesetzt haben. Da nämlich während der Heranführung an das influenzierte System dauernd anziehende Kräfte wirken, so ist die durch äußere Kräfte zu leistende Arbeit $\delta \alpha_a$ dauernd negativ, und somit auch der Endwert f des Elektrisierungspotentiales negativ.

Nach den in § 14 des I. Teiles entwickelten allgemeinen Gesetzen wird ein influenzierbarer Körper in einem elektrischen Felde sich dann im mechanischen Gleichgewicht befinden, wenn bei allen virtuellen Veränderungen $\delta' A_a$ oder δF gleich Null ist; er wird im stabilen Gleichgewicht sein, wenn F ein Minimum erreicht. Die Bedingung hierfür ist sehr leicht angebbar, wenn der influenzierte Körper so klein und so schwach dielektrisch ist, daß er homogen erregt wird, und seine Ladung das elektrische Feld nur unmerklich verändert; denn dann kann man in dem Ausdruck für F, resp. für f, den Komponenten X, Y, Z dieselben Werte geben, die sie bei Abwesenheit des influenzierten Körpers besitzen.

Wir kommen auf diese Aufgabe im Anfang des nächsten Paragraphen zurück. —

Schließlich sei noch bemerkt, daß bei Körpern, für welche, wie z. B. für isotrope Medien, die Koefficienten $\mathfrak{e}_{hk}$ resp. $\mathfrak{d}_{hk}$ für $k \gtreqless h$ nach Symmetrie verschwinden, dennoch die über einen Kreisprozeß summierte Influenzierungsarbeit (A_a) bei stärkeren elektrisierenden Kräften anscheinend nicht verschwindet. Es hängt dies damit zusammen, daß in jenen Fällen die Momente nicht nur keine lineären

Funktionen der Komponenten X, Y, Z sind, sondern auch von dem Änderungssinn derselben abhängen, also bei wachsender Feldstärke andere Größen besitzen, als bei abnehmender. Wir kommen auf diese, Hysteresis genannte Erscheinung gelegentlich der Besprechung der magnetischen Influenz zurück; da magnetische Kräfte von verhältnismäßig viel bedeutenderer Stärke hervorgebracht werden können, als elektrische, für die durch die Funkenentladungen, die bei gewissen Potentialgefällen eintreten, eine Grenze gegeben ist, so sind diese Erscheinungen im Gebiete des Magnetismus leichter und vollständiger zu studieren, als in dem der Elektricität.

§ 10. Hauptdielektricitätsaxen. Ein dielektrischer Krystall im homogenen Felde. Kräfte, die er erfährt und ausübt.

Wir haben schon S. 62 auf die Analogie hingewiesen, die zwischen dem Problem der Influenzierung eines Dielektricums und demjenigen der Strömung eines imponderabeln Fluidums innerhalb eines widerstehenden Mittels besteht; den Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ hier entsprechen dort die Strömungskomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, den Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ hier die Leitfähigkeitskonstanten λ_{hk} dort, während die X, Y, Z in beiden Fällen die Bedeutung der treibenden Kraftkomponenten besitzen. Nach den soeben erhaltenen Resultaten ist aber das Influenzproblem das speziellere, insofern rotatorische Qualitäten bei demselben nicht vorkommen. Infolge davon gewinnen hier die Resultate, die für diesen speziellen Fall auf S. 289 u. f. des I. Bandes abgeleitet sind, unmittelbare Anwendbarkeit.

Insbesondere giebt es für jeden homogenen Krystall ein Koordinatensystem, für welches die Konstanten $\mathfrak{e}_{hk}$ und $\mathfrak{d}_{hk}$ für $h \gtreqless k$ verschwinden. Diese Axen sind geometrisch definiert als die Hauptaxen der beiden gleichliegenden Ellipsoide, deren Gleichungen man erhält, wenn man in den Formeln $\mathfrak{f} =$ Const. oder $f =$ Const. die Komponenten X, Y, Z mit den Koordinaten x, y, z vertauscht; sie lauten, falls man die Konstanten speziell gleich Eins setzt,

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \mathfrak{d}_{11}x^2 + \mathfrak{d}_{22}y^2 + \mathfrak{d}_{33}z^2 + 2\mathfrak{d}_{23}yz + 2\mathfrak{d}_{31}zx + 2\mathfrak{d}_{12}xy, \\ 1 &= \mathfrak{e}_{11}x^2 + \mathfrak{e}_{22}y^2 + \mathfrak{e}_{33}z^2 + 2\mathfrak{e}_{23}yz + 2\mathfrak{e}_{31}zx + 2\mathfrak{e}_{12}xy. \end{aligned}\right\} \quad 52)$$

Das erste Ellipsoid kann man als das Dielektricitätsellipsoid des Mediums bezeichnen.

Das durch Vorstehendes eingeführte Hauptdielektricitätsaxensystem mag durch den oberen Indices ^{0} charakterisiert sein. Bei seiner Einführung nehmen, wenn wir noch kurz

52′) $$\mathfrak{d}_{hh}^0 = \mathfrak{d}_h, \quad \mathfrak{e}_{hh}^0 = \mathfrak{e}_h$$

setzen, die Formelsysteme (42) und (43″) die einfache Gestalt an:

52″) $$\begin{cases} \mathfrak{X}^0 = \mathfrak{d}_1 X^0, & \mathfrak{Y}^0 = \mathfrak{d}_2 Y^0, \quad \mathfrak{Z}^0 = \mathfrak{d}_3 Z^0, \\ \alpha^0 = \mathfrak{e}_1 X^0, & \beta^0 = \mathfrak{e}_2 Y^0, \quad \gamma^0 = \mathfrak{e}_3 Z^0, \end{cases}$$

welche in der S. 292, Bd. I, erörterten Weise die gegenseitige Lage der Vektoren $\mathfrak{K}$, resp. μ, und K mit Hilfe der Ellipsoide

52‴) $$\begin{cases} 1 = \mathfrak{d}_1 x^2 + \mathfrak{d}_2 y^2 + \mathfrak{d}_3 z^2, \\ 1 = \mathfrak{e}_1 x^2 + \mathfrak{e}_2 y^2 + \mathfrak{e}_3 z^2 \end{cases}$$

zu konstruieren gestatten. Zwischen den $\mathfrak{d}_h$ und $\mathfrak{e}_h$, welche durch (52‴) als die reciproken Axenquadrate der beiden Ellipsoide definiert sind, besteht die Beziehung

52⁗) $$\mathfrak{e}_h = \frac{\mathfrak{d}_h - 1}{4\pi}. \text{ —}$$

Diese Resultate geben uns die Mittel an die Hand, die am Ende des vorigen Paragraphen erwähnte Frage nach der Einstellung eines kleinen, schwach dielektrischen Körpers im elektrischen Felde zu beantworten. Es ist oben gezeigt, daß die stabile Gleichgewichtslage dadurch gegeben ist, daß sie die Funktion $-f$ innerhalb des Körpers zu einem Maximum macht. Führen wir das im Körper feste Hauptaxensystem ein, so ist

$$-2f = \mathfrak{e}_1 X^{0^2} + \mathfrak{e}_2 Y^{0^2} + \mathfrak{e}_3 Z^{0^2},$$

und dieser Ausdruck wird am größten sein, wenn einerseits der Körper sich an einem Orte größter Feldintensität K befindet, und wenn andererseits diejenige Axe, welche größtem $\mathfrak{e}_h$ entspricht, in die Richtung von K fällt. Daß dieses Resultat nicht allgemein gilt, sondern an die oben gemachten Voraussetzungen gebunden ist, wird sich weiter unten zeigen. —

Da sich die Polarisationen wie Kräfte transformieren, so erhält man auch sogleich aus dem System der Richtungscosinus

53)

	x^0	y^0	z^0
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

die folgenden Beziehungen zwischen den den beiden Koordinatensystemen entsprechenden Dielektricitätskonstanten

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{d}_{11} = \mathfrak{d}_1 \alpha_1^2 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2^2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3^2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{d}_{23} = \mathfrak{d}_1 \beta_1 \gamma_1 + \mathfrak{d}_2 \beta_2 \gamma_2 + \mathfrak{d}_3 \beta_3 \gamma_3 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad 53')$$

dem sich ein analoges für die $\mathfrak{e}_{hk}$ zuordnet. —

Gehen wir nunmehr noch etwas näher auf die Anwendungen der jetzt vollständig entwickelten Grundgleichungen für Dielektrica auf spezielle Fälle ein, so wird zunächst hervorzuheben sein, was die hier vorkommenden Probleme gegenüber dem allgemeinen, sie umfassenden, der Strömungen imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper, auszeichnet.

Dabei kommt vor allen Dingen in Betracht, daß, ähnlich wie in dem Bd. I, S. 557 u. f. behandelten Problem der Wärmeleitung, Flächen, längs deren die allgemeinen Grenzbedingungen (42') die normale Strömungskomponente — hier also $\mathfrak{N}$ — verschwinden lassen, nicht existieren. An der Oberfläche eines Dielektricums nach einem Leiter (k) hin bestimmt sich $\mathfrak{N}$ durch die wahre Flächendichte σ_k von dessen Ladung, ist also mit dieser indirekt gegeben; die Oberflächen der Konduktoren stellen daher Begrenzungen des dielektrischen Systemes dar, welche den Charakter von Eintrittsflächen der Strömung besitzen. Mit Ausnahme der von solchen eingeschlossenen, d. h. also von Konduktoren eingenommenen Räume, erstreckt sich aber die Strömung in unserem Falle über den ganzen unendlichen Raum, selbst soweit er von ponderabler Masse frei ist; dieser muß demgemäß auch jederzeit der Betrachtung unterworfen werden. Daraus folgt beiläufig, daß die Bd. I, S. 299 erörterte Methode, durch Abbildung ein krystallinisches Medium auf ein unkrystallinisches zu reduzieren, nur dann Vorteil bietet, wenn dasselbe den ganzen Raum zwischen den Konduktoren homogen erfüllt.

Die Untersuchung der Wirkung von Konduktoren — wenigstens von solchen, deren Dimensionen von der Größenordnung des für die Beobachtung in Betracht kommenden Bereiches sind — bietet wesentliches Interesse nur in einem homogenen isotropen Dielektricum und ist dafür bereits im Anfang von § 7 erledigt. In dem Falle, daß mehrere homogene Dielektrica nebeneinander vorhanden sind, genügt meist die Annahme geladener Isolatoren oder aber unendlich kleiner, punktförmiger Konduktoren, um das Charakteristische der eintretenden Influenzierungen zu übersehen. Sind nur zwei homogene isotrope Dielektrica (1) und (2) vorhanden, die durch eine Ebene ($z = 0$) getrennt sind, so bietet die Lösung dieser Aufgabe keinerlei Schwierigkeiten.

Sieht man von der Existenz einer wahren Ladung und einer elektromotorischen Kraft in der Zwischengrenze ab, läßt aber im Endlichen liegende wahre räumliche Ladungen von den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 in beiden Dielektrica zu, so gelten für die Potentialfunktionen φ'_1 und φ'_2 der scheinbaren Ladungen nach (42) bis (42″) die Bedingungen

54) $$\left\{\begin{array}{l} 4\pi\varrho_1 = -\mathfrak{d}_1 \triangle \varphi'_1 \text{ für } z > 0, \quad 4\pi\varrho_2 = -\mathfrak{d}_2 \triangle \varphi'_2 \text{ für } z < 0, \\ \mathfrak{d}_1 \overline{\frac{\partial \varphi'_1}{\partial z}} = \mathfrak{d}_2 \overline{\frac{\partial \varphi'_2}{\partial z}} \text{ und } \overline{\varphi'_1} = \overline{\varphi'_2} \text{ für } z = 0, \end{array}\right.$$

während φ'_1 und φ'_2 sich im Unendlichen verhalten müssen, wie die Potentialfunktionen endlicher, im Endlichen liegender Massen.

Allen diesen Bedingungen wird genügt, indem man für φ'_1 die Newton'sche Potentialfunktion sowohl der innerhalb (1) liegenden Verteilung $(\varrho_1/\mathfrak{d}_1)$, als auch einer in (2) liegenden Verteilung $(a_1\varrho_2/\mathfrak{d}_2)$, als auch endlich einer im Spiegelbild von (ϱ_1) bezüglich der Ebene $z = 0$ liegenden Verteilung $(b_1\varrho_1/\mathfrak{d}_1)$ setzt, worin a_1 und b_1 Konstanten bezeichnen; ebenso wird φ'_2 gleich der Newton'schen Potentialfunktion der Verteilung $(\varrho_2/\mathfrak{d}_2)$ in (2), sowie der Verteilungen $(a_2\varrho_1/\mathfrak{d}_1)$ und $(b_2\varrho_2/\mathfrak{d}_2)$ in (1). Die Konstanten bestimmen sich durch die Grenzbedingungen folgendermaßen

54′) $$\left\{\begin{array}{l} a_1 = \frac{2\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2}, \quad b_1 = \frac{\mathfrak{d}_1-\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2}, \\ a_2 = \frac{2\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_1}, \quad b_2 = \frac{\mathfrak{d}_2-\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_1}, \end{array}\right.$$

und sonach gilt

54″) $$\left\{\begin{array}{l} \varphi'_1 = \frac{1}{\mathfrak{d}_1}\int\frac{\varrho_1 dk_1}{r} + \frac{2}{\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2}\int\frac{\varrho_2 dk_2}{r} + \frac{\mathfrak{d}_1-\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1(\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2)}\int\frac{\varrho_1 dk_{12}}{r}, \\ \varphi'_2 = \frac{1}{\mathfrak{d}_2}\int\frac{\varrho_2 dk_2}{r} + \frac{2}{\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_1}\int\frac{\varrho_1 dk_1}{r} + \frac{\mathfrak{d}_2-\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2(\mathfrak{d}_2+\mathfrak{d}_1)}\int\frac{\varrho_2 dk_{21}}{r}; \end{array}\right.$$

hierin bezeichnet dk_{12} das innerhalb (2) gelegene Spiegelbild des Volumenelementes dk_1, und dk_{21} das innerhalb (1) gelegene Spiegelbild des Volumenelementes dk_2.

Ist nur eine punktförmige wahre Ladung e_1 in (1) vorhanden, so reduzieren sich diese Formeln auf

54‴) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{d}_1\varphi'_1 = \frac{e_1}{r} + \frac{\mathfrak{d}_1-\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2}\frac{e_1}{r'}, \\ \mathfrak{d}_2\varphi'_2 = \frac{2\mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_1+\mathfrak{d}_2}\frac{e_1'}{r}; \end{array}\right.$$

dabei bezeichnet r die Entfernung von e_1, und r' diejenige von dem Spiegelpunkt von e_1 in Bezug auf die Grenzebene $z = 0$.

Ist das eine der beiden Medien der leere Raum, so ist für dasselbe $\mathfrak{d} = 1$ zu setzen. Unendliches $\mathfrak{d}$ würde uns nach dem S. 66 Gesagten auf den Grenzfall eines Konduktors führen. —

Die für die praktische Anwendung wichtigsten speziellen Probleme sind diejenigen der Influenzierung eines in dem unendlichen Vakuum aufgestellten endlichen, isotropen oder krystallinischen Dielektricums durch eine unveränderlich gegebene wahre Verteilung; eine solche wird am einfachsten durch einen geladenen Isolator erhalten, oder durch ein System von Konduktoren von solcher Größe und in solcher Entfernung von dem Dielektricum, daß dessen Rückwirkung auf die Konduktoren außer Betracht bleiben kann. Besteht das Konduktorensystem aus zwei sehr großen und sehr entfernten parallelen Platten, welche auf sehr verschiedene Potentiale geladen sind, so ist, bevor das Dielektricum in den Zwischenraum eingeführt wird, die Potentialfunktion zwischen den beiden Platten lineär von der Koordinate normal zur Plattenebene abhängig, K also konstant, und somit das elektrische Feld homogen.

Wählen wir die dielektrischen Hauptaxen des in das Feld gebrachten homogenen krystallinischen Dielektricums zu Koordinatenaxen, so lauten die Hauptgleichungen für die Potentialfunktionen φ_i' und φ_a' im inneren und im äußeren Raum

$$\mathfrak{d}_1 \frac{\partial^2 \varphi_i'}{\partial x^2} + \mathfrak{d}_2 \frac{\partial^2 \varphi_i'}{\partial y^2} + \mathfrak{d}_3 \frac{\partial^2 \varphi_i'}{\partial z^2} = 0, \qquad \triangle \varphi_a' = 0; \tag{55}$$

in der Grenze muß gelten

$$\overline{\varphi_i'} = \overline{\varphi_a'} \tag{55'}$$

und

$$\mathfrak{d}_1 \overline{\frac{\partial \varphi_i'}{\partial x}} \cos(n,x) + \mathfrak{d}_2 \overline{\frac{\partial \varphi_i'}{\partial y}} \cos(n,y) + \mathfrak{d}_3 \overline{\frac{\partial \varphi_i'}{\partial z}} \cos(n,z) = \overline{\frac{\partial \varphi_a'}{\partial n}}, \tag{55''}$$

wobei die Normale auf beiden Seiten der letzten Gleichung in demselben Sinne gerechnet ist. Außerdem muß φ_a' in unendlicher Entfernung von dem krystallinischen Dielektricum die Form annehmen

$$(\varphi_a')_\infty = -(x\overline{X}_a + y\overline{Y}_a + z\overline{Z}_a), \tag{55'''}$$

worin $\overline{X}_a$, $\overline{Y}_a$, $\overline{Z}_a$ die Komponenten der elektrischen Kraft im Unendlichen bezeichnen.

Setzt man

$$\varphi_a' = \varphi_a'' - (x\overline{X}_a + y\overline{Y}_a + z\overline{Z}_a), \tag{55''''}$$

so hat hiernach φ_a'' die Bedeutung der Potentialfunktion der im Dielektricum influenzierten scheinbaren Ladung und muß sich im Unendlichen demgemäß verhalten.

Daß diese Bedingungen das Problem bestimmen, läßt sich in der wiederholt angewandten Weise leicht zeigen.

Da alle Gleichungen in φ_a' resp. φ_i' lineär sind, so kann man das allgemeine Problem in drei spezielle zerlegen, bei denen von den Konstanten $\overline{X}_a$, $\overline{Y}_a$, $\overline{Z}_a$ nur je eine von Null verschieden ist.

Die gestellte Aufgabe erledigt sich sehr einfach für eine homogene krystallinische Kugel, deren Radius mit r_1 bezeichnet werden mag, weil sich zeigt, daß eine solche unter den vorausgesetzten Umständen homogen erregt wird, und die Potentialfunktion einer derartigen Verteilung durch Kombination der Formeln (173′) und (168′) des I. Teiles leicht zu bilden ist.

Man kann nämlich allen Bedingungen des Problems genügen durch den Ansatz

$$56)\qquad -\varphi_i' = x X_i + y Y_i + z Z_i, \qquad -\varphi_a'' = \mathsf{A}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x} + \mathsf{B}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z},$$

worin X_i, Y_i, Z_i die konstanten elektrischen Kraftkomponenten im Innern der Kugel, $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ die influenzierten Gesamtmomente

$$\int \alpha_1\, dk_1, \qquad \int \beta_1\, dk_1, \qquad \int \gamma_1\, dk_1$$

bezeichnen, und r_0 die Entfernung vom Kugelcentrum ist.

Dabei wird speziell

$$56')\qquad X_i = \frac{3\overline{X}_a}{\mathfrak{d}_1 + 2}, \qquad Y_i = \frac{3\overline{Y}_a}{\mathfrak{d}_2 + 2}, \qquad Z_i = \frac{3\overline{Z}_a}{\mathfrak{d}_3 + 2},$$

$$56'')\qquad \mathsf{A} = \overline{X}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{\mathfrak{d}_1 + 2}, \qquad \mathsf{B} = \overline{Y}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{\mathfrak{d}_2 + 2}, \qquad \Gamma = \overline{Z}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{d}_3 - 1}{\mathfrak{d}_3 + 2}.$$

Die konstanten Momente der Volumeneinheit α, β, γ lauten nach (52′′) und (52′′′′)

$$56''')\qquad \alpha = \frac{3\overline{X}_a}{4\pi}\frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{\mathfrak{d}_1 + 2}, \qquad \beta = \frac{3\overline{Y}_a}{4\pi}\frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{\mathfrak{d}_2 + 2}, \qquad \gamma = \frac{3\overline{Z}_a}{4\pi}\frac{\mathfrak{d}_3 - 1}{\mathfrak{d}_3 + 2};$$

wenn auf jedes Volumenelement nur die Feldstärke, d. h. $\overline{X}_a$, $\overline{Y}_a$, $\overline{Z}_a$ wirkte, würden ihre Werte sein

$$\alpha_0 = \overline{X}_a \frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{4\pi}, \qquad \beta_0 = \overline{Y}_a \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{4\pi}, \qquad \gamma_0 = \overline{Z}_a \frac{\mathfrak{d}_3 - 1}{4\pi};$$

die Differenzen

$$\alpha_0 - \alpha = \frac{\overline{X}_a}{4\pi}\frac{(\mathfrak{d}_1 - 1)^2}{\mathfrak{d}_1 + 2} \text{ u. s. f.}$$

stellen somit die Schwächungen der dielektrischen Erregung infolge

der von der influenzierten Kugel selbst ausgehenden Wirkung, der sogenannten Selbstinfluenz, dar. Die Verhältnisse der Schwächungen zu den Idealwerten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ können als die relativen Schwächungen bezeichnet werden; ihre Werte hängen sehr wesentlich von der Gestalt des influenzierten Dielektricums ab und sind in unserem Falle einer Kugel

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0} = \frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{\mathfrak{d}_1 + 2}, \quad \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_0} = \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{\mathfrak{d}_2 + 2}, \quad \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_0} = \frac{\mathfrak{d}_3 - 1}{\mathfrak{d}_3 + 2}.$$

Befindet sich der dielektrische Körper nicht, wie eben vorausgesetzt, im leeren Raum, sondern in einer unendlichen, nicht leitenden Flüssigkeit von der Dielektricitätskonstante $\mathfrak{d}$, so ändert sich in den vorstehenden Bedingungen nur Gleichung (55''), deren rechte Seite den Faktor $\mathfrak{d}$ erhält. Da die Konstanten $\mathfrak{d}_h$ des Körpers außer in (55'') nur in der Formel (55) auftreten, deren rechte Seite gleich Null ist, so wird die neue Annahme nur die eine Folge haben, daß in allen Formeln die Verhältnisse $\mathfrak{d}_h/\mathfrak{d}$ an Stelle der $\mathfrak{d}_h$ selbst treten. Es ist leicht zu übersehen, wie hierdurch die, z. B. in dem Falle der Kugel oben mitgeteilten, Resultate modifiziert werden. —

Die Bedingung des stabilen mechanischen Gleichgewichtes eines influenzierten Dielektricums im elektrischen Felde ist nach S. 78 die, daß die in (50'') und (51'') definierte Funktion F ein Minimum wird. Ist der Körper homogen, und bezieht man ihn auf seine Hauptdielektricitätsaxen, so wird

$$F = -\tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{e}_1 X_i^2 + \mathfrak{e}_2 Y_i^2 + \mathfrak{e}_3 Z_i^2)\, dk, \tag{57}$$

wobei die $\mathfrak{e}_h$ die Hauptelektrisierungszahlen bezeichnen, und das Integral über das Volumen k des Körpers zu erstrecken ist.

Wenn das Feld im Innern des Körpers homogen ist, giebt dies bei Einführung der Hauptdielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_h$ einfacher

$$F = -\frac{k}{8\pi}\left((\mathfrak{d}_1 - 1)X_i^2 + (\mathfrak{d}_2 - 1)Y_i^2 + (\mathfrak{d}_3 - 1)Z_i^2\right), \tag{57'}$$

und für den eben durchgeführten Fall der Kugel erhält man

$$F = -\frac{3r_1^3}{2}\left[\frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{(\mathfrak{d}_1 + 2)^2}\overline{X}_a^2 + \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{(\mathfrak{d}_2 + 2)^2}\overline{Y}_a^2 + \frac{\mathfrak{d}_3 - 1}{(\mathfrak{d}_3 + 2)^2}\overline{Z}_a^2\right]. \tag{57''}$$

Da das elektrische Feld nach Annahme homogen ist, so sind alle seine Punkte gleichwertig; ist die Kugel in einer bestimmten Orientierung an einer Stelle im Gleichgewicht, so ist sie es auch an allen anderen. Es handelt sich somit hier allein um die Bestimmung der Orientierung, in welcher F seinen kleinsten Wert annimmt.

Nach Symmetrie muß bei derselben notwendig eine der Dielektricitätsaxen in die Richtung der Kraftlinien des Feldes fallen; die

gestellte Frage kommt also darauf hinaus, ob für $\overline{X_a}$ oder $\overline{Y_a}$ oder $\overline{Z_a}$ gleich $\overline{K_a}$, bei gleichzeitigem Verschwinden der beiden anderen Komponenten, die Klammer rechts ihren größten Wert annimmt. Dies geschieht aber offenbar, wenn der Faktor des größten Verhältnisses $(\mathfrak{d}_h - 1)/(\mathfrak{d}_h + 2)^2$ gleich $\overline{K_a}$ wird. Dies Verhältnis ist für die Grenzwerte $\mathfrak{d}_h = 1$ und $\mathfrak{d}_h = \infty$ selbst gleich Null und nimmt für $\mathfrak{d}_h = 4$ seinen größten Wert an; so lange also, wie in vielen Fällen der Praxis, alle drei Hauptkonstanten $\mathfrak{d}_h$ unterhalb 4 bleiben, ist die Axe des größten $\mathfrak{d}_h$ auch die Richtung, mit der im Falle des stabilen Gleichgewichtes die Kraftlinien des Feldes zusammenfallen.

Hiermit ist wenigstens in einem speziellen Falle das Problem des Gleichgewichtes streng gelöst, während oben nur eine Annäherung, gültig für den Fall wenig von Eins verschiedener $\mathfrak{d}_h$, aber allerdings für beliebig gestaltete Körper, erörtert worden war. —

Ist die Kugel in der ihr gegebenen Orientierung nicht im Gleichgewicht, so erfährt sie im homogenen elektrischen Felde nur Gesamtmomente, aber keine Gesamtkomponenten. Bezeichnet man, wie S. 6, durch $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ Drehungswinkel um die Koordinatenaxen, so werden die Momente Λ, M, N gegeben sein durch

$$57''') \qquad \Lambda = -\frac{\partial F}{\partial l}, \quad M = -\frac{\partial F}{\partial m}, \quad N = -\frac{\partial F}{\partial n},$$

denn es muß gelten

$$\Lambda \delta l + M \delta m + N \delta n = \delta' A_i = -\delta' A_a,$$

worin $\delta' A_i$, wie oben, die Arbeit der inneren Kräfte des Systemes bezeichnet.

Ist die Kugel um die Hauptaxe Z drehbar befestigt, und liegt die elektrische Kraft $\overline{K_a}$ in der XY-Ebene um den Winkel $-\chi$ gegen die X-Axe geneigt, so wird

$$F = -\frac{3 r_1^3}{2} \overline{K_a^2} \left[\frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{(\mathfrak{d}_1 + 2)^2} \cos^2 \chi + \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{(\mathfrak{d}_2 + 2)^2} \sin^2 \chi\right].$$

Die Differentiation nach dem Drehungswinkel n ist hier äquivalent mit der nach $+\chi$, daher wird

$$57'''') \qquad N = -\frac{\partial F}{\partial \chi} = -3 r_1^3 \overline{K_a^2} \cos \chi \sin \chi \left[\frac{\mathfrak{d}_1 - 1}{(\mathfrak{d}_1 + 2)^2} - \frac{\mathfrak{d}_2 - 1}{(\mathfrak{d}_2 + 2)^2}\right];$$

sind, wie häufig, die Hauptdielektricitätskonstanten nur wenig verschieden, so kann man $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ in den Nennern der Ausdrücke in der Klammer durch einen mittleren Wert $\mathfrak{d}$ ersetzen und erhält so

$$N = -3 r_1^3 \overline{K_a^2} \sin 2\chi \frac{\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2}{2(\mathfrak{d} + 2)^2}.$$

Die Messung von N, die am genauesten durch die Beobachtung der Schwingungsdauer der Kugel im elektrischen Felde ausführbar ist, würde also — die Kenntnis des mittleren Wertes $\mathfrak{d}$ vorausgesetzt — eine Bestimmung der Differenz $\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2$ liefern. —

Für isotrope Körper sind alle $\mathfrak{d}_h$ gleich; jene erfahren also bei kugeliger Gestalt im homogenen Felde weder Komponenten, noch Momente. Dagegen wirken zwar keine Komponenten, aber doch im allgemeinen Momente auf sie, wenn sie andere, als kugelige Gestalt besitzen. Hiervon überzeugt man sich sehr leicht in dem Falle, daß der influenzierte Körper die Gestalt eines gegen seine Länge sehr dünnen Cylinders hat.

Legen wir die Z-Axe in die Richtung seiner Länge, so ist die elektrische Z-Komponente Z_i in seinem Innern merklich gleich $\overline{Z_a}$, denn die durch sie influenzierte Ladung giebt auf innere Punkte unter den gemachten Voraussetzungen nur eine verschwindende Wirkung. Dagegen ist die Komponente $P_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$ von K_i durch die Wirkung der influenzierten Ladung kleiner, als

$$P_a = \sqrt{\overline{X_a^2} + \overline{Y_a^2}}\,;$$

es mag etwa sein

$$(X_i^2 + Y_i^2) = \mathfrak{b}'(\overline{X_a^2} + \overline{Y_a^2}),$$

worin $\mathfrak{b}'$ einen echten Bruch bezeichnet, der mit dem Ort variieren wird.

Setzt man diese Resultate in (57) ein und schreibt

$$\int \mathfrak{b}' dk = \mathfrak{b} k,$$

wo auch $\mathfrak{b}$ ein echter Bruch ist, so ergiebt sich, da nach Annahme $\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e}$ ist,

$$F = -\tfrac{1}{2} k \mathfrak{e} \left(\mathfrak{b}\overline{X_a^2} + \mathfrak{b}\overline{Y_a^2} + \overline{Z_a^2}\right);$$

der Cylinder verhält sich also analog einem kleinen, sehr schwach dielektrischen Körper von den Elektrisierungszahlen

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{e}_3 = \mathfrak{e},$$

und ist nach dem S. 80 Gefundenen im stabilen Gleichgewicht, wenn die Richtung der äußeren Kraft $\overline{K_a}$ in seine Längsaxe fällt. —

Die Messung der Kräfte, welche von dem influenzierten Körper auf den influenzierenden ausgeübt werden und aus dem Potential Φ' nach S. 68 bestimmbar sind, kann bei Körpern, welche, wie z. B. manche Krystalle, die Anwendung keiner der früher auf S. 48 und 52 erwähnten Methoden gestatten, zur Bestimmung der Dielektricitätskonstanten benutzt werden. Bei einer Krystallkugel wird

diese Kraft ihren größten resp. kleinsten Wert annehmen, wenn die Axe größter resp. kleinster Dielektricitätskonstante in die Richtung der Kraftlinien fällt.

Gestattet das Material die Herstellung von Platten verschiedener Orientierung, welche gegen ihre Dicke große seitliche Ausdehnung besitzen, so läßt sich zu gleichem Ziele auch die Kondensatormethode verwenden. Es ist hierzu nur nötig, die Grundflächen der Platten mit einem Leiter (Stanniol) zu bekleiden und die Kapazität des einen Blattes zu bestimmen, während das andere zur Erde abgeleitet ist.

Da in diesem Falle wahre Ladungen innerhalb des Dielektricums nicht vorhanden sind, so lautet die Hauptgleichung für φ', falls die X-Axe in die Normale der Platte gelegt wird, einfach $\partial^2\varphi'/\partial x^2 = 0$ und wird integriert durch

$$\varphi' = a + bx,$$

worin a und b Konstanten bezeichnen. Ist die Schicht $x = 0$ zur Erde abgeleitet, die Schicht $x = H$ auf das Potential P geladen, so wird

58) $$\varphi' = \frac{Px}{H}.$$

Die Dichte der wahren Ladung, welche sich auf den beiden Grundflächen befindet, lautet nach (42')

58') $$\sigma = \pm \frac{\mathfrak{d}_{11} P}{4\pi H},$$

und daher ist, falls Q die Fläche der Belegung bezeichnet, der Betrag der Ladung

58'') $$E = \pm \frac{\mathfrak{d}_{11} P Q}{4\pi H}.$$

$\mathfrak{d}_{11}$ hängt nach (53') von der Orientierung der Platte gegen die Hauptdielektricitätsaxen des Krystalles ab; ist die Lage der letzteren nach Symmetrie von vornherein angebbar, so genügt die Beobachtung an drei Platten zur vollständigen Bestimmung des dielektrischen Verhaltens der untersuchten Substanz. —

Die Beobachtungen nach den vorstehend skizzierten Methoden werden in der Praxis wesentlich erschwert durch den Umstand, daß alle Dielektrica, vielleicht mit Ausnahme der Gase, spurenweise innere und außerdem meist ziemlich erhebliche oberflächliche Leitfähigkeit besitzen, von denen die letztere wahrscheinlich eine sekundäre, auf einer adhärierenden Flüssigkeitshaut beruhende Erscheinung ist. Mit der inneren Leitung steht vielleicht die That-

sache in Verbindung, daß Dielektrica, welche mit geladenen Konduktoren in Berührung stehen, von diesen allmählich Ladungen annehmen und, wenn darauf die Konduktoren kurze Zeit hindurch abgeleitet und sodann wieder isoliert werden, allmählich wieder an dieselben abgeben. Erscheinungen dieser Art werden unter dem Namen Rückstandsbildungen zusammengefaßt.

Um die störenden Wirkungen dieser Art zu verkleinern, kann man die Beobachtungen zum Zwecke der Bestimmung von Dielektricitätskonstanten mit äußerst kurz andauernden Ladungen ausführen. Weiter kann man, um wenigstens den Übergang der Elektricität von den Konduktoren auf die untersuchten Dielektrica zu vermindern, zwischen beiden eine dünne Luftschicht lassen, deren Einfluß natürlich bei der Berechnung der Beobachtungen zu berücksichtigen ist und auch sehr leicht berücksichtigt werden kann.

Andere Methoden, welche bestimmt sind, die Dielektricitätskonstanten und die für die Leitungserscheinungen charakteristischen Parameter gesondert zu finden, werden wir später erwähnen.

Hier sei nur noch die allgemeine Bemerkung angeschlossen, daß, weil in Wirklichkeit die bisher betrachteten Dielektrica nur einen idealen Grenzfall darstellen, und weil alle in der Praxis zu jenen gerechneten Körper die oben entwickelten Eigenschaften nur zeigen, wenn wir schnell genug operieren, um die Störungen durch Leitung auf kleine Beträge herabzudrücken, es nur konsequent ist, auch die in den ersten Paragraphen dieses Kapitels behandelten Leiter als einen zweiten idealen Grenzfall zu betrachten, und demgemäß anzunehmen, daß alle Körper bei hinreichend schnellen Veränderungen die für die Dielektrica, bei hinreichend langsamen die für die Leiter charakteristischen Erscheinungen zu zeigen vermögen. Wir kommen auf diese höchst folgenreiche Auffassung weiter unten zurück. —

Es ist im Vorstehenden von dem speziellen Problem der experimentellen Bestimmung der Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ etwas ausführlicher gehandelt, weil dasselbe eine, ähnliche Aufgaben weit übersteigende, prinzipielle Bedeutung dadurch erhalten hat, daß eine moderne Theorie die optischen Erscheinungen als elektrische Vorgänge auffaßt und speziell die optischen Brechungsindices eines Mediums mit dessen Dielektricitätskonstanten in Verbindung bringt. Die Bestimmungen der letzteren, welche nach den vorstehend beschriebenen Methoden, insbesondere an gewissen Gasen und gewissen Krystallen, ausgeführt sind, gehören zu den kräftigsten Stützen jener Theorie, auf die wir später ausführlich eingehen werden.

§ 11. Die Arbeit der elektrischen Kräfte bei einer Deformation der Dielektrica; Zurückführung der elektrischen Fernwirkungen auf Spannungen im Dielektricum.

Ebenso, wie im vorigen Paragraphen das Potential Φ eines elektrischen Systems auf sich selbst benutzt wurde, um in dem Falle, daß das System aus starren und durch den leeren Raum getrennten Körpern besteht, die bei einer Lagenänderung von den inneren Kräften geleistete Arbeit zu berechnen, kann man auch die bei Deformationen des Systems aufgewandte Arbeit durch eine geeignete Variation des Potentiales, d. h. nach S. 74 der Energie, ableiten.[27])

Dabei ist es vorteilhaft, wie oben Konduktoren und absolute Isolatoren als Grenzfälle der Dielektrica anzusehen, an Stelle der Unstetigkeitsflächen im Dielektricum überall stetige Übergänge und demgemäß auch an Stelle flächenhafter Ladungen überall räumliche zu setzen. Unter diesen Voraussetzungen gewinnen die auf S. 70 abgeleiteten Werte des inneren Potentiales Anwendbarkeit.

Die Deformation denken wir uns bewirkt durch die Erteilung von Verschiebungen mit den Komponenten δu, δv, δw nach den Koordinatenaxen an jedes ponderable Massenelement, das in seinem Anfangszustand bereits durch eine Verrückung mit den Komponenten u, v, w aus seiner natürlichen Lage, — d. h. aus derjenigen, die es innerhalb des gleichförmig temperierten und äußeren Kräften nicht ausgesetzten Systemes einnehmen würde, — abgelenkt sein kann.

Von diesen Verrückungskomponenten δu, δv, δw nehmen wir an, daß sie im ganzen Raume stetig sind und im Unendlichen verschwinden. Mit ihnen treten in dem ganzen Medium Drehungen auf, deren Komponenten $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ nach den Koordinatenaxen nach S. 212, Bd. I, gegeben sind durch

$$59)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta' l &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta w}{\partial y} - \frac{\partial\, \delta v}{\partial z}\right), \quad \delta' m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta u}{\partial z} - \frac{\partial\, \delta w}{\partial x}\right), \\ \delta' n &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \delta v}{\partial x} - \frac{\partial\, \delta u}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Infolge der vorgenommenen Verrückungen ändert sich an jedem Punkte des Raumes im allgemeinen die wahre elektrische Dichte ϱ der Ladung, das System der Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ und die Potentialfunktion φ' der freien Ladungen.

Von diesen Größen bietet die Dichte ϱ die geringsten Schwierigkeiten. In das an der Stelle x, y, z im Raume festliegende Volumen-

element treten bei den Verrückungen Ladungen ein, die zuvor in einem Nachbarelement lagen; daraus folgt, wie auf S. 265, Bd. I, abgeleitet,

$$\delta \varrho = - \left(\frac{\partial \varrho \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho \delta w}{\partial z} \right). \qquad 59')$$

Komplizierter stellt sich die Änderung der $\mathfrak{d}_{hk}$ dar. Man kann sie zunächst in zwei verschiedenartige Teile zerlegen, die als geometrische und physikalische Variation bezeichnet werden mögen und gesonderte Betrachtung gestatten.

Von der letzteren, welche darauf beruht, daß durch die Deformation das Dielektricum zu einem neuen Körper mit anderen physikalischen Eigenschaften wird, soll hier zunächst abgesehen, also ein Medium vorausgesetzt werden, dessen Konstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ sich durch Deformationen nicht merklich ändern. Wir werden sehen, daß es Medien giebt, die diese Eigenschaft fast streng besitzen, und daß sie angenähert möglicherweise bei allen Körpern vorhanden ist, daß der Einfluß der Deformation also vielleicht überhaupt als höherer Ordnung betrachtet werden kann. Die Teilung der Betrachtung dient daher nicht nur der Übersichtlichkeit der etwas komplizierten Resultate, sondern ist im Wesen der Sache begründet. Auf die im allgemeinsten Fall notwendige Ergänzung wollen wir später ausführlich eingehen.

Die geometrische Variation, welche eine bloße Folge der Dislokation ohne Deformation innerhalb des Körpers ist, zerfällt nach ihrer Herkunft wiederum in zwei Teile: die Wirkung der Parallelverschiebung einerseits, ($\delta_1 \mathfrak{d}_{hk}$), die Wirkung der Drehung andererseits ($\delta_2 \mathfrak{d}_{hk}$).

Der erste Teil bestimmt sich durch die Erwägung, daß sich nach der Verschiebung an einem Punkte x, y, z Teile befinden, die vorher an der Stelle $x - \delta u$, $y - \delta v$, $z - \delta w$ lagen; hieraus folgt sofort für alle h und k

$$\delta_1 \mathfrak{d}_{hk} = - \left(\frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \mathfrak{d}_{hk}}{\partial z} \delta w \right). \qquad 59'')$$

Der zweite Teil wird durch die Überlegung gefunden, daß nach der Deformation die Hauptdielektricitätsaxen eine andere Lage haben, wie zuvor, und daß demgemäß die Dielektricitätskonstanten auf ein gegen jene anders, als zuvor, orientiertes Koordinatensystem zu beziehen sind.

Aus den Formeln (53') erhalten wir zunächst

$$\delta_2 \mathfrak{d}_{11} = 2 (\mathfrak{d}_1 \alpha_1 \delta \alpha_1 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2 \delta \alpha_2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3 \delta \alpha_3),$$

. . . .

$$\delta_2 \mathfrak{d}_{23} = \mathfrak{d}_1 (\beta_1 \delta \gamma_1 + \gamma_1 \delta \beta_1) + \mathfrak{d}_2 (\beta_2 \delta \gamma_2 + \gamma_2 \delta \beta_2) + \mathfrak{d}_3 (\beta_3 \delta \gamma_3 + \gamma_3 \delta \beta_3),$$

. . . .

Hierin sind die Variationen der Richtungscosinus $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ nunmehr durch die Drehungswinkel $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ auszudrücken; die dazu erforderlichen Formeln gewinnt man aus dem System (116″) Bd. I, S. 94, wenn man berücksichtigt, daß das Koordinatensystem A, B, C dort dem System X^0, Y^0, Z^0 hier entspricht.

Man erhält so

$$\delta \alpha_1 = \gamma_1 \delta' m - \beta_1 \delta' n, \quad \delta \beta_1 = \alpha_1 \delta' n - \gamma_1 \delta' l, \quad \delta \gamma_1 = \beta_1 \delta' l - \alpha_1 \delta' m,$$

. . . .

und beim Einsetzen in das obige System

$$\delta_2 \mathfrak{d}_{11} = 2 [(\mathfrak{d}_1 \alpha_1 \gamma_1 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2 \gamma_2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3 \gamma_3) \delta' m - (\mathfrak{d}_1 \alpha_1 \beta_1 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2 \beta_2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3 \beta_3) \delta' n],$$

. . . .

$$\delta_2 \mathfrak{d}_{23} = (\mathfrak{d}_1 \beta_1^2 + \mathfrak{d}_2 \beta_2^2 + \mathfrak{d}_3 \beta_3^2) \delta' l - (\mathfrak{d}_1 \alpha_1 \beta_1 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2 \beta_2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3 \beta_3) \delta' m - (\mathfrak{d}_1 \gamma_1^2 + \mathfrak{d}_2 \gamma_2^2 + \mathfrak{d}_3 \gamma_3^2) \delta' l + (\mathfrak{d}_1 \alpha_1 \gamma_1 + \mathfrak{d}_2 \alpha_2 \gamma_2 + \mathfrak{d}_3 \alpha_3 \gamma_3) \delta' n,$$

. . . .

Berücksichtigt man aber die Gleichungen (53′), so kann man diese Resultate einfacher schreiben:

59‴)
$$\begin{cases} \delta_2 \mathfrak{d}_{11} = 2(\mathfrak{d}_{13} \delta' m - \mathfrak{d}_{12} \delta' n), \quad \delta_2 \mathfrak{d}_{22} = 2(\mathfrak{d}_{21} \delta' n - \mathfrak{d}_{23} \delta' l), \\ \qquad \delta_2 \mathfrak{d}_{33} = 2(\mathfrak{d}_{32} \delta' l - \mathfrak{d}_{31} \delta' m). \\ \delta_2 \mathfrak{d}_{23} = (\mathfrak{d}_{22} - \mathfrak{d}_{33}) \delta' l - \mathfrak{d}_{12} \delta' m + \mathfrak{d}_{13} \delta' n, \\ \delta_2 \mathfrak{d}_{31} = (\mathfrak{d}_{33} - \mathfrak{d}_{11}) \delta' m - \mathfrak{d}_{23} \delta' n + \mathfrak{d}_{21} \delta' l, \\ \delta_2 \mathfrak{d}_{12} = (\mathfrak{d}_{11} - \mathfrak{d}_{22}) \delta' n - \mathfrak{d}_{31} \delta' l + \mathfrak{d}_{32} \delta' m. \end{cases}$$

Was endlich die Variation der Potentialfunktion φ' angeht, so ist dieselbe sehr kompliziert; man kann ihre Ausführung indessen gänzlich umgehen, wenn man für Φ die spezielle Form (46′)

$$\Phi_0 = \int \left[\varrho \varphi' - \frac{1}{8\pi} (X \mathfrak{X} + Y \mathfrak{Y} + Z \mathfrak{Z}) \right] dk$$

benutzt, die man nach (45⁗) kurz

$$\Phi_0 = \int (\varrho \varphi' - \mathfrak{f}) \, dk$$

schreiben kann, weil von dieser S. 70 nachgewiesen ist, daß ihre Änderung bei einer Variation von φ' allein bei konstantem ϱ und $\mathfrak{d}_{hk}$ verschwindet.

Es wird sonach

60)
$$\delta \Phi = \delta_{\varphi'} \Phi_0 = \int (\varphi' \delta \varrho - \delta_{\varphi'} \mathfrak{f}) \, dk,$$

wobei der Index φ' wie früher bezeichnet, daß bei der Variation φ' ungeändert bleiben soll.

Benutzt man zunächst nur den Wert (59′) für $\delta\varrho$ und integriert das erste Glied des obigen Integrales durch Teile, wobei das entstehende Flächenintegral über die unendliche Kugel verschwindet, so erhält man, indem man zugleich die Variation $\delta_{\varphi'}\mathfrak{f}$ ausführt:

$$\left.\begin{aligned}\delta\Phi = -\int\Big[&\varrho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\\ &+\frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_{11}}\delta\mathfrak{d}_{11} + \frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_{22}}\delta\mathfrak{d}_{22} + \dots + \frac{\partial\mathfrak{f}}{\partial\mathfrak{d}_{12}}\delta\mathfrak{d}_{12}\Big]dk\end{aligned}\right\}\quad 60')$$

oder wegen des Wertes (42‴) von $\mathfrak{f}$ auch

$$\left.\begin{aligned}\delta\Phi = -\int\Big[&\varrho(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\\ &+\frac{1}{8\pi}\left(X^2\delta\mathfrak{d}_{11} + Y^2\delta\mathfrak{d}_{22} + \dots + 2XY\delta\mathfrak{d}_{12}\right)\Big]dk.\end{aligned}\right\}\quad 60'')$$

In diesem Ausdruck ist nun

$$\delta\mathfrak{d}_{hk} = \delta_1\mathfrak{d}_{hk} + \delta_2\mathfrak{d}_{hk}$$

zu setzen, wobei die Werte der Glieder rechts aus (59″) und (59‴) zu entnehmen sind.

Bildet man unter dem Integral (60″) zunächst den Faktor von δu, der mit U bezeichnet werden mag, so erhält man dafür

$$U = \varrho X - \frac{1}{8\pi}\left(X^2\frac{\partial\mathfrak{d}_{11}}{\partial x} + Y^2\frac{\partial\mathfrak{d}_{22}}{\partial x} + \dots + 2XY\frac{\partial\mathfrak{d}_{12}}{\partial x}\right);$$

die Klammer rechts läßt sich durch die Einführung von $\mathfrak{f}$ einfach abkürzen und unter Benutzung der früheren Bezeichnung schreiben

$$U = \varrho X - \frac{\partial_{\varphi'}\mathfrak{f}}{\partial x},\quad V = \varrho Y - \frac{\partial_{\varphi'}\mathfrak{f}}{\partial y},\quad W = \varrho Z - \frac{\partial_{\varphi'}\mathfrak{f}}{\partial z},\qquad 60''')$$

wobei mit V und W die U entsprechenden Faktoren von δv und δw bezeichnet sind.

Der Faktor von δl in dem Integral (60″) möge mit L bezeichnet werden; sein Wert ergiebt sich zunächst gleich

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{4\pi}\left[-Y^2\mathfrak{d}_{23} + Z^2\mathfrak{d}_{32} + YZ(\mathfrak{d}_{22} - \mathfrak{d}_{33}) + ZX\mathfrak{d}_{21} - XY\mathfrak{d}_{31}\right],\\ &= \frac{1}{4\pi}\left[Z(X\mathfrak{d}_{21} + Y\mathfrak{d}_{22} + Z\mathfrak{d}_{23}) - Y(X\mathfrak{d}_{31} + Y\mathfrak{d}_{32} + Z\mathfrak{d}_{33})\right].\end{aligned}$$

Benutzt man hierin die Werte (42) der Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so erhält man

$$L = \frac{1}{4\pi}(Z\mathfrak{Y} - Y\mathfrak{Z}),\quad M = \frac{1}{4\pi}(X\mathfrak{Z} - Z\mathfrak{X}),\quad N = \frac{1}{4\pi}(Y\mathfrak{X} - X\mathfrak{Y}),\quad 60'''')$$

worin M und N die L entsprechenden Faktoren von $\delta' m$ und $\delta' n$ bezeichnen.

Setzt man diese Werte voraus, so ist hiernach $\delta\Phi$ in der Form

60'''') $$\delta\Phi = -\int (U\delta u + V\delta v + W\delta w + L\delta' l + M\delta' m + N\delta' n)\,dk$$

erhalten. Der Ausdruck unter dem Integral stimmt formal mit der rechten Seite von Formel (2'') überein; es stehen die U, V, W an Stelle von Kraftkomponenten, die L, M, N an Stelle von Drehungsmomenten, welche auf die Volumeneinheit ausgeübt werden; sie dürfen indessen nicht damit identifiziert werden, weil die $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ nicht von den δu, δv, δw unabhängig sind.

Integriert man die in $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ multiplizierten Glieder durch Teile, so gewinnt man, da wiederum die auf die unendlich ferne Grenze bezüglichen Terme verschwinden, die definitive Form

61) $$\begin{cases} \delta\Phi = -\int\Big[\Big(U - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big)\Big)\delta u + \Big(V - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\Big)\Big)\delta v \\ \qquad + \Big(W - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\Big)\Big)\delta w\Big]\,dk. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$-\delta\Phi = \delta' A_i,$$

d. h. gleich der Arbeit der inneren Kräfte des Systemes, welche, wenn man die auf die Volumeneinheit bezogenen Komponenten jener Kräfte Ξ', H', Z' nennt, sich schreiben läßt:

61') $$\delta' A_i = -\delta\Phi = \int (\Xi'\delta u + H'\delta v + Z'\delta w)\,dk.$$

Vergleicht man diese Formel mit (61), so ergeben sich die Werte der Komponenten Ξ', H', Z' wie folgt:

61'') $$\begin{cases} \Xi' = U - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\Big), \\ H' = V - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\Big), \\ Z' = W - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big). \end{cases}$$

Setzt man hierin die Werte von U, V, W, L, M, N aus (60''') und (60''''), und darin den von ϱ aus (42') ein, so erhält man

$$\Xi' = \frac{1}{4\pi} X\Big(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\Big) - \frac{\partial \tau \mathfrak{f}}{\partial x}$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X} Z - \mathfrak{Z} X) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Y} X - \mathfrak{X} Y),$$

. . . .

Nun folgt aus der Definition von $\mathfrak{f}$, falls der Index $\mathfrak{d}$ bedeutet, daß die $\mathfrak{d}_{hk}$ bei der Differentiation konstant bleiben sollen,

$$\frac{\partial_{\mathfrak{d}} \mathfrak{f}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{X}\frac{\partial X}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \mathfrak{Z}\frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

oder, da die Kräfte X, Y, Z eine Potentialfunktion besitzen, auch

$$\frac{\partial_{\mathfrak{d}} \mathfrak{f}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{X}\frac{\partial X}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial X}{\partial y} + \mathfrak{Z}\frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Addiert man diese Gleichung zu der Formel für Ξ', so resultiert nach einfachen Umstellungen und unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{\partial_{\varphi} \mathfrak{f}}{\partial x} + \frac{\partial_{\mathfrak{d}} \mathfrak{f}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x}$$

der vollständige Differentialquotient von $\mathfrak{f}$ nach x ist,

$$\Xi' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{X}X) - \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}Y + \mathfrak{Y}X) + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}Z + \mathfrak{Z}X); \qquad 61''')$$

analoge Gestalt gewinnen die Werte von H' und Z'.

Diese Resultate lassen sich in der Form schreiben

$$\left.\begin{aligned}
-\Xi' &= \frac{\partial A'_x}{\partial x} + \frac{\partial A'_y}{\partial y} + \frac{\partial A'_z}{\partial z},\\
-H' &= \frac{\partial B'_x}{\partial x} + \frac{\partial B'_y}{\partial y} + \frac{\partial B'_z}{\partial z},\\
-Z' &= \frac{\partial C'_x}{\partial x} + \frac{\partial C'_y}{\partial y} + \frac{\partial C'_z}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \qquad 62)$$

worin die $A'_x, \ldots A'_y$ nachstehende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
A'_x &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X - \mathfrak{Y}Y - \mathfrak{Z}Z), & B'_z = C'_y &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{Z}Y + \mathfrak{Y}Z),\\
B'_y &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{Y}Y - \mathfrak{Z}Z - \mathfrak{X}X), & C'_x = A'_z &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}Z + \mathfrak{Z}X),\\
C'_z &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{Z}Z - \mathfrak{X}X - \mathfrak{Y}Y), & A'_y = B'_x &= -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{Y}X + \mathfrak{X}Y).
\end{aligned}\right\} \qquad 62')$$

Vergleicht man diese Formeln mit System (14) auf S. 224, Bd. I, so erkennt man, daß sie die Komponenten Ξ', H', Z' auf **Druckkomponenten** oder **Spannungen** von der Größe $A'_x, \ldots A'_y$ zurückführen, die von dem Deformationszustand unabhängig sind und sich allein durch die Werte der elektrischen Kräfte X, Y, Z und der Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ an der betrachteten Stelle bestimmen. Wir nennen sie weiterhin kurz die **Maxwell'schen Spannungen.**

Für isotrope Körper wird einfacher[28])

$$
62'')\quad \begin{cases} \Xi' = U = \varrho X - \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial x}, \\ H' = V = \varrho Y - \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial y}, \\ Z' = W = \varrho Z - \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 + Z^2)\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial z}, \end{cases}
$$

und

$$
62''')\quad \begin{cases} A'_x = -\frac{\mathfrak{d}}{8\pi}(X^2 - Y^2 - Z^2), \quad B'_z = C'_y = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi} YZ, \\ B'_y = -\frac{\mathfrak{d}}{8\pi}(Y^2 - Z^2 - X^2), \quad C'_x = A'_z = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi} ZX, \\ C'_z = -\frac{\mathfrak{d}}{8\pi}(Z^2 - X^2 - Y^2), \quad A'_y = B'_x = -\frac{\mathfrak{d}}{4\pi} XY. \end{cases}
$$

Die Formeln (62'') zeigen, daß in einem homogenen isotropen Medium Kräfte Ξ', H', Z' nur dort wirken, wo wahre Ladungen liegen; ein Resultat, das nach dem früheren nicht überraschen kann.

Wählt man als X-Axe die Normale auf der Fläche $\varphi' =$ Const. durch die Stelle x, y, z, wodurch $Y = Z = 0$, $X = N = -\partial\varphi'/\partial n$ wird, so ergiebt das System (62''')

$$
A'_x = -\mathfrak{d} N^2/8\pi, \quad B'_y = C'_z = +\mathfrak{d} N^2/8\pi, \quad B'_z = C'_x = A'_y = 0;
$$

hieraus folgt, daß eine unendlich enge Kraftröhre sich mit der Kraft $\mathfrak{d} N^2/8\pi$ zu verkürzen und mit einer gleichen Kraft in allen Querrichtungen auszudehnen strebt. Da die Oberfläche eines Konduktors innerhalb des Dielektricums eine Fläche $\varphi' =$ Const. darstellt, so ist $-\mathfrak{d} N^2/8\pi$ auch die normale Druckkraft D_e, welche deren Flächeneinheit erfährt. Dies Resultat, welches sich unter Rücksicht auf (39'') auch $\frac{1}{2}\sigma' N$ schreiben läßt, ist in vollkommener Übereinstimmung mit dem S. 47 auf ganz anderem Wege Erhaltenen. —

Von den erhaltenen allgemeinen Formeln machen wir nun die schon oben angekündigte Anwendung auf die sehr dünne Grenzschicht, in der wir den Übergang zwischen zwei verschiedenen Körpern (h) und (i) des Systemes stetig, statt wie in Wirklichkeit anscheinend sprungweise, stattfindend angenommen haben.

Konstruieren wir einen sehr niedrigen Cylinder, der ein Element der Grenzschicht dicht umschließt, so sind die auf dies Element wirkenden elektrischen Kräfte nach dem Vorstehenden mit den Drucken gegen seine Grundflächen und seine Mantelfläche äquivalent. Läßt man mit der Dicke der Grenzschicht die Höhe des cylindrischen Elementes unendlich klein gegen seine Querdimensionen werden, so wird auch der Anteil, den die Drucke gegen

die Mantelfläche zu den auf das Element wirkenden Kräften liefern, unendlich klein gegen die von den Grundflächen herrührenden; denn, wenn man von elektromotorischen Kräften absieht, bleiben die X, Y, Z, im anderen Falle wenigstens ihre Integrale über die Dicke der Grenzschicht — auch bei unstetigen Übergängen des dielektrischen Verhaltens endlich, und gleiches gilt nach (62‴) von den Druckkomponenten.

Bezeichnet man sonach mit $(A_n')_h$, $(A_n')_i$, ... die in den Medien (h) resp. (i) wirkenden Drucke gegen Flächenelemente, die durch ihre äußeren Normalen charakterisiert sind, so hat die auf die Flächeneinheit der Grenze (h, i) wirkende elektrische Kraft die Komponenten

$$\Xi_{hi}' = \overline{(A_n')_h} + \overline{(A_n')_i}, \quad H_{hi}' = \overline{(B_n')_h} + \overline{(B_n')_i}, \quad Z_{hi}' = \overline{(C_n')_h} + \overline{(C_n')_i}. \tag{63}$$

In dem Falle, daß die Körper (h) und (i) homogen isotrop sind und die Grenzfläche (h, i) eine wahre Ladung nicht trägt, nehmen diese Werte wegen der in der Grenzfläche für die Normal- und die Tangentialkomponenten der elektrischen Kraft geltenden Bedingungen (40) und (40′) hervorragend einfache Formen an.

Wir legen die Z-Axe in die äußere Normale des Dielektricums (h) und erhalten so, da $\overline{X}_h = \overline{X}_i$, $\overline{Y}_h = \overline{Y}_i$, $\mathfrak{d}_h \overline{Z}_h = \mathfrak{d}_i \overline{Z}_i$ ist,

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{(A_n')_h} + \overline{(A_n')_i} = \overline{(A_z')_h} - \overline{(A_z')_i} = 0, \\
&\overline{(B_n')_h} + \overline{(B_n')_i} = \overline{(B_z')_h} - \overline{(B_z')_i} = 0, \\
&\overline{(C_n')_h} + \overline{(C_n')_i} = \overline{(C_z')_h} - \overline{(C_z')_i} \\
&\quad = -\frac{1}{8\pi}\left[\mathfrak{d}_h(\overline{Z_h^2} - \overline{X_h^2} - \overline{Y_h^2}) - \mathfrak{d}_i(\overline{Z_i^2} - \overline{X_i^2} - \overline{Y_i^2})\right];
\end{aligned}\right\} \tag{63'}$$

hieraus folgt, daß das in (62‴) enthaltene System von Druckkomponenten gegen die Grenzfläche zweier isotropen Dielektrica (h) und (i) eine normal von (h) zu (i) wirkende Resultierende von der Größe

$$N_{hi}' = -\frac{1}{8\pi}\left[\mathfrak{d}_h(2\overline{N_h^2} - \overline{K_h^2}) - \mathfrak{d}_i(2\overline{N_i^2} - \overline{K_i^2})\right] \tag{63''}$$

ergiebt, worin, wie früher,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = K^2$$

gesetzt ist, und N_h die Komponente von K_h nach der Normalen n_h bezeichnet. Berücksichtigt man nochmals die Bedingungen (40) und (40′), so kann man jener Druckkraft auch die unsymmetrische Form geben

$$N_{hi}' = +\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}_h - \mathfrak{d}_i)\left[\overline{K_h^2} + \frac{\mathfrak{d}_h - \mathfrak{d}_i}{\mathfrak{d}_i}\overline{N_h^2}\right]. \tag{63'''}$$

An der Grenze zwischen zwei krystallinischen Dielektrica

gestalten sich die Verhältnisse minder einfach; dort gilt nach (40') und (42'), falls wir wieder die Z-Axe mit der Normalen n_h auf dem betrachteten Element zusammenfallen lassen, unter den obigen Voraussetzungen

$$X_h = X_i, \quad Y_h = Y_i, \quad \mathfrak{Z}_h = \mathfrak{Z}_i,$$

und daher wird

$$63'''')\quad \begin{cases} (A'_n)_h + (A'_n)_i = -\frac{1}{8\pi}(X_h Z_h - X_i Z_i), \\ (B'_n)_h + (B'_n)_i = -\frac{1}{8\pi}(Y_h Z_n - Y_i Z_i), \\ (C'_n)_h + (C'_n)_i = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{Z}_h(Z_h - Z_i) - X_h(\mathfrak{X}_h - \mathfrak{X}_i) - Y_h(\mathfrak{Y}_h - \mathfrak{Y}_i)); \end{cases}$$

die tangentialen Druckkomponenten verschwinden also in diesem Falle nicht.

Die soeben angestellten Überlegungen ergeben nur die Summen der Druckkomponenten, die auf beide sich berührende Oberflächenelemente der Dielektrica (h) und (i) wirken. Um die Anteile zu bestimmen, welche die Oberflächenelemente von (h) und von (i) einzeln erfahren, genügt die bisherige Methode nicht. Es scheint am naturgemäßesten, sie dadurch abzuleiten, daß man zwischen beiden Dielektrica eine sehr dünne Schicht des leeren (oder des lufterfüllten) Raumes eingefügt denkt und die Drucke, welche hier in den beiden Grenzen wirken, auch für den Fall gültig annimmt, daß die Körper (h) und (i) sich berühren. In der Summe über die beiden Seiten der Grenzfläche (h, i) fallen dann die auf den leeren Raum bezüglichen Glieder heraus. Für isotrope Medien werden die so gebildeten Werte aus (63') bis (63''') erhalten, indem man entweder $\mathfrak{d}_i$ oder $\mathfrak{d}_h$ mit Eins vertauscht.

Praktische Bedeutung gewinnen diese Resultate nur in seltenen Fällen; es gehört hierzu z. B. das Problem einer influenzierten Krystallkugel innerhalb einer sie nicht benetzenden Flüssigkeit. —

Die vorstehend abgeleiteten Werte der Spannungen innerhalb eines Dielektricums sind, wie schon bemerkt, im allgemeinen nicht die vollständigen, sondern müssen noch durch Anteile ergänzt werden, welche die Veränderung der physikalischen Eigenschaften des Dielektricums infolge der Deformation in Rechnung ziehen. Diese Anteile sind aber ersichtlich zu vernachlässigen bei Flüssigkeiten, die als inkompressibel zu betrachten sind, und bei denen daher auch, wie leicht erkennbar, eine Deformation das physikalische Verhalten nicht verändern kann. Hier sind also die Ausdrücke (62''') als die vollständigen Werte der dielektrischen Druckkomponenten

aufzufassen; ist die Flüssigkeit homogen und, wie in Wirklichkeit stets, ohne wahre Ladung, so ist überdies $\mathfrak{d}$ vom Orte unabhängig, ϱ gleich Null, und demgemäß

$$\Xi' = H' = Z' = 0\,,$$

gleichviel ob und wie φ' innerhalb der Flüssigkeit variiert. Die gesamten, auf eine inkompressible homogene Flüssigkeit wirkenden dielektrischen Spannungen zerstören sich also im Innern und bewirken nur in der Grenze zwischen zwei Flüssigkeiten (h) und (i) eine normale Druckkraft von der in (63‴) angegebenen Größe.

Diese Resultate lassen sich auf die Zwischengrenzen einer tropfbaren und einer gasförmigen Flüssigkeit, trotz der starken Kompressibilität der letzteren, übertragen, weil für alle Gase bei mäßigen Drucken $\mathfrak{d}$ nur sehr wenig von Eins verschieden ist; natürlich gelten sie auch für den leeren Raum, dessen $\mathfrak{d}$ streng gleich Eins ist. An der Grenze einer tropfbaren Flüssigkeit nach der Luft oder dem leeren Raum hin wird demgemäß eine nach außen gerichtete Druckkraft von der Größe

$$N' = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d} - 1)\left(\overline{K^2} + (\mathfrak{d} - 1)\overline{N^2}\right) \tag{64}$$

wirken, wobei $\mathfrak{d}$, K und N sich auf die Flüssigkeit beziehen.

Diese Drucke N' sind von der Art der auf S. 239 u. f. des I. Bandes eingeführten Grenzdrucke p_{hi} und bei hydrostatischen Problemen ebenso in Rechnung zu ziehen, wie es von jenen gezeigt ist.

Einer der einfachsten Fälle ist der eines **U**-förmigen Rohres von hinreichend großem Querschnitt, welches eine schwere dielektrische Flüssigkeit enthält, deren beide Oberflächen als nahezu eben angesehen werden können.

Bringt man das eine Ende zwischen die vertikalen parallelen Platten eines geladenen Kondensators, so kann man trotz der dielektrischen Erregung der Substanz des Rohres und seines Inhaltes im mittleren Teile der Flüssigkeitsoberfläche das elektrische Feld als angenähert homogen, die elektrische Kraft K als nahe eben so gerichtet annehmen, wie v o r der Einführung des Rohres; ihre Größe wird allerdings geändert sein. Da die Oberfläche der Flüssigkeit horizontal liegt, so ist hier $N = 0$, also nach (64) die Druckkraft gegen die Flüssigkeitsoberfläche

$$N' = \frac{\mathfrak{d} - 1}{8\pi}\overline{K^2}\,; \tag{64'}$$

sie wirkt in der Richtung nach außen, die Flüssigkeit wird, ihr folgend, daher so lange steigen, bis der entstehende hydrostatische Druck den dielektrischen kompensiert. Die Beobachtung der Steig-

höhe gestattet nach dem Gesagten, falls $\overline{K}$ bekannt ist, eine angenäherte Bestimmung der Dielekricitätskonstanten der Flüssigkeit.

Liegen die Kondensatorplatten horizontal, die Kraftlinien des Feldes also vertikal, so ist $N = \overline{K}$, und daher

$$N' = \frac{\mathfrak{d}}{8\pi}(\mathfrak{d} - 1)\overline{K}^2. \tag{64''}$$

Ist die Flüssigkeitsoberfläche innerhalb des elektrischen Feldes merklich gekrümmt, so ist N' nicht konstant, und die beobachtbaren Erscheinungen stellen sich dar als eine Wirkung dielektrischer Veränderungen der kapillaren Oberflächenspannung. —

Wir gehen nun zur Ableitung der Ergänzungen über, deren die oben abgeleiteten Resultate in dem Falle bedürfen, daß das dielektrische Verhalten der Substanz durch Deformationen in merklicher Weise beeinflußt wird. Ob dieselben an den Erscheinungen einen merklichen Anteil haben, ist noch nicht zuverlässig festgestellt.

Unsere Aufgabe ist die Ableitung der auf S. 91 erwähnten physikalischen Variation $\delta_3 \mathfrak{d}_{hk}$ der Dielektricitätskonstanten, welche sich im vorausgesetzten allgemeinen Falle mit den beiden geometrischen Variationen $\delta_1 \mathfrak{d}_{hk}$ und $\delta_2 \mathfrak{d}_{hk}$ verbindet und den Einfluß der Deformationen auf die $\mathfrak{d}_{hk}$ enthält.[29])

Die Deformation eines Volumenelementes ist nach Bd. I, S. 213 vollständig bestimmt durch die sechs Deformationsgrößen

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$
$$x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

worin die u, v, w ebenso, wie im Eingang dieses Paragraphen, die Komponenten der Verrückung an der Stelle x, y, z bezeichnen. Die $x_x, \ldots x_y$ werden als unendlich kleine Größen betrachtet; versteht man also weiter unter $\mathfrak{d}'_{hk}$ den Wert der Dielektricitätskonstante im Normalzustand, nämlich bei verschwindenden Deformationen, so ist ihr allgemeiner Betrag $\mathfrak{d}_{hk}$ gegeben durch

$$\mathfrak{d}_{hk} = \mathfrak{d}'_{hk} + \mathfrak{d}^{(1)}_{hk} x_x + \mathfrak{d}^{(2)}_{hk} y_y + \ldots + \mathfrak{d}^{(6)}_{hk} x_y, \tag{65}$$

worin die $\mathfrak{d}^{(i)}_{hk}$ Konstanten bezeichnen.

Hieraus folgt dann sogleich

$$\delta_3 \mathfrak{d}_{hk} = \mathfrak{d}^{(1)}_{hk} \delta x_x + \mathfrak{d}^{(2)}_{hk} \delta y + \ldots + \mathfrak{d}^{(6)}_{hk} \delta x_y,$$

oder ausführlich geschrieben

$$\delta_3 \mathfrak{d}_{hk} = \mathfrak{d}_{hk}^{(1)} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \mathfrak{d}_{hk}^{(2)} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \ldots + \mathfrak{d}_{hk}^{(6)} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right). \qquad 65')$$

Diese Werte sind neben den früheren geometrischen Anteilen $\delta_1 \mathfrak{d}_{hk}$ und $\delta_2 \mathfrak{d}_{hk}$ in die Formel (60') einzusetzen; das Resultat ist ähnlich, wie das durch $\delta_2 \mathfrak{d}_{hk}$ gelieferte, mit Hilfe einer teilweisen Integration so umzuformen, daß alle unter dem Raumintegral bleibenden Glieder in δu, δv oder δw multipliziert auftreten.

Jedes einzelne Glied

$$\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{d}_{hk}} \delta_3 \mathfrak{d}_{hk} = \mathfrak{f}_{hk} \delta_3 \mathfrak{d}_{hk},$$

in welchem $\mathfrak{f}_{hk}$ eine Abkürzung für einen der Ausdrücke $X^2/8\pi, \ldots 2XY/8\pi$ ist, liefert, auf diese Weise behandelt, den folgenden Wert

$$- \left(\frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(1)})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(6)})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(5)})}{\partial z} \right) \delta u$$
$$- \left(\frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(6)})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(2)})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(4)})}{\partial z} \right) \delta v$$
$$- \left(\frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(5)})}{\partial x} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(4)})}{\partial y} + \frac{\partial (\mathfrak{f}_{hk} \mathfrak{d}_{hk}^{(3)})}{\partial z} \right) \delta w.$$

Die sämtlichen in δu, δv, δw multiplizierten Glieder zusammengenommen geben dann die Anteile zu den Gesamtkomponenten Ξ, H, Z, welche durch Berücksichtigung der Abhängigkeit der $\mathfrak{d}_{hk}$ von den Deformationsgrößen zu den früheren Werten Ξ', H', Z' hinzukommen. Sie besitzen schon von selbst die Formen (62), welche die Auffassung der körperlichen Kraftkomponenten Ξ', H' Z' als die Resultate von Druckkomponenten $A'_x, \ldots A'_y$ ermöglichte, und wir erhalten daher ohne weiteres, indem wir die Werte der $\mathfrak{f}_{hk}$ einsetzen, für die Ergänzungsdrucke folgendes Formelsystem:

$$\left.\begin{array}{l} A''_x = \frac{1}{8\pi} \left(X^2 \mathfrak{d}_{11}^{(1)} + Y^2 \mathfrak{d}_{22}^{(1)} + \ldots + 2XY \mathfrak{d}_{12}^{(1)} \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B''_z = C''_y = \frac{1}{8\pi} \left(X^2 \mathfrak{d}_{11}^{(4)} + Y^2 \mathfrak{d}_{22}^{(4)} + \ldots + 2XY \mathfrak{d}_{12}^{(4)} \right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad 65'')$$

Diese Ausdrücke haben im wesentlichen dieselbe Natur, wie die oben erhaltenen Maxwell'schen Spannungen $A'_x, \ldots A'_y$ in (62'), insofern sie auch homogen vom zweiten Grade in den Kraftkomponenten X, Y, Z sind; sie sind aber allgemeiner als jene, insofern

sie sechsunddreißig statt nur sechs Konstanten enthalten. Wie man diese komplizierten Werte für die verschiedenen Krystallgruppen spezialisiert und auf spezielle Probleme anwendet, wird später gezeigt werden, wo auch die verschiedenartigen mit diesen Spannungen $A_x'', \ldots A_y''$ im inneren Zusammenhang stehenden nicht elektrischen Vorgänge Behandlung finden werden.

Hier möge nur bemerkt werden, daß für isotrope Medien die Formeln (65″) die folgende Gestalt annehmen

65‴) $$A_x'' = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}^{(1)}K^2 + \mathfrak{d}^{(2)}X^2),\quad B_z'' = C_y'' = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{d}^{(2)}YZ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

worin $\mathfrak{d}^{(1)}$ und $\mathfrak{d}^{(2)}$ Konstanten bezeichnen. Kombiniert man diese Werte mit (62‴), so erhält man[30]) als die vollständigen dielektrischen Drucke $A_x = A_x' + A_x'', \ldots A_y = A_y' + A_y''$:

65⁗) $$\begin{cases} A_x = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)})K^2 - (2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})X^2\right), \\ B_y = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)})K^2 - (2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})Y^2\right), \\ C_z = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)})K^2 - (2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})Z^2\right), \\ B_z = C_y = -\frac{1}{8\pi}(2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})YZ, \\ C_x = A_z = -\frac{1}{8\pi}(2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})ZX, \\ A_y = B_x = -\frac{1}{8\pi}(2\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})XY. \end{cases}$$

Aus ihnen berechnen sich dann die Komponenten der vollständigen äquivalenten körperlichen Kräfte nach dem (62) entsprechenden Schema

$$\Xi = -\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right),$$
$$H = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right),$$
$$Z = -\left(\frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}\right). —$$

An die hiermit abgeschlossene Bestimmung der allgemeinsten Ausdrücke für die in einem elektrischen System stattfindenden Kräfte schließen wir noch eine allgemeine Bemerkung.

Im Effekt ist es selbstverständlich vollständig gleichwertig, ob wir jene inneren Kräfte als körperliche auffassen, also in den

durch Ξ, H, Z gegebenen Gesamtkomponenten führen, oder ob wir sie durch die äquivalenten Spannungen $A_x, \ldots A_y$ ausdrücken. Will man sich dagegen vom Mechanismus des Vorganges eine Vorstellung bilden, so geben die beiden Darstellungen zwei fundamental verschiedene Auffassungen an die Hand, die kurz als die Hypothesen der Fernwirkung und der Nahewirkung unterschieden werden können; zwischen diesen beiden Extremen kann man vermittelnde Auffasssungen einschalten, indem man einen Teil der Ξ, H, Z als körperliche Kräfte beläßt, den anderen in Druckkräfte auflöst.

Wir haben uns von speziellen Hypothesen über den Mechanismus der elektrischen Erscheinungen bisher konsequent frei gehalten und wollen diesem Grundsatz auch ferner folgen. Doch mag beiläufig auf die Konsequenzen jener beiden extremen Auffassungen in dem speziellen Falle von zwei geladenen und innerhalb einer unendlichen inkompressibeln Flüssigkeit oder im leeren Raum befindlichen Konduktoren hingewiesen werden.

Nach der Fernwirkungshypothese ist an der Wechselwirkung zwischen den Konduktoren das Zwischenmedium direkt nicht beteiligt; die Kräfte spielen sich vielmehr ausschließlich zwischen den an der Oberfläche der Leiter befindlichen wahren und scheinbaren Ladungen ab, deren letztere von der Substanz der Flüssigkeit abhängt. Nach der Nahewirkungshypothese ist umgekehrt das Zwischenmedium der eigentliche Träger der Wechselwirkung; jeder Konduktor besitzt in dem sogenannten elektrisierten Zustande nur die Fähigkeit, auf eine uns unbekannte Weise in dem Zwischenmedium einen Spannungszustand zu erregen, und zwar direkt in der anliegenden Schicht, und indirekt, nämlich durch Fortpflanzung von Volumen zu Volumen, auch in den ferneren Teilen. Dieser Spannungszustand, der unter sonst gleichen Umständen in verschiedenen Flüssigkeiten verschieden ist, äußert sich in Druckkräften gegen die Oberfläche der Konduktoren und bewirkt auf diese Weise die Kräfte, welche jene erleiden.

Eine experimentelle Entscheidung zwischen den beiden Anschauungen ist natürlich nicht möglich, da beide nur verschiedene Deutungen derselben Gleichungen repräsentieren; doch gestatten gewisse, später zu behandelnde Erscheinungen eine leichtere und anschaulichere Auffassung im Sinne der Nahewirkungshypothese, die demgemäß neuerdings überwiegend bevorzugt wird.

§ 12. Thermodynamische Eigenschaften der Dielektrica. Die freie Energie eines dielektrischen acentrischen Krystalles.

Wir haben im Vorstehenden die Erregung der Dielektrica ausschließlich durch Influenz bewirkt gedacht; es giebt aber zu gleichem Ziele noch andere Wege, deren Betrachtung den Gegenstand der folgenden Abschnitte bilden soll.

Wir knüpfen dabei zunächst an die Beobachtung an, daß Krystalle von gewissen speziellen Symmetrieeigenschaften bei Deformation und bei Erwärmung elektrische Wirkungen üben, welche den oben beschriebenen durchaus analog sind, und welche daher ebenso auf die Erregung elektrischer Momente α, β, γ in den einzelnen Volumenelementen zurückgeführt werden dürfen, wie jene. Diese Erscheinungen werden, ebenso wie die Influenzierung der Dielektrica, in Praxi kompliziert durch die Beteiligung einer mehr oder weniger starken, aber nie ganz fehlenden oberflächlichen Leitungsfähigkeit, welche bewirkt, daß die Oberflächenschicht der erregten Dielektrica nach den für Leiter geltenden Gesetzen sekundär influenziert wird; die in ihr mit größerer oder geringerer Geschwindigkeit auftretende elektrische Verteilung superponiert sich in ihrer Wirkung derjenigen der inneren Massen und kompensiert letztere unter Umständen vollständig. Diese Komplikation tritt mit besonderer Stärke bei der thermischen Erregung auf, weil die Herstellung einer Temperaturänderung viel mehr Zeit verlangt, als diejenige einer Änderung des elektrischen Feldes oder einer Deformation, und bei ihr also die Möglichkeit der vollkommenen Ausbildung jener Oberflächenladung in viel höherem Maße gegeben ist. Auch die innere Leitfähigkeit der Krystalle kann die Erscheinung komplizieren; bei irgend merklicher Größe verhindert sie ihr Auftreten überhaupt.

Wenn man diese sekundären Erscheinungen aber durch geeignete theoretische Überlegungen von dem Hauptphänomen sondert, so gelangt man zu der Vorstellung, daß die Erregung gewisser dielektrischer Krystalle durch Deformation und Erwärmung ein vollkommen umkehrbarer Vorgang ist, in dem Sinne, daß die Erregung durch die absolut gleiche, aber gegensinnige Aufwendung von Wärme und Arbeit rückgängig gemacht werden kann, durch welche sie bewirkt war.

Wir können demgemäß auf sie die allgemeinen Sätze der mechanischen Wärmetheorie anwenden, die sich auf umkehrbare Vorgänge beziehen, und die wir in § 5 des III. Teiles abgeleitet haben. Ins-

besondere können wir, wie schon bei dem einfacheren Problem der Thermo-Elasticität, welches in Teil III, § 6 behandelt ist, von jener thermodynamischen Funktion Gebrauch machen, die wir dort als freie Energie oder thermodynamisches Potential bei konstanter Temperatur bezeichnet haben.

Wir bezeichnen wiederum die auf die Volumeneinheit bezogene freie Energie mit ξ_1 und verstehen unter $a, b, c, \ldots$ die für das mechanische und elektrische Verhalten charakteristischen Unabhängigen, welche so gewählt sein mögen, daß die bei einer Zustandsänderung der Volumeneinheit zuzuführende äußere Arbeit

$$\delta' \alpha_1 = A_a \delta a + A_b \delta b + \ldots \ldots, \tag{66)}$$

also von der gleichzeitigen Temperaturänderung δT unabhängig ist. Dann gilt nach Bd. I, S. 521

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial a} = A_a, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial b} = A_b, \ldots, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial T} = -\eta_1, \tag{66')}$$

worin η_1 die Entropie der Volumeneinheit bezeichnet; ferner ist

$$T \delta \eta_1 = \delta \omega_1 \tag{66'')}$$

die der Volumeneinheit mitzuteilende Wärmemenge und, wenn ϱ_p die Dichte der ponderabeln Masse bezeichnet,

$$\frac{\delta \omega_1}{\varrho_p \delta T} = \Gamma \tag{66''')}$$

die spezifische Wärme des Vorganges, beide in mechanischem Maße ausgedrückt; endlich ist

$$\varepsilon_1' = \xi_1 + \eta_1 T \tag{66'''')}$$

die innere Energie der Volumeneinheit, d. h. ihre gesamte Energie abzüglich der lebendigen Kraft ihrer sichtbaren Bewegung, welche wir übrigens hier gleich Null setzen wollen.

Um die Fundamentalformeln auf unser Problem anzuwenden, berücksichtigen wir, daß nach der Gleichung (34) in Bd. I, S. 525 die Arbeit $\delta' a_d$ der elastischen Deformation

$$\delta' \alpha_d = -(\Xi_x \delta x_x + H_y \delta y_y + \ldots + \Xi_y \delta x_y) \tag{67)}$$

ist, worin $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ die gesamten inneren Druckkomponenten darstellen, während die Arbeit $\delta \alpha_e$ der Elektrisierung nach (49''')

$$\delta' \alpha_e = -(\alpha \delta X + \beta \delta Y + \gamma \delta Z) \tag{67')}$$

lautet, worin α, β, γ die elektrischen Momente der Volumeneinheit bedeuten.

Hieraus folgt, daß die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ und die Komponenten X, Y, Z der elektrischen Kraft ein System von Unab-

hängigen bilden, welche das mechanisch-elektrische Verhalten der Volumeneinheit in der oben von $a, b, c \dots$ vorausgesetzten Weise bestimmen. Wir können demgemäß aus (66') sogleich ableiten:

$$67'')\quad \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_x} = \Xi_x, \quad -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial y_y} = H_y, \dots, \quad -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_y} = \Xi_y, \\ -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial X} = \alpha, \quad -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial Y} = \beta, \quad -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial Z} = \gamma, \quad -\dfrac{\partial \xi_1}{\partial T} = \eta_1. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen liefern eine Reihe von Reciprocitätssätzen durch Elimination der Funktion ξ_1, z. B.

$$68)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial X} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial x_x}, \quad \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial Y} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x_x}, \quad \dfrac{\partial H_y}{\partial X} = \dfrac{\partial \alpha}{\partial y_y}, \dots \\ \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial T} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x_x}, \quad \dfrac{\partial H_y}{\partial T} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial y_y}, \dots \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial T} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial X}, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial T} = \dfrac{\partial \eta_1}{\partial Y}, \dots \end{array} \right.$$

Die letzten beiden Reihen führen für den Zuwachs von η_1 auf den folgenden Wert:

$$68')\quad \left\{ \begin{array}{l} d\eta_1 = \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial T} dx_x + \dots + \dfrac{\partial \Xi_y}{\partial T} dx_y \\ \qquad + \dfrac{\partial \alpha}{\partial T} dX + \dfrac{\partial \beta}{\partial T} dY + \dfrac{\partial \gamma}{\partial T} dZ + \dfrac{\partial \eta_1}{\partial T} dT, \end{array} \right.$$

woraus für die spezifische Wärme Γ bei konstanter Deformation und konstanter elektrischer Kraft folgt

$$68'')\qquad \Gamma = \frac{T}{\varrho_p} \frac{\partial \eta_1}{\partial T} = -\frac{T}{\varrho_p} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial T^2}.$$

Weitere Reciprocitätssätze werden in großer Zahl durch Betrachtung zweiter Differentialquotienten geliefert. So folgt aus (68'') das Formelsystem

$$68''')\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{T} \dfrac{\partial \varrho_p \Gamma}{\partial x_x} = \dfrac{\partial^2 \Xi_x}{\partial T^2}, \quad \dfrac{1}{T} \dfrac{\partial \varrho_p \Gamma}{\partial y_y} = \dfrac{\partial^2 H_y}{\partial T^2}, \dots. \\ \dfrac{1}{T} \dfrac{\partial \varrho_p \Gamma}{\partial X} = \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}, \quad \dfrac{1}{T} \dfrac{\partial \varrho_p \Gamma}{\partial Y} = \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial T^2}, \dots. \end{array} \right.$$

welches merkwürdige Beziehungen zwischen der spezifischen Wärme der Volumeneinheit $\varrho_p \Gamma$ und den elastischen Drucken, wie den spezifischen elektrischen Momenten ausspricht. —

Findet die Veränderung von einem beliebigen Anfangszustande aus statt, der durch den Index $_0$ an den Variabeln charakterisiert werden mag, versteht man weiterhin unter $x_x, \dots x_y$ die Änderungen der Deformationsgrößen, unter X, Y, Z die Änderungen der elektrischen Kräfte, die mit jenen Größen selbst identisch werden, wenn der Anfangszustand verschwindenden Deformationen und

verschwindenden Kräften entsprach, und bezeichnet man endlich mit τ die Temperaturänderung $T - T_0$, so kann man in allen Fällen, wo diese zehn Unabhängigen kleine Größen sind, die freie Energie ξ_1 der Volumeneinheit in eine Reihe nach Potenzen der Unabhängigen entwickeln und sich für gewisse Anwendungen auf deren niedrigste Glieder beschränken.

Sollen die Drucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, die Momente α, β, γ und die Entropie η_1 mit den zehn Unabhängigen gleichzeitig verschwinden, so hat man nach (67″) für ξ_1 eine homogene Funktion zweiten Grades zu wählen.

Da dieselbe sich bei verschwindenden τ, X, Y, Z auf das elastische Potential χ, bei verschwindenden $\tau, x_x, \ldots x_y$ auf eine dem Elektrisierungspotential f verwandte Funktion reduzieren muß, so setzen wir, indem wir unter q_h, r_h und e_{hk} Konstanten verstehen [31]),

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 = \chi + f_d - \tfrac{1}{2} r \tau^2 - \tau (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \\ - \tau (q_1 x_x + q_2 y_y + \ldots + q_6 x_y) \\ - X (e_{11} x_x + e_{12} y_y + \ldots + e_{16} x_y) \\ - Y (e_{21} x_x + e_{22} y_y + \ldots + e_{26} x_y) \\ - Z (e_{31} x_x + e_{32} y_y + \ldots + e_{36} x_y). \end{aligned}\right\} \quad 69)$$

Hierin ist, wie auf S. 334 des I. Bandes, wo das elastische Potential mit φ bezeichnet war,

$$\left.\begin{aligned} 2\chi = c_{11} x_x^2 + 2 c_{12} x_x y_y + 2 c_{13} x_x z_z + \ldots + 2 c_{16} x_x x_y \\ + c_{22} y_y^2 + 2 c_{23} y_y z_z + \ldots + 2 c_{26} y_y x_y \\ + c_{33} z_z^2 + \ldots + 2 c_{36} z_z x_y, \\ + \ldots . \end{aligned}\right\} \quad 69')$$

dabei bezeichnen die c_{hk} die Elasticitätskonstanten der Substanz; ferner ist ähnlich, wie auf S. 78 dieses Bandes,

$$-2 f_d = f_{11} X^2 + f_{22} Y^2 + f_{33} Z^2 + 2 f_{23} Y Z + 2 f_{31} Z X + 2 f_{12} X Y, \quad 69'')$$

wobei die f_{hk} ebenfalls Konstanten bedeuten.

Verstehen wir, wie S. 332 des I. Bandes, unter

$$X_x = -\frac{\partial \chi}{\partial x_x}, \ldots X_y = -\frac{\partial \chi}{\partial x_y} \quad 70)$$

die Komponenten der rein elastischen Drucke, wie dieselben infolge der Deformationen allein, ohne elektrische und thermische Einwirkung, auftreten, und unter

$$\alpha_d = -\frac{\partial f_d}{\partial X}, \quad \beta_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Y}, \quad \gamma_d = -\frac{\partial f_d}{\partial Z} \quad 70')$$

die spezifischen elektrischen Momente, welche durch die Wirkung der elektrischen Kräfte allein, bei konstanter Deformation und konstanter Temperatur influenziert werden würden, so ergiebt sich aus den allgemeinen Formeln (67″)

71) $$\begin{cases} \Xi_x = X_x + q_1 \tau + e_{11} X + e_{21} Y + e_{31} Z, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Xi_y = X_y + q_6 \tau + e_{16} X + e_{26} Y + e_{36} Z; \end{cases}$$

71′) $$\begin{cases} \alpha = \alpha_d + e_{11} x_x + e_{12} y_y + \dots + e_{16} x_y + r_1 \tau, \\ \beta = \beta_d + e_{21} x_x + e_{22} y_y + \dots + e_{26} x_y + r_2 \tau, \\ \gamma = \gamma_d + e_{31} x_x + e_{32} y_y + \dots + e_{36} x_y + r_3 \tau; \end{cases}$$

71″) $$\eta_1 = q_1 x_x + \dots + q_6 x_y + r\tau + r_1 X + r_2 Y + r_3 Z.$$

Für die innere Energie der Volumeneinheit ε_1' folgt nach der Gleichung (66″″) der Wert

72) $$\begin{cases} \varepsilon_1' = \chi + f_d + \tfrac{1}{2} r (T^2 - T_0^2) + T_0 (q_1 x_x + \dots + q_6 x_y) \\ \quad + T_0 (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) - X (e_{11} x_x + \dots + e_{16} x_y) \\ \quad - Y (e_{21} x_x + \dots + e_{26} x_y) - Z (e_{31} x_x + \dots + e_{36} x_y). \end{cases}$$

Vernachlässigt man hierin die Glieder zweiter Ordnung neben denen erster, so erhält man

72′) $$\varepsilon_1' = T_0 (q_1 x_x + \dots + q_6 x_y) + T_0 (r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) + T_0 r \tau;$$

dieser Wert enthält also weder das elastische, noch das dielektrische Potential in sich und ist mit $\eta_1 T_0$ identisch. —

Zu den Formeln (71) für die Druckkomponenten ist folgendes zu bemerken. Die erhaltenen Werte sind **lineäre** Funktionen der elektrischen Komponenten X, Y, Z, weil wir bei der Entwickelung von ξ_1 uns auf die niedrigsten Glieder beschränkt haben; eine Weiterführung würde Glieder zweiten und höheren Grades den obigen hinzufügen, wir dürfen aber — hinreichende Kleinheit der X, Y, Z vorausgesetzt — von diesen in allen Fällen absehen, wo die lineären nicht verschwinden. Dieses findet, wie weiter zu zeigen, insbesondere bei **den Krystallen ohne Symmetriecentrum** statt, und **solche sollen demgemäß hier zunächst betrachtet werden.** Um die Annäherung konsequent durchzuführen, dürfen dann aber auch Zusatzglieder zu den $\Xi_x, \dots \Xi_y$, welche anderen Ursprung haben, als die obigen, nur dann berücksichtigt werden, wenn sie in Bezug auf X, Y, Z von der gleichen Größenordnung sind. Hieraus folgt z. B., daß die in § 11 abgeleiteten MAXWELL'schen Spannungen $A_x' \dots A_y'$ als höherer Ordnung im allgemeinen außer Betracht zu

lassen sind, wenn in den obigen Formeln die in X, Y, Z multiplizierten Glieder nicht verschwinden.

Später werden wir uns auch mit dem Falle beschäftigen, daß diese Glieder gleich Null sind, an die Stelle der Ausdrücke (71') für $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ also solche treten, welche in Bezug auf X, Y, Z vom zweiten Grade sind; dann werden auch die MAXWELL'schen Spannungen berücksichtigt werden müssen. —

Interessante und wichtige Formeln kann man aus den vorstehenden erhalten, wenn man in ihnen die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ durch die elastischen Druckkomponenten $X_x, \ldots X_y$ ausdrückt.

Dabei sollen die Elasticitätsmoduln s_{hk} wie Bd. I, S. 331 definiert werden; sie genügen demgemäß den Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 1 &= c_{1h} s_{1h} + c_{2h} s_{2h} + \ldots + c_{6h} s_{6h}, \\ 0 &= c_{1h} s_{1k} + c_{2h} s_{2k} + \ldots + c_{6h} s_{6k} \quad \text{für } h \gtrless k; \end{aligned}\right\} \qquad 73)$$

ferner sollen die thermischen Deformationskoefficienten a_h nach den Formeln (38) und (38') Bd. I, S. 528 eingeführt werden durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} a_h &= q_1 s_{h1} + q_2 s_{h2} + \ldots + q_6 s_{h6}, \\ q_h &= a_1 c_{h1} + a_2 c_{h2} + \ldots + a_6 c_{h6}; \end{aligned}\right\} \qquad 73')$$

außerdem setzen wir

$$\left.\begin{aligned} e_{h1} s_{k1} + e_{h2} s_{k2} + \ldots + e_{h6} s_{k6} &= d_{hk}, \\ d_{h1} c_{k1} + d_{h2} c_{k2} + \ldots + d_{h6} c_{k6} &= e_{hk} \end{aligned}\right\} \qquad 73'')$$

für $h = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2 \ldots 6$.

Wir erhalten dann leicht aus den ersten sechs Gleichungen (71)

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \xi_x + a_1 \tau + d_{11} X + d_{21} Y + d_{31} Z, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_y &= \xi_y + a_6 \tau + d_{16} X + d_{26} Y + d_{36} Z, \end{aligned}\right\} \qquad 74)$$

worin bezeichnet

$$\left.\begin{aligned} -\xi_x &= \Xi_x s_{11} + H_y s_{12} + \ldots + \Xi_y s_{16}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\xi_y &= \Xi_x s_{61} + H_y s_{62} + \ldots + \Xi_y s_{66}; \end{aligned}\right\} \qquad 74')$$

$\xi_x, \ldots \xi_y$ sind hiernach die Deformationsgrößen, welche die Gesamtdrucke $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ bei konstanter Temperatur und ohne elektrische Einwirkungen hervorrufen würden.

Versteht man unter ψ vorübergehend die folgende Funktion der Druckkomponenten

74'') $$\begin{cases} \psi = s_{11}\,\Xi_x^2 + 2\,s_{12}\,\Xi_x\,H_y + 2\,s_{13}\,\Xi_x\,Z_y + \ldots 2\,s_{16}\,\Xi_x\,\Xi_y \\ \qquad + s_{22}\,H_y^2 + 2\,s_{23}\,H_y\,Z_z + \ldots 2\,s_{26}\,H_y\,\Xi_y \\ \qquad\qquad + s_{33}\,Z_z^2 + \ldots 2\,s_{36}\,Z_z\,\Xi_y \\ \qquad\qquad\qquad + \ldots, \end{cases}$$

so gilt auch

74''') $$-\frac{\partial\psi}{\partial\,\Xi_x} = \xi_x,\; -\frac{\partial\psi}{\partial\,H_y} = \eta_y,\; \ldots \;-\frac{\partial\psi}{\partial\,\Xi_y} = \xi_y.$$

Wir führen weiter neue Konstanten p_h und g_{hi} durch die Formeln ein

75) $$\begin{cases} r_h + a_1\,e_{h1} + a_2\,e_{h2} + \ldots + a_6\,e_{h6} = p_h \\ f_{hi} + d_{h1}\,e_{i1} + d_{h2}\,e_{i2} + \ldots + d_{h6}\,e_{i6} = g_{hi} \end{cases}$$

für h und $i = 1, 2, 3$, worin wegen (73'')

$$g_{hi} = g_{ih}$$

ist, und setzen

75') $$\begin{cases} g_{11}\,X + g_{12}\,Y + g_{13}\,Z = \alpha_s, \\ g_{21}\,X + g_{22}\,Y + g_{23}\,Z = \beta_s, \\ g_{31}\,X + g_{32}\,Y + g_{33}\,Z = \gamma_s; \end{cases}$$

dann ergeben die Formeln (71') unter Benutzung von (74) und (74')

75'') $$\begin{cases} \alpha = \alpha_s - (d_{11}\,\Xi_x + d_{12}\,H_y + \ldots + d_{16}\,\Xi_y) + p_1\,\tau, \\ \beta = \beta_s - (d_{21}\,\Xi_x + d_{22}\,H_y + \ldots + d_{26}\,\Xi_y) + p_2\,\tau, \\ \gamma = \gamma_s - (d_{31}\,\Xi_x + d_{32}\,H_y + \ldots + d_{36}\,\Xi_y) + p_3\,\tau. \end{cases}$$

Hierin haben die α_s, β_s, γ_s augenscheinlich die Bedeutung der bei konstanter Spannung und konstanter Temperatur durch elektrische Komponenten X, Y, Z influenzierten Momente und lassen sich ähnlich, wie α_d, β_d, γ_d als partielle Differentialquotienten einer homogenen Funktion f_s zweiten Grades der X, Y, Z darstellen; es gilt nämlich

75''') $$\begin{cases} -2f_s = g_{11}\,X^2 + g_{22}\,Y^2 + g_{33}\,Z^2 + 2\,g_{23}\,YZ + 2\,g_{31}\,ZX + 2\,g_{12}\,XY \\ \text{und} \qquad \alpha_s = -\frac{\partial f_s}{\partial X},\quad \beta_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Y},\quad \gamma_s = -\frac{\partial f_s}{\partial Z}. \end{cases}$$

Benutzt man endlich, daß nach (75) und (73')

76) $$r_h + q_1\,d_{h1} + q_2\,d_{h2} + \ldots + q_6\,d_{h6} = p_h$$

ist, und setzt noch

76') $$r + q_1\,a_1 + q_2\,a_2 + \ldots + q_6\,a_6 = p,$$

so wird auch

76'') $$\eta_1 = -(a_1\,\Xi_x + \ldots + a_6\,\Xi_y) + p\,\tau + p_1\,X + p_2\,Y + p_3\,Z;$$

hiermit sind die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ überall durch die Druckkomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ ersetzt.

Man kann die Resultate einfacher schreiben mit Hilfe einer Funktion ζ_1, die zwar keine besondere physikalische Bedeutung hat, aber zur Spezialisierung der Formeln auf die einzelnen Krystallgruppen Vorteile bietet, und die definiert ist durch

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 = & - \psi + f_s - \tfrac{1}{2} p\,\tau^2 - \tau(p_1 X + p_2 Y + p_3 Z)\\ & + \tau\,(a_1\,\Xi_x + a_2 H_y + \ldots + a_6\,\Xi_y)\\ & + X(d_{11}\,\Xi_x + d_{12} H_y + \ldots + d_{16}\,\Xi_y)\\ & + Y(d_{21}\,\Xi_x + d_{22} H_y + \ldots + d_{26}\,\Xi_y)\\ & + Z(d_{31}\,\Xi_x + d_{32} H_y + \ldots + d_{36}\,\Xi_y);\end{aligned}\right\} \qquad 77)$$

es wird dann nämlich

$$\left.\begin{aligned}& + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \Xi_x} = x_x, \quad + \frac{\partial \zeta_1}{\partial H_y} = y_y, \ldots, \quad + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \Xi_y} = x_y,\\ & - \frac{\partial \zeta_1}{\partial X} = \alpha, \quad - \frac{\partial \zeta_1}{\partial Y} = \beta, \quad - \frac{\partial \zeta_1}{\partial Z} = \gamma, \quad - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \tau} = \eta_1. -\end{aligned}\right\} \qquad 77')$$

Gehen wir, nachdem hiermit ein in sich abgeschlossenes System von Gleichungen gewonnen ist, zu unserem Ausgangspunkt, dem Ausdruck (69) für die freie Energie ξ_1 zurück, so zeigt die Vergleichung mit dem der Thermodynamik elastischer Körper zum Grunde gelegten Wert (37) auf S. 527, Bd. I, daß die Berücksichtigung der elektrischen Wirkungen außer dem schon im vorigen Paragraphen berührten Elektrisierungspotential f_d nur zwei neue Glieder liefert, nämlich

$$(\tau,\ K) = - \tau\,(r_1 X + r_2 Y + r_3 Z) \qquad 78)$$

und

$$\left.\begin{aligned}(d,\ K) = & - X(e_{11} x_x + e_{12} y_y + \ldots + e_{16} x_y)\\ & - Y(e_{21} x_x + e_{22} y_y + \ldots + e_{26} x_y)\\ & - Z(e_{31} x_x + e_{32} y_y + \ldots + e_{36} x_y),\end{aligned}\right\} \qquad 78')$$

worin $(\tau,\ K)$, $(d,\ K)$ Abkürzungen sind, welche die Abhängigkeit von elektrischer Kraft K, Deformation d, Temperatur τ veranschaulichen sollen.

Das Glied (τ, K) repräsentiert thermisch-elektrische Wechselwirkungen, die innerhalb der Dielektrica möglich sind. Wie ξ_1, so ist $(\tau,\ K)$ ein Skalar, und da τ gleichfalls ein Skalar, K aber ein Vektor ist, so hat $(\tau,\ K)$ die Form, welche Bd I, S. 136 als erste skalarer physikalischer Funktionen bezeichnet ist. Die speziellen Formen, welche $(\tau,\ K)$ für die verschiedenen Krystallgruppen annimmt, ergeben sich daher unmittelbar aus Schema I, Bd. I, S. 136.

Aus demselben folgt, daß alle drei Konstanten r_h für alle Krystallgruppen verschwinden, welche ein Centrum der Symmetrie oder nur mehrere gleichwertige Symmetrieaxen besitzen, ebenso auch für isotrope Körper. Die durch (τ, K) repräsentierten Vorgänge sind also spezifisch krystallphysikalische.

Das Glied (d, K) spricht die Möglichkeit von mechanisch-elektrischen Umsetzungen aus. Da auch (d, K) ein Skalar ist, X, Y, Z Vektorkomponenten sind, und die Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ sich nach Bd. I, S. 217 verhalten, wie die Funktionen $U^2, V^2, W^2, 2VW, 2WU, 2UV$ der Vektorkomponenten U, V, W, so gewinnt (d, K) die Form der Bd. I, S. 139 als dritte bezeichneten skalaren physikalischen Funktion, wenn man nur $x_x, y_y, z_z, y_z/\sqrt{2}, z_x/\sqrt{2}, x_y/\sqrt{2}$ als Variable einführt. In dem Ausdruck

$$(d, K) = -X\left(e_{11}x_x + e_{12}y_y + e_{13}z_z + e_{14}\sqrt{2}\,\frac{y_z}{\sqrt{2}} + e_{15}\sqrt{2}\,\frac{z_x}{\sqrt{2}} + e_{16}\sqrt{2}\,\frac{x_y}{\sqrt{2}}\right)$$
$$- Y\left(e_{21}x_x + \ldots + e_{26}\sqrt{2}\,\frac{x_y}{\sqrt{2}}\right) - Z\left(e_{31}x_x + \ldots + e_{36}\sqrt{2}\,\frac{x_y}{\sqrt{2}}\right)$$

kann man dann direkt e_{11} u. s. f. mit $\mathfrak{b}_{11}$ u. s. f., $e_{14}\sqrt{2}$ mit $\mathfrak{b}_{14}$ u. s. f. identifizieren und die den verschiedenen Krystallgruppen entsprechenden Werte der $\mathfrak{b}_{hk}$ aus dem Schema III auf S. 140 u. s. f. Bd. I, ablesen. Die Konstanten e_{hk} verschwinden hiernach für alle Krystallgruppen, welche ein Symmetriecentrum besitzen, außerdem nur noch für die enantiomorph-hemiëdrische Gruppe des regulären Systemes, und selbstverständlich für isotrope Körper.

Die durch das Glied (d, K) repräsentierten Vorgänge sind also gleichfalls spezifisch krystallphysikalischer Natur, aber von viel häufigerem Vorkommen und von mannigfaltigeren Eigenschaften, als die durch (τ, K) gegebenen. Auf ihre speziellen Gesetze werden wir in den nächsten Paragraphen ausführlich eingehen.

Was die mit den r_h und e_{hk} zusammenhängenden Konstanten p_h und d_{hk} anbetrifft, so kann man ihre Werte für jede Krystallgruppe nach den Formeln (75) und (73'') leicht berechnen. Wenn es sich aber nur um die Aufsuchung von Beziehungen zwischen ihnen handelt, welche den verschiedenen Krystallgruppen entsprechen, so knüpft man die Betrachtung passend direkt an die in (77) gegebene Hilfsfunktion ζ_1 an, welche wie ξ_1 skalar ist.

Es entsprechen in ihr den oben betrachteten Gliedern (τ, K) und (d, K) die folgenden beiden

78'') $$(\tau, K)' = -\tau(p_1 X + p_2 Y + p_3 Z),$$

$$\left.\begin{aligned}(s,\ K) = &+ X(d_{11}\Xi_x + d_{12}H_y + \ldots + d_{16}\Xi_y)\\ &+ Y(d_{21}\Xi_x + d_{22}H_y + \ldots + d_{26}\Xi_y)\\ &+ Z(d_{31}\Xi_x + d_{32}H_y + \ldots + d_{36}\Xi_y).\end{aligned}\right\} \quad 78''')$$

Von diesen gestattet $(\tau, K)'$ genau dieselbe Behandlung, wie (τ, K); (s, K) ist formal dadurch von (d, K) unterschieden, daß die Spannungen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ sich verhalten, wie die Aggregate U^2, V^2, W^2, VW, WU, UV der Vektorkomponenten U, V, W. Daher muß man, um zur Anwendung auf die verschiedenen Krystallgruppen Schema III, Bd. I, S. 139 benutzen zu können, Ξ_x, H_y, Z_z, $H_z\sqrt{2}$, $Z_x\sqrt{2}$, $\Xi_y\sqrt{2}$ als Variable einführen und schreiben

$$(s, K) = + X\left(d_{11}\Xi_x + d_{12}H_y + d_{13}Z_z + \frac{d_{14}}{\sqrt{2}}H_z\sqrt{2} + \frac{d_{15}}{\sqrt{2}}Z_x\sqrt{2} + \frac{d_{16}}{\sqrt{2}}\Xi_y\sqrt{2}\right)$$
$$+ Y\left(d_{21}\Xi_x + \ldots + \frac{d_{26}}{\sqrt{2}}\Xi_y\sqrt{2}\right) + Z\left(d_{31}\Xi_x + \ldots + \frac{d_{36}}{\sqrt{2}}\Xi_y\sqrt{2}\right);$$

dann gestattet Schema III wiederum unmittelbar, die jeder Krystallgruppe entsprechenden Konstanten zu bilden.

§ 13. Die Grundgesetze der Pyro- und Piezoelektricität, der dielektrischen Influenz und Elektrostriktion acentrischer Krystalle.

Der im vorigen Abschnitt aufgestellte Ausdruck für die freie Energie enthielt in drei Gruppen zehn Unabhängige, nämlich die sechs Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$, die drei Komponenten X, Y, Z der influenzierenden elektrischen Kraft oder Feldstärke und die Temperatur τ, alle von willkürlichen Anfangswerten aus gerechnet. Diesem System ordnet sich ein analoges von zehn Abhängigen in drei Gruppen zu, nämlich die sechs Druckkomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, die drei elektrischen Momente α, β, γ und die Entropie η_1.

Durch Umformung kann man einander korrespondierende Gruppen ihre Stellung wechseln lassen, wie das bezüglich der ersten oben wirklich ausgeführt ist.

Jeder Gruppe abhängiger Variabler entspricht eine Gattung von Erscheinungen, so daß wir die wirklich eintretenden komplizierten Wirkungen in eine mechanische, eine elektrische und eine thermische zerlegen können. Unter ihnen ist die elektrische, als die im allgemeinen deutlichste, zuerst beobachtet worden und hat auch die Veranlassung zur experimentellen Aufsuchung der übrigen gegeben, nachdem man durch Schlüsse, welche speziellste Fälle derjenigen Überlegungen darstellen, die in § 5 des III. Teiles zur Einführung

des Begriffes der freien Energie geführt haben, ihr Eintreten als notwendig erkannt hatte.[32]) Wir wollen demgemäß die nötigen Benennungen auch von den elektrischen Erscheinungen ableiten. —

Die elektrischen Momente α, β, γ der Volumeneinheit sind nach (71′) mit den zehn ursprünglichen Unabhängigen verbunden durch die Formeln

$$79)\quad \alpha = f_{11} X + f_{12} Y + f_{13} Z + r_1 \tau + e_{11} x_x + e_{12} x_y + \ldots + e_{16} x_y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

zwischen den Konstanten f_{hk} besteht infolge der Grundannahme, daß die Vorgänge umkehrbar sind, die schon oben eingeführte Bedingung $f_{hk} = f_{kh}$.

Führt man statt der Deformationen die inneren Drucke ein, so nehmen diese Formeln die Gestalt (75″) an

$$79')\quad \alpha = g_{11} X + g_{12} Y + g_{13} Z + p_1 \tau - (d_{11} \Xi_x + d_{12} H_y + \ldots + d_{16} \Xi_y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

worin

$$79'')\quad f_{hi} + d_{h1} e_{i1} + d_{h2} e_{i2} + \ldots + d_{h6} e_{i6} = g_{hi}$$

und daher $g_{hk} = g_{kh}$ ist, und außerdem gilt

$$79''')\quad \begin{cases} e_{h1} s_{k1} + e_{h2} s_{k2} + \ldots + e_{h6} s_{k6} = d_{hk}, \\ r_h + a_1 e_{h1} + a_2 e_{h2} + \ldots + a_6 e_{h6} = p_h, \end{cases}$$

für h und $i = 1, 2, 3$ und $k = 1, 2, \ldots 6$. Die s_{hk} sind die Elasticitätsmoduln, die a_k die thermischen Deformationskoefficienten.

Schon im vorigen Paragraphen ist darauf hingewiesen worden, daß die in X, Y, Z linearen Glieder die Bedeutung der Momente α_d, β_d, γ_d resp. α_s, β_s, γ_s besitzen, welche bei konstanter Deformation und konstanter Temperatur, resp. bei konstanter Spannung und konstanter Temperatur durch eine elektrische Kraft influenziert werden.

Wir wollen demgemäß die f_{hk} als die Konstanten der Influenzierung bei ungeänderter Deformation und ungeänderter Temperatur, die g_{hk} als die Konstanten der Influenzierung bei ungeänderter Spannung und ungeänderter Temperatur bezeichnen. Wo Mißverständnisse unmöglich sind, kann der Zusatz „bei konstanter Temperatur“ auch unterdrückt werden.

Da hiernach in derselben piezoelektrischen Substanz unter verschiedenen Umständen durch dieselbe elektrische Kraft verschiedene Momente influenziert werden können, so bietet sich die Frage, welches diejenigen Elektrisierungszahlen sind, die bei den Be-

trachtungen in § 7 und 8, wo direkte mechanische und thermische Einwirkungen ausgeschlossen waren, unter der Bezeichnung e_{hk} eingeführt worden sind.

Wir werden später zeigen, daß hierbei im allgemeinen weder die Deformationen, noch die Spannungen konstant waren, und daß die früher als Konstanten eingeführten Faktoren e_{hk} deshalb, streng genommen, Funktionen der innerhalb des ganzen Dielektricums ausgeübten Influenz darstellen. —

Die in den Deformationsgrößen resp. den Druckkomponenten lineären, mit den Konstanten e_{hk} resp. d_{hk} multiplizierten Glieder in (79) und (79') stellen die Momente dar, welche bei aufgehobener elektrischer und thermischer Einwirkung allein durch Deformation oder Spannung erregt werden.

Bei verschwindenden X, Y, Z und τ müssen diese Momente in beiden Formelsystemen einander gleich werden, was sich mit Hilfe der dann aus (71) und (74) folgenden Formeln

$$X_x = \Xi_x, \ldots\ldots\ldots\ldots X_y = \Xi_y$$
$$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + \ldots + s_{16} X_y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

leicht verifizieren läßt. Im allgemeinen Falle sind aber die einander entsprechenden in $x_x, \ldots x_y$ und in $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ multiplizierten Anteile an α, β, γ voneinander verschieden, weil die Drucke nach (75'') außer mechanischen auch thermische und elektrische Wirkungen üben.

Die Konstanten e_{hk} und d_{hk} nehmen nach dem Gesagten eine andere gegenseitige Stellung ein, als die Konstanten f_{hk} und g_{hk}, eine Stellung, die eher derjenigen der Elasticitätskonstanten zu den Elasticitätsmoduln zu vergleichen ist. Wir nennen daher die e_{hk} die piezoelektrischen Konstanten, die d_{hk} die piezoelektrischen Moduln des betrachteten Krystalles.[33])

Die in der Temperatur τ lineären Glieder $r_h \tau$ resp. $p_h \tau$ in (79) und (79') ergeben die Momente, welche durch bloße Temperaturänderung bei fehlenden elektrischen Kräften und fehlenden Deformationen resp. Spannungen erregt werden. Sie haben in den Formeln (79) andere Werte, als in (79'), weil die Temperaturänderung ihrerseits Deformationen und Spannungen bewirkt, und im ersten Falle diese, im letzten jene aufgehoben gedacht sind. Die Konstanten r_h und p_h gehen somit den f_{hk} und g_{hk} parallel; wir nennen deshalb die r_h die pyroelektrischen Konstanten bei ungeänderter Deformation und ungeänderter Feldstärke, die p_h die pyroelektrischen

Konstanten bei ungeänderter Spannung und ungeänderter Influenz, wobei der Zusatz „bei ungeänderter Feldstärke“ im allgemeinen unterdrückt werden kann. Krystalle, für welche die letzteren Konstanten von Null verschieden sind, pflegt man pyroelektrisch im engeren Sinne des Wortes zu nennen. —

Nachdem so die Konstanten derjenigen Glieder, welche durch die Berücksichtigung der elektrischen Wirkungen zu dem früher aufgestellten Ausdruck für die freie Energie eines elastischen Körpers hinzukommen, zunächst durch die Betrachtung der elektrischen Momente anschaulich gedeutet sind, ziehen wir die Gleichungen (71) und (74) für die Komponenten der inneren Drucke und der Deformationsgrößen heran; dieselben lauten, ausführlich geschrieben:

80) $-\Xi_x = c_{11} x_x + c_{12} y_y + \ldots + c_{16} x_y - q_1 \tau - e_{11} X - e_{21} Y - e_{31} Z,$

. . . .

80′) $-x_x = s_{11} \Xi_x + s_{12} H_y + \ldots + s_{16} \Xi_y - a_1 \tau - d_{11} X - d_{21} Y - d_{31} Z,$

. . . .

und zeigen, daß die elektrischen Kräfte bei konstant erhaltenen Deformationen und konstanter Temperatur Drucke hervorrufen, die durch die piezoelektrischen Konstanten gemessen werden; daß sie hingegen bei konstanten Drucken und konstanter Temperatur Deformationen bewirken, die mit den piezoelektrischen Moduln proportional sind.

Endlich ergeben die beiden Formeln (71″) und (76″) für die Entropie, nämlich

81) $$\eta_1 = q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y + r\tau + r_1 X + r_2 Y + r_3 Z$$
und

81′) $$\eta_1 = -(a_1 \Xi_x + \ldots + a_6 \Xi_y) + p\tau + p_1 X + p_2 Y + p_3 Z,$$

wenn man damit verbindet, daß nach (66″)

81″) $$\eta_1 T_0 = \omega_1$$

die Wärmemenge bedeutet, welche zur Überführung der Volumeneinheit der Substanz aus dem Zustand verschwindender Werte $x_x, \ldots x_y, X, Y, Z, \tau$ in den gegebener Werte erforderlich ist, Aufklärung darüber, in welcher Weise die mechanischen und elektrischen Kräfte und die beiden Arten pyroelektrischer Konstanten bei diesem Vorgang beteiligt sind.

Da nach (66‴) allgemein das Verhältnis

81‴) $$\frac{\omega_1}{\varrho_p t} = \frac{\eta_1 T_0}{\varrho_p \tau} = \Gamma$$

die spezifische Wärme im absoluten Maße bei der vorausgesetzten Zustandsänderung heißt, so erkennt man, daß

$$r = \frac{\varrho_p \Gamma_d'}{T}, \quad p = \frac{\varrho_p \Gamma_s'}{T} \qquad 81'''')$$

gesetzt werden kann, worin dann Γ_d' als die spezifische Wärme bei konstanter Deformation und konstanter Feldstärke, Γ_s' als diejenige bei konstanter Spannung und konstanter Feldstärke zu bezeichnen ist; der Zusatz „bei konstanter Feldstärke“ kann hierbei meist unterdrückt werden.

Die Funktionen Γ_d' und Γ_s' stehen offenbar mit den in § 6 des III. Teiles durch Γ_d und Γ_s bezeichneten in nahem Zusammenhange; letztere Größen sind die speziellen Werte, welche erstere bei gänzlich fehlender Influenz annehmen.

Da man innerhalb der eingeführten Annäherung ϱ_p und T mit den konstanten Anfangswerten ϱ_0 und T_0 vertauschen kann, so ist Γ_d' und Γ_s' als konstant zu betrachten. —

Durch $\eta_1 = 0$ werden Zustandsänderungen charakterisiert, die ohne Wärmezufuhr ω_1 stattfinden und, wie im dritten Teil, adiabatische genannt werden mögen. Die Gestalten, welche die Formeln (81) und (81') in diesem Falle annehmen, gestatten u. a., bei vorgeschriebenen $X, Y, Z, x_x, \ldots x_y$ die entsprechenden adiabatischen Temperaturänderungen τ zu berechnen.

Führt man den ersten dieser Werte für τ in (79) und (80), den zweiten in (79') und (80') ein, so erhält man allgemeine Formeln für adiabatische Vorgänge, welche dieselbe Gestalt haben, wie diejenigen, die durch die Verfügung $\tau = 0$ gewonnen werden und somit isothermischen Vorgängen entsprechen. Nur die Werte der Konstanten sind in beiden Fällen verschieden.

Eine Verfolgung dieses Gegenstandes erscheint indessen unnötig, da die Beobachtungsmethoden noch nicht so ausgebildet sind, daß sie die allem Anschein nach kleinen Differenzen zwischen den Konstantenwerten nachzuweisen vermöchten. Überdies ist in dem einfacheren Falle, daß von den elektrischen Wirkungen abgesehen wurde, die Frage in § 7 des III. Teiles behandelt worden. —

Wir haben bisher immer die Fiktion festgehalten, daß wir das einzelne Volumenelement für sich betrachten und in ihm die Werte der Unabhängigen beliebig vorschreiben könnten. In Wirklichkeit bestimmt sich der Zustand jedes Elementes jedoch indirekt und unter Berücksichtigung der Beteiligung aller anderen an dem stattfindenden Vorgang durch die äußeren Bedingungen des Problems.

Es sei ein System von dielektrischen Krystallen der oben betrachteten Art gegeben, auf dessen Oberflächenelemente gegebene Drucke mit den Komponenten $\overline{\Xi}$, $\overline{H}$, $\overline{Z}$ pro Flächeneinheit, auf dessen Volumenelemente körperliche Kräfte mit den Komponenten Ξ', H', Z' pro Volumeneinheit wirken. Im umgebenden unendlichen leeren Raum sei ein System geladener Isolatoren oder Konduktoren vorhanden; außerdem sei durch geeignet angebrachte Wärmequellen die Temperatur des Dielektricums geändert.

Die Bedingungen für die elektrische Influenz haben wir in § 8 so aufgestellt, daß wir den Zusammenhang der dielektrischen Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{N}$ nach den Richtungen von x, y, z, n mit den räumlichen und flächenhaften Dichten ϱ und σ der wahren Ladungen in Zusammenhang brachten. Dies geschieht durch die Formeln

82) $$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z},$$

82′) $$4\pi\sigma_k = \overline{\mathfrak{N}}_k, \quad 4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i,$$

während noch gilt

82″) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{X} = \mathfrak{d}_{11}X + \mathfrak{d}_{12}Y + \mathfrak{d}_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{d}_{21}X + \mathfrak{d}_{22}Y + \mathfrak{d}_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} = \mathfrak{d}_{31}X + \mathfrak{d}_{32}Y + \mathfrak{d}_{33}Z, \\ \mathfrak{N} = \mathfrak{X}\cos(n,x) + \mathfrak{Y}\cos(n,y) + \mathfrak{Z}\cos(n,z), \end{array}\right.$$

und die X, Y, Z, N durch die Potentialfunktion φ' aller freien Ladungen gegeben sind gemäß

82‴) $$X = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\varphi'}{\partial z}, \quad N = -\frac{\partial\varphi'}{\partial n}.$$

Dieses Formelsystem, welches sich früher dadurch empfahl, daß es die direkt gegebenen wahren Ladungen einführte, ist bei unserem Problem nicht brauchbar. Einerseits, weil die Parameter $\mathfrak{d}_{hk}$ bei demselben ihre Bedeutung als der Substanz individuelle Konstanten gänzlich verlieren, andererseits, weil die wahren Ladungen hier nicht direkt vorgeschrieben werden können, da auch die im Dielektricum erregten Momente zum Teil mit wahren Ladungen äquivalent sind.

Von letzterem kann man sich ohne alle Rechnung durch folgende Überlegungen Rechenschaft geben.

Das Potential Φ eines beliebigen elektrischen Systemes auf sich selbst ist nach (45) gegeben durch

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\int de \int \frac{de'}{r},$$

worin das eine Integral über alle **wahren** Ladungen e, das andere über alle **freien** e' zu erstrecken ist. Systeme, welche gar keine wahren Ladungen besitzen, geben hiernach ein verschwindendes inneres Potential Φ und demgemäß auch keinerlei innere Kräfte. Nun wirken aber piezo- oder pyroelektrisch erregte Körper auf solche ohne wahre Ladungen, — ziehen z. B. unelektrische leichte Nichtleiter an, — und daraus folgt, daß sie wahre Ladungen besitzen müssen. Über deren Betrag werden wir weiter unten einen allgemeinen Satz ableiten.

Nach dem Gesagten ist es klar, daß wir die elektrischen Grundformeln für ein System, welches piezo- und pyroelektrische Krystalle enthält, auf dem früheren Wege nicht gewinnen können.

Wir gehen demgemäß auf die ersten Grundlagen der oben für Dielektrica entwickelten allgemeinen Theorie zurück und definieren die Potentialfunktion φ'_d des angenommenen dielektrischen Systemes durch die Momente der Volumeneinheit gemäß der Formel

$$\varphi'_d = \int\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1.$$

Verstehen wir dann unter φ' die Potentialfunktion **aller** freien Ladungen von den Dichten ϱ' resp. σ', mögen sie nun im Dielectricum, auf Konduktoren oder in Isolatoren liegen, und unter X, Y, Z die wie in (82‴) definierten Komponenten der elektrischen Kraft nach den Richtungen x, y, z und n, so gelten nach (39) u. f. die Bedingungen

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\triangle \varphi' = 4\pi\varrho' \qquad 83)$$

in allen inneren Punkten,

$$N_k = -\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)_k = 4\pi\sigma'_k, \quad N_h + N_i = -\left(\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)_h + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial n}\right)_i\right) = 4\pi\sigma'_{hi} \qquad 83')$$

an den Grenzen gegen Konduktoren oder andere Dielektrica. Dazu kommt, wenn man von elektromotorischen Kräften absieht, nach (37″) und (37‴)

$$\overline{\varphi'_k} = P'_k, \quad \overline{\varphi'_h} = \overline{\varphi'_i}. \qquad 83'')$$

Im leeren Raum und in Konduktoren ist $\varrho' = 0$, in Isolatoren gleich der gegebenen wahren Dichte ϱ_i, im dielektrischen System aber gilt

$$\varrho' = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right), \qquad 83''')$$

worin für α, β, γ die Ausdrücke (79) oder (79′) einzusetzen sind.

Der Wert von σ'_{hi} lautet

$$\sigma'_{hi} = \sigma_{hi} - \Big[\big(\overline{\alpha}\cos(n,x) + \overline{\beta}\cos(n,y) + \overline{\gamma}\cos(n,z)\big)_h + \big(\overline{\alpha}\cos(n,x) + \overline{\beta}\cos(n,y) + \overline{\gamma}\cos(n,z)\big)_i\Big]$$

und wird in dem Falle, daß das Dielektricum (h) zu einem Konduktor (k) degeneriert, zu

83'''') $$\sigma'_k = \sigma_k - \big(\overline{\alpha}\cos(n,x) + \overline{\beta}\cos(n,y) + \overline{\gamma}\cos(n,z)\big)_i,$$

worin σ_{hi} und σ_k die Dichten der auf den betreffenden Zwischengrenzen liegenden wahren Ladungen bezeichnen.

Befindet sich im Unendlichen nur der leere Raum, so verhält sich φ' ebenda wie die Potentialfunktion endlicher und im Endlichen liegender Massen.

Hiermit sind die elektrischen Grundgleichungen unseres Problemes vollständig gegeben. Für die Druckkomponenten $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ gelten nach Bd. I, S. 340 u. f. innerhalb des dielektrischen Systemes im Falle des Gleichgewichtes die Bedingungen

84) $$\begin{cases} \Xi' = \dfrac{\partial \Xi_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \Xi_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \Xi_z}{\partial z}, \\ H' = \dfrac{\partial H_x}{\partial x} + \dfrac{\partial H_y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_z}{\partial z}, \\ Z' = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}; \end{cases}$$

an Zwischengrenzen, gegen welche Grenzdrucke nicht wirken,

84') $$(\overline{\Xi}_n)_h + (\overline{\Xi}_n)_k = (\overline{H}_n)_h + (\overline{H}_n)_k = (\overline{Z}_n)_h + (\overline{Z}_n)_k = 0,$$

und an der Oberfläche

84'') $$\begin{cases} \overline{\Xi} = \overline{\Xi}_x\cos(n,x) + \overline{\Xi}_y\cos(n,y) + \overline{\Xi}_z\cos(n,z), \\ \overline{H} = \overline{H}_x\cos(n,x) + \overline{H}_y\cos(n,y) + \overline{H}_z\cos(n,z), \\ \overline{Z} = \overline{Z}_x\cos(n,x) + \overline{Z}_y\cos(n,y) + \overline{Z}_z\cos(n,z), \end{cases}$$

wobei n jetzt, in Übereinstimmung mit dem in diesem Kapitel zumeist Verfügten, die innere Normale bezeichnet.

Diesen Gleichungen ordnen sich im allgemeinen noch Festsetzungen über das Verhalten der Verrückungen an bestimmten Punkten des festen Systemes zu, die sogenannten Befestigungsbedingungen, welche aber für die Bestimmung der Deformationsgrößen nicht in Betracht kommen. Dafür sind diese den Bedingungsgleichungen (8) von Bd. I, S. 218 zu unterwerfen, welche daraus fließen, daß die Deformationsgrößen aus den drei Verrückungs-

komponenten durch Differentiation abgeleitet sind, und welche lauten

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial y\,\partial z}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{2\,\partial^2 x_x}{\partial y\,\partial z} + \dfrac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y_x}{\partial z\,\partial x} + \dfrac{\partial^2 z_x}{\partial y\,\partial x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad 84''')$$

Dieselben sind identisch erfüllt, wenn die Deformationsgrößen Konstanten oder lineäre Funktionen der Koordinaten sind.

In diese mechanischen Gleichungen des Problemes sind im allgemeinen, streng genommen, für die Druckkomponenten $\Xi_x, \dots \Xi_y$ die Summen der aus der freien Energie folgenden Werte und der in § 11 abgeleiteten Komponenten $A'_x, \dots A'_y$ der Maxwell'schen Spannungen einzusetzen, welche ganz unabhängig von den thermodynamischen Qualitäten in jedem Körper wirken.

Da wir indessen alle Entwickelungen dieser beiden Paragraphen nur bis auf die in Bezug auf X, Y, Z niedrigsten Glieder ausgedehnt, in dem Ansatz (69) für ξ die Glieder dritten Grades, und daher in den aus ihm folgenden Beziehungen (79) bis (81) die Glieder zweiten Grades ausdrücklich vernachlässigt haben, so ist es, wie schon S. 108 bemerkt, nicht nur erlaubt, sondern geboten, jene Druckkomponenten $A'_x, \dots A'_y$ als zweiten Grades unberücksichtigt zu lassen. Dadurch werden die in den Formeln (84) bis (84'') auftretenden Komponenten $\Xi_x, \dots \Xi_y$ mit den durch (80) resp. (80') gegebenen identisch, und es kommen auch die Grenzdrucke gegen Zwischengrenzen, welche die dort befindlichen Ladungen verursachen, in Wegfall.

Ist schließlich die Temperatur nicht konstant, so ist ihr Gesetz nach den allgemeinen Formeln für die Wärmebewegung unter Berücksichtigung der thermisch-mechanischen Umsetzungen zu bestimmen, welche in § 9 des III. Teiles entwickelt sind. Jedoch ist dann, streng genommen, an Stelle des dort benutzten Wertes der Entropie η_1, der elektrische Umsetzungen nicht berücksichtigt, einer der oben in (81) resp. (81') gegebenen zu verwenden.

Vorgeschrieben wird in der Praxis dabei an der Oberfläche des Dielektricums entweder die Temperatur τ, oder die einströmende, mechanisch gemessene Wärmemenge Ω_n, oder endlich das Gesetz der Ausstrahlung in den leeren Raum, d. h. der Wert von $\overline{\Omega}_n F^2 + \overline{\tau}$. Wir werden indessen, um das Problem nicht unnötig zu komplizieren, in den Fällen, wo wir überhaupt den thermischen Einfluß berück-

sichtigen, direkt die Temperatur im ganzen Innern des untersuchten Dielektricums gegeben denken. —

Unter Bezugnahme auf das vorstehend erörterte System elektrischer, mechanischer und thermischer Bedingungen können wir nun einiges über die oben angeregten Fragen nach dem Verhältnis der neuen Konstanten f_{hk} und g_{hk} zu den früher eingeführten $\mathfrak{e}_{hk}$ und $\mathfrak{d}_{hk}$, sowie nach der Natur der durch mechanische und thermische Einwirkungen bewirkten elektrischen Erregung aussagen. Beide Fragen hängen, wie sich zeigen wird, einigermaßen zusammen.

Bei den früheren Untersuchungen in § 7 bis 11 ist das Dielektricum ausschließlich elektrischen und weder mechanischen, noch thermischen Einflüssen ausgesetzt gedacht. Es ist also Ξ', H', Z' und $\overline{\Xi}$, $\overline{H}$, $\overline{Z}$ gleich Null angenommen und daraus stillschweigend auch das Verschwinden von $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, resp. $x_x, \ldots x_y$ im ganzen Dielektricum geschlossen worden; zugleich ist die Temperatur als stets gleich der normalen angesehen, wenn äußere thermische Einflüsse nicht stattfinden.

Wir erkennen aber jetzt, daß jene Voraussetzungen im allgemeinen in der Wirklichkeit nicht gleichzeitig erfüllt sind, da nach den Formeln (80) und (80′) Spannungen und Deformationen auch ohne äußere mechanische Einwirkungen, nach (81) und (81′) Temperaturänderungen auch ohne äußere Wärmezufuhr durch nur elektrische Kräfte erregt werden können.

Nun kann man zwar die Schwierigkeiten, welche die Temperaturänderung bringt, wenigstens im Prinzip jederzeit dadurch umgehen, daß man die elektrische Einwirkung hinreichend lange konstant erhält, um die Wiederherstellung der normalen Temperatur $\tau = 0$ zu ermöglichen; die inneren Spannungen und Deformationen bleiben dabei indessen bestehen.

Doch giebt es Fälle, wo bei fehlenden mechanischen Einwirkungen auch im elektrischen Felde die inneren Spannungen verschwinden, während die Deformationsgrößen von Null verschieden sind; in diesen wird man also die Bedingungen als erfüllt ansehen dürfen, unter denen die Betrachtungen der früheren Paragraphen Gültigkeit besitzen.

Hier nehmen die Gleichungen (79′) die Gestalt an

$$a = g_{11} X + g_{12} Y + g_{13} Z$$

u. s. f., welche mit (43″) übereinstimmt, und man kann im Einklang hiermit jenen Ansatz als eine erste Annäherung betrachten, erhalten unter Vernachlässigung der durch die elektrischen Kräfte bewirkten mechani-

schen und thermischen Vorgänge, deren Berücksichtigung für den Fall der acentrischen Krystalle durch die Gleichungen dieses Paragraphen, insbesondere durch (79′) geliefert wird; man darf deshalb auch die Konstanten g_{hk} des Ansatzes (75′) mit den Elektrisierungszahlen e_{hk} des Ansatzes (43″) identifizieren.

Dies angenommen, läßt sich über die Natur der durch thermische und mechanische Einwirkungen hervorgerufenen elektrischen Erregungen acentrischer Krystalle ein merkwürdiger Satz ableiten.

Durch Kombination der Formeln (82) und (83) erhält man *nämlich*:

$$4\pi(\varrho - \varrho') = \frac{\partial(\mathfrak{X} - X)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathfrak{Y} - Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathfrak{Z} - Z)}{\partial z}.$$

Nun ist aber nach (43′) wegen der Identität der e_{hk} und g_{hk}

$$\mathfrak{X} - X = 4\pi\alpha_s, \quad \mathfrak{Y} - Y = 4\pi\beta_s, \quad \mathfrak{Z} - Z = 4\pi\gamma_s,$$

zugleich ist nach (83‴)

$$-\varrho' = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z},$$

also schließlich

$$-\varrho = \frac{\partial(\alpha - \alpha_s)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta - \beta_s)}{\partial y} + \frac{\partial(\gamma - \gamma_s)}{\partial z},$$

worin $(\alpha - \alpha_s)$, $(\beta - \beta_s)$, $(\gamma - \gamma_s)$ die Differenzen der gesamten und der bei konstanter Spannung und Temperatur allein durch Influenz erregten Momente sind. Diese bestimmen sich aus (75″), so daß man schließlich erhält

$$\varrho = \frac{\partial}{\partial x}(d_{11}\,\Xi_x + \dots d_{16}\,\Xi_y - p_1\,\tau) + \frac{\partial}{\partial y}(d_{21}\,\Xi_x + \dots d_{26}\,\Xi_y - p_2\,\tau)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(d_{31}\,\Xi_x + \dots d_{36}\,\Xi_y - p_3\,\tau).$$

Ebenso folgt durch Kombination der Formeln (82′) und (83′) für die Grenze nach dem leeren Raum oder nach einem isotropen Dielektricum, wozu auch ein Leiter zu rechnen ist,

$$-\sigma = (\overline{\alpha} - \overline{\alpha}_s)\cos(n, x) + (\overline{\beta} - \overline{\beta}_s)\cos(n, y) + (\overline{\gamma} - \overline{\gamma}_s)\cos(n, z),$$

was sich mit Hilfe von (75″) auf die Form bringen läßt

$$\sigma = (d_{11}\,\overline{\Xi}_x + \dots d_{16}\,\overline{\Xi}_y - p_1\,\overline{\tau})\cos(n, x) + (d_{21}\,\overline{\Xi}_x + \dots d_{26}\,\overline{\Xi}_y - p_2\,\overline{\tau})\cos(n, y)$$
$$+ (d_{31}\,\overline{\Xi}_x + \dots d_{36}\,\overline{\Xi}_y - p_3\,\overline{\tau})\cos(n, z).$$

Hieraus ergiebt sich, daß die bei konstanter Influenz durch bloße mechanische und thermische Einwirkung erregten Momente wahre Ladungen repräsentieren.

Dies Resultat, welches die allgemeinen Überlegungen von S. 119 ergänzt, ruht ganz wesentlich auf dem Nachweis, daß die Konstanten g_{hk} in dem Ansatz für die freie Energie mit den Elektrisierungszahlen e_{hk} identifiziert werden dürfen. —

§ 14. Eine Platte aus einem acentrischen Krystall unter konstantem Druck im homogenen Felde; ein Kreiscylinder bei längs der Axe konstanter Deformation. Eine Kugel bei konstanter Temperatur oder unter allseitig gleichem Druck; ein beliebiger Körper bei oberflächlicher Erwärmung.

Wir wenden uns nunmehr zu der Anwendung der im vorigen Paragraphen entwickelten allgemeinen Formeln auf spezielle Fälle und werden hier etwas ausführlicher sein dürfen, als bei dem Problem der einfachen dielektrischen Influenz, weil die hier vorliegenden Erscheinungen wesentlich mannigfaltiger sind und darum größeres physikalisches Interesse besitzen, als die dort eintretenden.[34])

Für das erste wollen wir nur mechanisch-elektrische Umsetzungen in Betracht ziehen, also die Temperatur dauernd gleich der normalen und somit $\tau = 0$ voraussetzen. Diese Annahme ist zu realisieren, indem man äußere thermische Einwirkungen ausschließt und der im Inneren des Dielektricums etwa entwickelten Wärme Zeit läßt, nach der Umgebung abzufließen.

Das einfachste hierhergehörige Problem liefert eine seitlich freie planparallele Platte von gegen ihre Dicke großen Querdimensionen unter der Wirkung eines normalen konstanten Druckes auf ihre Grundflächen in einem homogenen elektrischen Felde.

Wir wählen zur Begrenzung der Platte die Ebenen $z = 0$ und $z = H$, bezeichnen den äußeren Normaldruck durch Π, die äußeren elektrischen Komponenten durch X_a, Y_a, Z_a, die inneren durch X_i, Y_i, Z_i; unter den gemachten Voraussetzungen werden dann mit ersteren auch letztere konstant, und wir erhalten demgemäß

$$85)\quad \begin{cases} -\varphi_a' = X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a & \text{für } z > H, \\ -\varphi_i' = X_i x + Y_i y + Z_i z + C_i & \text{für } 0 < z < H, \\ -\varphi_a' = X_a x + Y_a y + Z_a z + C_a' & \text{für } z < 0. \end{cases}$$

Die Hauptgleichung (83) ist im äußeren Raum identisch erfüllt und nimmt für das Innere des Dielektricums, da wir α, β, γ als von x und y unabhängig ansehen dürfen, die Gestalt

$$85')\quad \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0$$

an, welche γ auch in Bezug auf z konstant ergiebt; die Oberflächenbedingungen (83') und (83'') liefern

$$X_i = X_a, \quad Y_i = Y_a, \quad Z_a - Z_i = 4\pi\gamma. \qquad 85'')$$

Zur Befriedigung der elastischen Gleichungen setzen wir

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = H_z = Z_x = 0, \quad Z_z = \Pi; \qquad 86)$$

es wird hierdurch aus (79')

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= g_{11} X_i + g_{12} Y_i + g_{13} Z_i - d_{13}\Pi, \\ \beta &= g_{21} X_i + g_{22} Y_i + g_{23} Z_i - d_{23}\Pi, \\ \gamma &= g_{31} X_i + g_{32} Y_i + g_{33} Z_i - d_{33}\Pi. \end{aligned}\right\} \qquad 86')$$

Die Kombination der letzten dieser Gleichungen mit (85'') liefert

$$\frac{1}{4\pi}(Z_a - Z_i) = g_{31} X_a + g_{32} Y_a + g_{33} Z_i - d_{33}\Pi,$$

also

$$(1 + 4\pi g_{33}) Z_i = Z_a - 4\pi(g_{31} X_a + g_{32} Y_a - d_{33}\Pi); \qquad 86\ )$$

durch Einsetzen des hierdurch gegebenen Wertes von Z_i und der aus (85'') folgenden Werte von X_i und Y_i in (86') erhält man α, β, γ durch X_a, Y_a, Z_a und Π, also durch lauter gegebene Größen ausgedrückt.

Findet ein äußerer Druck Π nicht statt, und stehen die Kraftlinien des elektrischen Feldes normal zur Platte, verschwindet also X_a und Y_a, so wird das Problem zu einem der Elektrostriktion im engeren Sinne des Wortes. Hier gilt

$$Z_i = \frac{Z_a}{1 + 4\pi g_{33}},$$

$$\alpha = \frac{g_{13} Z_a}{1 + 4\pi g_{33}}, \quad \beta = \frac{g_{23} Z_a}{1 + 4\pi g_{33}}, \quad \gamma = \frac{g_{33} Z_a}{1 + 4\pi g_{33}},$$

und nach (80')

$$x_x = \frac{d_{31} Z_a}{1 + 4\pi g_{33}}, \ldots \qquad x_y = \frac{d_{36} Z_a}{1 + 4\pi g_{33}}.$$

Die Werte der Momente α, β, γ sind dieselben, als wenn die betrachtete Platte aus einem Medium ohne piezoelektrische Qualität bestände, denn sie bleiben ungeändert, wenn man die Moduln d_{hk} verschwinden läßt. Dies hängt damit zusammen, daß bei unserem Problem verschwindende äußere Drucke auch verschwindende innere Spannungen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ zur Folge haben, und somit der S. 122 erörterte Fall vorliegt, wo die Formeln (79') sich auf (43'') reduzieren.

Wegen der verschwindenden Spannungen reduziert sich hier die Formel (81') auf

$$\eta_1 = p\tau + p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i;$$

daraus folgt, daß bei plötzlichem Erregen des elektrischen Feldes eine Temperatursteigerung τ eintritt, gegeben durch

$$-p\tau = p_1 X_i + p_2 Y_i + p_3 Z_i.$$

Die gleiche Formel gilt, wenn der influenzierte Körper eine homogene Kugel ist, ein Fall, der sich mit Hilfe der Ansätze, die S. 84 das Problem der einfachen dielektrischen Influenz lösten, leicht erledigen läßt. Im allgemeinen dagegen entsprechen verschwindenden körperlichen und Druckkräften nicht auch verschwindende Spannungen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$, sondern von Ort zu Ort wechselnde; daraus folgt, daß die Temperaturänderung τ gleichfalls variabel sein muß und sich, auch wenn man von der Wärmeleitung absieht, nur dann angeben läßt, wenn zuvor das Problem der Elektrostriktion gelöst ist. —

Findet keine äußere elektrische Einwirkung statt, und wirkt nur der Normaldruck Π, so wird das Problem zu einem der Piezoelektricität im engeren Sinne des Wortes; hier gilt

$$Z_i = \frac{4\pi d_{33}\Pi}{1+4\pi g_{33}},$$

$$\alpha = -\left(d_{13} - \frac{4\pi d_{33} g_{13}}{1+4\pi g_{33}}\right)\Pi, \quad \beta = -\left(d_{23} - \frac{4\pi d_{33} g_{23}}{1+4\pi g_{33}}\right)\Pi,$$

$$\gamma = -\left(1 - \frac{4\pi g_{33}}{1+4\pi g_{33}}\right) d_{33}\Pi = -\frac{d_{33}\Pi}{1+4\pi g_{33}};$$

$$x_x = -\left(s_{31} - \frac{4\pi d_{33} d_{31}}{1+4\pi g_{33}}\right)\Pi, \ldots x_y = -\left(s_{36} - \frac{4\pi d_{33} d_{36}}{1+4\pi g_{33}}\right)\Pi.$$

Die zweiten Glieder in den Ausdrücken für α, β, γ verschwinden mit den g_{hk}, d. h. mit verschwindender Influenz; sie stellen somit die influenzierende Wirkung dar, welche die durch Druck primär erregten Momente innerhalb des Dielektricums ausüben. —

Von besonderem Interesse, so nach der Seite der Theorie, wie der Praxis, ist der Fall, daß die dielektrische Platte beiderseitig an je eine leitende Schicht grenzt, die auf das Potential P_0 resp. P_1 geladen ist; wir nennen diese Schichten, die in Praxi etwa durch aufgelegte Staniolblätter hergestellt werden können, kurz die Belegungen der Platte. Dann wird

87) $$\varphi_i = P_0 + (P_1 - P_0)\frac{z}{H},$$

also

87') $$X_i = Y_i = 0, \quad Z_i = \frac{P_0 - P_1}{H};$$

läßt man die mechanischen Bedingungen ungeändert, so gilt nunmehr

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = g_{13}\dfrac{P_0 - P_1}{H} - d_{13}\Pi, \quad \beta = g_{23}\dfrac{P_0 - P_1}{H} - d_{23}\Pi, \\ \gamma = g_{33}\dfrac{P_0 - P_1}{H} - d_{33}\Pi; \\ x_x = d_{31}\dfrac{P_0 - P_1}{H} - s_{31}\Pi, \ldots x_y = d_{36}\dfrac{P_0 - P_1}{H} - s_{36}\Pi. \end{array}\right\} \quad 87'')$$

Die ersten Glieder dieser Ausdrücke verschwinden, wenn die beiden Belegungen leitend miteinander verbunden sind, wenn also $P_0 = P_1$ ist; in diesem Falle ist die Selbstinfluenz des durch Druck erregten Dielektricums aufgehoben, denn jedes Volumenelement erhält nach (79') dieselben Momente, als wenn es allein vorhanden wäre, oder alle g_{hk} verschwänden. Das Resultat läßt sich sogleich auf den Fall erweitern, daß das Dielektricum die Gestalt eines Parallelepipedons besitzt und auf allen sechs Flächen mit leitenden Schichten überzogen ist, wenn jede dieser Belegungen mit der gegenüberliegenden leitend verbunden ist, gegen die benachbarten aber isoliert sein kann. Erleidet dann das Parallelepipedon parallel den Kanten, die zu Koordinatenaxen gewählt seien, die Drucke Π_1, Π_2, Π_3, so gilt $\varphi_i' =$ Const., und es wird

$$-\alpha = d_{11}\Pi_1 + d_{12}\Pi_2 + d_{13}\Pi_3, \quad -\beta = d_{21}\Pi_1 + d_{22}\Pi_2 + d_{23}\Pi_3,$$
$$-\gamma = d_{31}\Pi_1 + d_{32}\Pi_2 + d_{33}\Pi_3. -$$

Lassen wir jetzt wieder P_0 und P_1 voneinander verschieden sein, so erhalten wir nach (83''') aus (87) für die freie räumliche elektrische Dichte im Dielektricum den Wert Null, und nach (83''') für die freie Oberflächendichte in den Grenzen resp.

$$\sigma' = \pm\frac{P_1 - P_0}{4\pi H} = \sigma_k \pm \gamma,$$

worin das obere Zeichen der Fläche $z = H$, das untere der Fläche $z = 0$ entspricht. Hieraus folgt die auf der Oberfläche der leitenden Schicht liegende Dichte

$$\sigma_k = \mp\gamma \pm \frac{P_1 - P_0}{4\pi H},$$

also nach (87'')

$$\sigma_k = \pm\frac{1 + 4\pi g_{33}}{4\pi H}(P_1 - P_0) \pm d_{33}\Pi; \qquad 87''')$$

dabei mögen weiterhin die auf die Belegung (0) und (1) bezüglichen Werte durch σ_{k_0} und σ_{k_1} unterschieden werden.

Die in den Leitern liegende wahre Dichte σ_k wird hiernach im allgemeinen der im Dielektricum an die Oberfläche gebundenen, deren Dichte gleich $\pm \gamma$ ist, keineswegs entgegengesetzt gleich; dies gilt vielmehr nur in dem speziellen Falle, daß $P_1 = P_0$ ist, daß die beiden Belegungen der Platte also leitend verbunden sind. —

Wir wollen unsere Betrachtungen noch in der Hinsicht erweitern, daß wir mit den beiden Belegungen Konduktoren von erheblichen Kapacitäten leitend verbunden denken. Dies können wir erreichen, ohne die Potentialfunktion φ' von mehr Koordinaten, als von z allein, abhängig zu machen, indem wir den, die Grundflächen der Platte bedeckenden, planparallelen leitenden Schichten von den beiläufigen Dicken D_0 und D_1 wiederum von außen her gleich große, parallele plattenförmige Leiter nähern, welche am einfachsten zur Erde abgeleitet gedacht werden können. Diese bilden dann nach S. 39 mit den Belegungen zwei Kondensatoren von den Kapacitäten

88) $$C_0 = \frac{Q}{4\pi H_0}, \quad C_1 = \frac{Q}{4\pi H_1},$$

worin Q die Größe der Platten und H_0 resp. H_1 ihre Abstände von den benachbarten Belegungen bezeichnen.

In diesem Falle gilt in den Zwischenräumen von der Dicke H_0 und H_1 resp.

88′) $$\varphi'_0 = P_0 \frac{z + H_0 + D_0}{H_0}, \qquad \varphi'_1 = P_1 \frac{H + H_1 + D_1 - z}{H_1},$$

woraus folgt

88″) $$\frac{\partial \varphi'_0}{\partial z} = \frac{P_0}{H_0}, \quad \frac{\partial \varphi'_1}{\partial z} = -\frac{P_1}{H_1};$$

es liegt somit auf den äußeren Flächen der Belegungen eine Flächendichte

88‴) $$\sigma_0 = \frac{P_0}{4\pi H_0} = \frac{P_0 C_0}{Q}, \qquad \sigma_1 = \frac{P_1}{4\pi H_1} = \frac{P_1 C_1}{Q}.$$

Hatten die Belegungen ursprünglich keine Ladungen, so muß

89) $$\sigma_{k_0} + \sigma_0 = 0, \quad \sigma_{k_1} + \sigma_1 = 0$$

sein; da nach (87‴) überdies $\sigma_{k_0} + \sigma_{k_1} = 0$ ist, so folgt aus (88‴)

89′) $$P_1 - P_0 = -Q\sigma_{k_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right).$$

Setzt man für σ_{k_1} den aus (87‴) für die positive Grundfläche folgenden Wert, so erhält man

$$P_1 - P_0 = \frac{-d_{33}\Pi Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}{1 + \frac{1+4\pi g_{33}}{4\pi}\frac{Q}{H}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right)}, \tag{89''}$$

was in Verbindung mit (87″) auch die entsprechenden Werte α, β, γ zu berechnen gestattet.

Wenn man g_{33} mit $\mathfrak{e}_{33}$ identifiziert, so ist $1 + 4\pi g_{33} = \mathfrak{d}_{33}$, und $\mathfrak{d}_{33} Q/4\pi H$ die Kapacität des aus den beiden Belegungen mit der zwischenliegenden Krystallplatte bestehenden Kondensators. Hierdurch ist jenes Verhältnis, das wir C setzen wollen, anschaulich gedeutet.

In allen Fällen, wo die angehängten Kapacitäten C_0 und C_1 groß neben C sind, kann man das zweite Glied des Nenners vernachlässigen und erhält

$$P_1 - P_0 = -d_{33}\Pi Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}\right).$$

Es erscheint unbedenklich, die erhaltenen Resultate auf den Fall zu übertragen, wo jene Kapacitäten C_0 und C_1 nicht in der vorhin beschriebenen Weise erhalten sind, sondern durch Verbindung der Belegungen der Krystallplatte mit den Konduktoren eines Elektrometers. Die letzte Formel giebt dann die Theorie der Bestimmung des piezoelektrischen Moduls d_{33} durch die Beobachtung der Potentialdifferenz $P_1 - P_0$.

Waren die Belegungen nicht ursprünglich unelektrisch, sondern mit den Ladungen E_0 resp. E_1 versehen, so treten an Stelle von (89) die Formeln

$$(\sigma_{k_0} + \sigma_0) Q = E_0, \quad (\sigma_{k_1} + \sigma_1) Q = E_1,$$

und bei fehlendem Normaldruck Π erhält man leicht

$$P_1 - P_0 = \frac{\frac{E_1}{C_1} - \frac{E_0}{C_0}}{1 + \frac{1+4\pi g_{33}}{4\pi}\frac{Q}{H}\left(\frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1}\right)}, \tag{89'''}$$

eine Beziehung, durch welche die Theorie eines Plattenkondensators mit eingefügter Schicht eines dielektrischen Krystalles geliefert wird. Da von den piezoelektrischen Parametern keiner in der Formel auftritt, so sind die spezifischen Eigenschaften acentrischer Krystalle auf den betrachteten Vorgang ohne Einfluß. —

Sätze von bemerkenswerter Einfachheit und Allgemeinheit liefert die Behandlung der Erregung eines Kreiscylinders, der aus einem

homogenen acentrischen Krystall hergestellt ist, durch auf die Endquerschnitte ausgeübte Normaldrucke und Drehungsmomente, falls man die Verhältnisse so anordnet, daß die der Z-Axe parallel gelegte Länge des Kreiscylinders als sehr groß sowohl gegen seinen Durchmesser, als auch gegen den Abstand untersuchter äußerer Punkte betrachtet werden kann; wir wollen in diesem Falle kurz sagen, daß der Kreiscylinder als unendlich lang angesehen werden kann. Hier sind alle Querschnitte gleichwertig, und das Problem ist ein ebenes.

Den mechanischen Bedingungen genügt man, indem man setzt

$$\Xi_x = H_y = \Xi_y = 0,$$
$$-Z_z = A_3 x + B_3 y + C_3, \quad -H_z = A_4 x, \quad -\Xi_z = B_5 y,$$

worin nach den Formeln (189‴) S. 408, Bd. I, die Konstanten A_h, B_h, C_h bestimmt sind durch

$$Q A_3 \varkappa^2 = -M, \quad Q B_3 \varkappa^2 = +A, \quad Q C_3 = Z,$$
$$Q A_4 \varkappa^2 = -Q B_5 \varkappa^2 = \tfrac{1}{2} N;$$

dabei bezeichnet Z die auf die positive Endfläche ausgeübte gesamte Zugkraft, A, M, N sind die ebenda angebrachten Drehungsmomente um die Koordinatenaxen, Q ist der Querschnitt des Cylinders, $\varkappa$ dessen Trägheitsradius in Bezug auf einen Durchmesser.

Den elektrischen Bedingungen genügt man im Innern des Querschnittskreises, indem man für φ' eine Funktion zweiten Grades von $x = e\cos\chi$ und $y = e\sin\chi$, im äußeren Raum das logarithmische Potential einer Randbelegung des Querschnittskreises wählt; die Konstanten dieser Funktionen bestimmen sich durch die Randbedingungen (83′) und (83″).

Eine leichte Rechnung ergiebt, daß φ'_a sich auf nur zwei Glieder reduziert, eines erster Ordnung von der Form

$$\frac{A}{e}\sin(\chi - \chi_0),$$

eines zweiter von der Form

$$\frac{B}{e^2}\sin 2(\chi - \chi_1);$$

hierin bezeichnen A, B, χ_0, χ_1 Konstanten, von denen χ_0 und χ_1 nur von der Substanz und Orientierung des benutzten Cylinders abhängen, A mit Z proportional ist, und B durch eine lineäre Funktion von A, M, N dargestellt wird.

Dies Resultat ergiebt den Satz, daß ein als unendlich lang an-

zusehender Kreiscylinder, aus einem beliebigen acentrischen Krystall in beliebiger Orientierung hergestellt, durch longitudinalen Zug, wenn überhaupt, jederzeit derartig erregt wird, daß der Außenraum in zwei Hälften von entgegengesetzt gleichem elektrischen Verhalten geteilt wird, durch Drehungsmomente um die Längs- oder eine Queraxe hingegen so, daß beim Umkreisen viermal das gleiche elektrische Verhalten mit abwechselndem Vorzeichen auftritt. —

Die Gesetze der thermischen Erregung eines acentrischen Krystalles werden natürlich am einfachsten, wenn die Umstände eine in seinem Innern konstante Temperatur zulassen; indessen bietet dieser Fall nach dem S. 104 Gesagten große praktische Schwierigkeiten, die daraus fließen, daß die Herstellung eines konstanten Temperaturzuwachses τ stets längere Zeit erfordert.

Für eine Kugel vom Radius r_1, die weder äußeren mechanischen, noch elektrischen Einwirkungen ausgesetzt ist, genügt man den mechanischen Bedingungen durch den Ansatz

$$\Xi_x = H_y = \ldots = \Xi_y = 0, \tag{90}$$

den elektrischen durch

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i' &= Ax + By + Cz, \\ \varphi_a' &= \mathsf{A}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathsf{B}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{90'}$$

worin A, B, Γ die erregten elektrischen Gesamtmomente nach den Koordinatenaxen bezeichnen.

Die zweite Grenzbedingung (83″) liefert

$$\mathsf{A} = -Ar_1^3, \quad \mathsf{B} = -Br_1^3, \quad \Gamma = -Cr_1^3, \tag{90''}$$

und da nach (79′)

$$\left.\begin{aligned} -\alpha &= g_{11}A + g_{12}B + g_{13}C - p_1\tau, \\ -\beta &= g_{21}A + g_{22}B + g_{23}C - p_2\tau, \\ -\gamma &= g_{31}A + g_{32}B + g_{33}C - p_3\tau \end{aligned}\right\} \tag{90'''}$$

wird, so nimmt die zweite Bedingung (83′) die Form an

$$\left.\begin{aligned} A\bar{x} + B\bar{y} + C\bar{z} = -\frac{4\pi}{3}[(g_{11}A + g_{12}B + g_{13}C - p_1\tau)\bar{x} \\ + (g_{21}A + g_{22}B + g_{23}C - p_2\tau)\bar{y} \\ + (g_{31}A + g_{32}B + g_{33}C - p_3\tau)\bar{z}], \end{aligned}\right\} \tag{90''''}$$

woraus sich die Konstanten A, B, C ableiten lassen. Sie ergeben sich von Null verschieden nur bei den S. 116 erwähnten pyroelektri-

schen Krystallen im engeren Sinne des Wortes, wo die p_h nicht verschwinden, also in relativ seltenen Fällen.

Durch Einsetzen der Werte

$$X_i = -A, \quad Y_i = -B, \quad Z_i = -C, \quad \Xi_x, \ldots \Xi_y = 0$$

in (80') werden dann auch die Deformationsgrößen bestimmt.

Dies Problem steht in nächstem Zusammenhang mit demjenigen der Erregung einer Kugel bei konstanter Temperatur durch einen allseitig gleichen Druck Π.

Den mechanischen Bedingungen wird durch die Werte

$$\Xi_x = H_y = Z_z = \Pi, \quad H_z = Z_x = \Xi_y = 0$$

genügt, die Ansätze für φ_i' und φ_a' bleiben die gleichen, die in (90') gegeben sind, und in den Formeln (90'') für α, β, γ tritt nur

$$(d_{11} + d_{12} + d_{13})\,\Pi, \quad (d_{21} + d_{22} + d_{23})\,\Pi, \quad (d_{31} + d_{32} + d_{33})\,\Pi$$

an Stelle von $-p_1\tau$, $-p_2\tau$, $-p_3\tau$. —

Neben dem Falle konstanter Temperatur erweckt ein zweiter besonderes Interesse, nämlich der, bei welchem nur eine unendlich dünne Oberflächenschicht eine von derjenigen des ganzen betrachteten Körpers merklich abweichende Temperatur besitzt. Ist die Oberfläche stetig gekrümmt und wechselt die Temperatur längs derselben nur allmählich, so kann man ein kleines Bereich derselben als Stück einer unendlichen ebenen Begrenzung betrachten und die Deformationen und Drucke im ganzen Innern verschwindend und in der unendlich dünnen Schicht als nur von der Normalkoordinate abhängig annehmen.

Wählen wir das betrachtete Stück der Grenze zur XY-Ebene und betrachten demgemäß den Zustand als von z allein abhängig, so nehmen die Hauptgleichungen (84) die Gestalt

91) $$0 = \frac{\partial \Xi_z}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad 0 = \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

an, während die Oberflächenbedingungen (84') liefern

91') $$\overline{\Xi}_z = \overline{H}_z = \overline{Z}_z = 0 \quad \text{für} \quad z = 0.$$

Demgemäß wird Ξ_z, H_z, Z_z überall gleich Null sein müssen, und Gleiches gilt, da die Differentialquotienten nach x und y der Annahme nach verschwinden, von x_x, y_y, x_y, während

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad y_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad z_x = \frac{\partial u}{\partial z}$$

Funktionen von z allein werden; hierdurch sind die Bedingungen (84''') identisch erfüllt, und die Gleichungen $Z_z = H_z = \Xi_z = 0$ nehmen die Form an

$$\left.\begin{aligned} q_3\tau &= c_{33}z_z + c_{34}y_z + c_{35}z_x - e_{13}X_i - e_{23}Y_i - e_{33}Z_i, \\ q_4\tau &= c_{43}z_z + c_{44}y_z + c_{45}z_x - e_{14}X_i - e_{24}Y_i - e_{34}Z_i, \\ q_5\tau &= c_{53}z_z + c_{54}y_z + c_{55}z_x - e_{15}X_i - e_{25}Y_i - e_{35}Z_i, \end{aligned}\right\} \quad 91'')$$

worin X_i, Y_i, Z_i Funktionen von z allein sind.

Um die elektrischen Bedingungen (83) bis (83'') zu erfüllen, ist jedenfalls φ' lineär in x und y zu setzen, da im anderen Falle die Komponenten X, Y von x und y abhängen würden; damit auch Z nur z enthalte, muß φ' die Form haben

$$\varphi' = Ax + By + F(z),$$

worin A und B Konstanten sind.

Endliches A und B würde aber φ' mit unendlichen x und y unendlich machen; wir können daher $\varphi' = F(z)$ setzen, woraus $X = Y = 0$ folgt. Dann nimmt die Hauptgleichung (83) die Form an

$$\frac{dZ}{dz} = -4\pi\frac{d\gamma}{dz},$$

welche ergiebt

$$Z_i = C - 4\pi\gamma, \quad Z_a = C',$$

unter C und C' Konstanten verstanden.

Hier muß aber auch $C' = 0$ sein, da wegen der gleichen Größe der erregten positiven und negativen Ladung Z_a im Unendlichen verschwinden muß. Die zweite Oberflächenbedingung (83'') bestimmt nur die Integrationskonstante in φ', ist also ohne Belang für das spezielle Problem; die zweite Bedingung (83') liefert

$$C = 0.$$

Somit wird $Z_i = -4\pi\gamma$, und aus den drei Gleichungen (91''), in denen $X_i = Y_i = 0$ zu setzen ist, und der aus (79) folgenden Gleichung für γ, die sich schreiben läßt

$$-r_3\tau = e_{33}z_z + e_{34}y_z + e_{35}z_x + \frac{1 + 4\pi f_{33}}{4\pi}Z_i, \quad 91''')$$

läßt sich z_z, y_z, z_x und Z_i durch τ ausdrücken, während die Formeln (79) mit Hilfe dieser Werte α, β, γ liefern.

Selbstverständlich ergiebt die so erhaltene elektrische Verteilung im äußeren Raum eine konstante Potentialfunktion, und somit keine elektrischen Kräfte, wenn die Begrenzung des Dielektricums wirklich durch eine unendliche Ebene gebildet wird. Eine Wirkung tritt aber ein, wenn man, wie oben gesagt, eine stetig gekrümmte Oberfläche voraussetzt, die erhaltenen Werte von α, β, γ auf diesen Fall überträgt und die Potentialfunktion nach der allgemeinen Formel (33'') berechnet. Hier ist dann die Normale von Stelle zu Stelle anders gegen den Krystall orientiert, und die Formeln werden

demgemäß sehr kompliziert. Jedenfalls zeigt die vorstehende Entwickelung an einem wirklich durchführbaren Falle, daß bei ungleichförmiger, speziell oberflächlicher Erwärmung viele Krystallgruppen elektrische Erregung zeigen, die auf eine gleichförmige Erwärmung nicht reagieren, und hierin liegt ihre Bedeutung.

§ 15. Die freie Energie centrisch-krystallinischer und isotroper Körper bei Berücksichtigung der dielektrischen Eigenschaften. Elektrostriktion isotroper Körper.

Die Betrachtungen der letzten drei Paragraphen gelten ausschließlich für Krystalle, welche kein Symmetriecentrum besitzen, denn in anderen Fällen verschwinden mit Ausnahme des Elektrisierungspotentiales f'_d alle von den elektrischen Kräften abhängigen Glieder in dem Ansatz (69) für die freie Energie ξ_1. Wenn also bei centrisch-symmetrischen Krystallen und bei isotropen Körpern umkehrbare Vorgänge analoger Art stattfinden, welche durch die übrig bleibenden Terme nicht dargestellt werden, so muß man, um ihre Gesetze abzuleiten, in der Entwickelung von ξ_1 nach Potenzen der Unabhängigen zu den Gliedern dritten und höheren Grades fortschreiten. Dabei kann man sich allerdings meist bezüglich der Deformationsgrößen und der Temperatur auf die bisherige Annäherung beschränken, da es sich in Praxi immer um sehr kleine Deformationen und häufig um isothermische Vorgänge handelt; in Bezug auf die elektrischen Kraftkomponenten weiter zu gehen, legt aber schon der Umstand nahe, daß die in § 11 abgeleiteten Ausdrücke (62') für die sogenannten Maxwell'schen Spannungen in Bezug auf X, Y, Z vom zweiten Grade sind. Es kommen hiernach für unsere Zwecke nur zwei Ergänzungsglieder für ξ_1 in Betracht.

Von diesen läßt sich das erste, nämlich

$$\begin{aligned} -\tau\,[X(e'_{11}x_x + e'_{12}y_y + \dots + e'_{16}x_y) \\ + Y(e'_{21}x_x + e'_{22}y_y + \dots + e'_{26}x_y) \\ + Z(e'_{31}x_x + e'_{32}y_y + \dots + e'_{36}x_y)], \end{aligned}$$

mit den in die Konstanten e_{hk} multiplizierten Gliedern in (69) zu einer Funktion zusammenziehen, die bilinear ist in den X, Y, Z und den $x_x, \dots x_y$, und deren Parameter lineäre Funktionen der Temperatur sind. In den Fällen, die wir hier in erster Linie zu behandeln vorhaben, nämlich bei centrisch-symmetrischen Krystallen und isotropen Körpern, verschwinden aber, wie die Konstanten e_{hk}, auch

die neuen e'_{hk}; der ganze Ausdruck hat also für unseren speziellen Zweck keine Bedeutung.

Dagegen kommt für uns das zweite Glied in Betracht, welches wir schreiben

$$-\tfrac{1}{2}[X^2(\tau f_{11}^{(0)} + x_x f_{11}^{(1)} + y_y f_{11}^{(2)} + z_z f_{11}^{(3)} + y_z f_{11}^{(4)} + z_x f_{11}^{(5)} + x_y f_{11}^{(6)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 2XY(\tau f_{12}^{(0)} + x_x f_{12}^{(1)} + y_y f_{12}^{(2)} + z_z f_{12}^{(3)} + y_z f_{12}^{(4)} + z_x f_{12}^{(5)} + x_y f_{12}^{(6)})].$$

Dieses hat jedenfalls die Eigenschaft, für centrisch symmetrische Krystalle nicht zu verschwinden, es ergiebt also bei diesen und bei isotropen Körpern Gesetze möglicher elektrisch-elastisch-thermischer Erscheinungen. Es läßt sich mit dem dielektrischen Potential f_d zu einer quadratischen Form F_d von X, Y, Z zusammenfassen, welche sich von f_d nur dadurch unterscheidet, daß ihre Parameter nicht Konstanten, sondern lineäre Funktionen der Deformationsgrößen und der Temperatur sind.

Wir wollen setzen

$$-2F_d = F_{11}X^2 + F_{22}Y^2 + F_{33}Z^2 + 2F_{23}YZ + 2F_{31}ZX + 2F_{12}XY, \quad 92)$$

wo nun gilt

$$F_{hk} = f_{hk} + f_{hk}^{(0)}\tau + f_{hk}^{(1)}x_x + f_{hk}^{(2)}y_y + f_{hk}^{(3)}z_z + f_{hk}^{(4)}y_z + f_{hk}^{(5)}z_x + f_{hk}^{(6)}x_y; \quad 92')$$

dadurch nimmt dann die freie Energie die einfache Form an:

$$\xi_1 = \chi + F_d - \tfrac{1}{2}r\tau^2 - \tau(q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y), \quad 92'')$$

worin χ, r und die q_h dieselbe Bedeutung haben, wie S. 107.

Aus ihr folgt nach den allgemeinen Gleichungen (67'')

$$\left.\begin{array}{l} \Xi_x = X_x + q_1\tau + \tfrac{1}{2}(f_{11}^{(1)}X^2 + f_{22}^{(1)}Y^2 + \ldots + 2f_{12}^{(1)}XY), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Xi_y = X_y + q_6\tau + \tfrac{1}{2}(f_{11}^{(6)}X^2 + f_{22}^{(6)}Y^2 + \ldots + 2f_{12}^{(6)}XY); \end{array}\right\} \quad 93)$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = F_{11}X + F_{12}Y + F_{13}Z, \quad \beta = F_{21}X + F_{22}Y + F_{23}Z, \\ \gamma = F_{31}X + F_{32}Y + F_{33}Z, \quad \text{worin} \quad F_{hk} = F_{kh}; \end{array}\right\} \quad 93')$$

$$\eta_1 = q_1 x_x + \ldots + q_6 x_y + r\tau + \tfrac{1}{2}(f_{11}^{(0)}X^2 + f_{22}^{(0)}Y^2 + \ldots + 2f_{12}^{(0)}XY). \quad 93'')$$

Faßt man die sechs Gleichungen (93) mit den Faktoren $s_{h1}, s_{h2}, \ldots s_{h6}$ zusammen, wo $h = 1, 2, \ldots 6$ ist, und setzt

$$f_{ki}^{(1)}s_{h1} + f_{ki}^{(2)}s_{h2} + \ldots + f_{ki}^{(6)}s_{h6} = g_{ki}^{(h)}, \quad 94)$$

so erhält man bei Benutzung der Abkürzungen (73') und (74')

$$\left.\begin{array}{l} x_x = \xi_x + a_1\tau + \tfrac{1}{2}(g_{11}^{(1)}X^2 + g_{22}^{(1)}Y^2 + \ldots + 2g_{12}^{(1)}XY), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_y = \xi_y + a_6\tau + \tfrac{1}{2}(g_{11}^{(6)}X^2 + g_{22}^{(6)}Y^2 + \ldots + 2g_{12}^{(6)}XY), \end{array}\right\} \quad 94')$$

wobei zu beachten ist, daß diese Formeln die vollständigen Werte der Deformationsgrößen nur dann angeben, wenn die Gleichungen (93) gleichfalls die vollständigen Ausdrücke für die wirkenden Drucke liefern. Wir gehen hierauf weiter unten ausführlich ein.

Betrachtet man die Deformationsgrößen als neben Eins unendlich klein, was in Praxi fast immer zulässig ist, so werden die Funktionen F'_{hk} in (93') zu den Konstanten f_{hk}, und somit werden auch die Ausdrücke für die spezifischen Momente α, β, γ mit den in (43'') gegebenen durchaus konform; die Konstanten f_{hk} sind also jetzt mit den früher eingeführten $\mathfrak{e}_{hk}$ identisch. Da aber nach (43''')

$$\mathfrak{e}_{hh} = (\mathfrak{d}_{hh} - 1)/4\pi \quad \text{und} \quad \mathfrak{e}_{hk} = \mathfrak{d}_{hk}/4\pi$$

ist, so kann man auch für alle h und k in sogleich verständlicher Bezeichnung schreiben

$$4\pi f_{hk}^{(i)} = 4\pi\,\mathfrak{e}_{hk}^{(i)} = \mathfrak{d}_{hk}^{(i)},$$

und hieraus folgt ohne weiteres, daß die elektrischen Anteile an den Spannungen $\Xi_x, \ldots \Xi_y$ in (93) den auf S. 101 mit $A''_x, \ldots A''_y$ bezeichneten dielektrischen Spannungen genau entsprechen; es gilt nämlich

$$94'')\qquad A''_x = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}_{11}^{(1)} X^2 + \mathfrak{d}_{22}^{(1)} Y^2 + \ldots + 2\,\mathfrak{d}_{12}^{(1)} X Y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

was mit (65'') übereinstimmt.

Um die Funktion F_d, oder spezieller nur das Aggregat $F_d - f_d$ der die Deformationsgrößen enthaltenden Glieder, für die verschiedenen Krystallgruppen zu spezialisieren, hat man den zu behandelnden Ausdruck nur in die Form zu bringen

$$-\frac{1}{8\pi}\Big[X^2\Big(x_x\,\mathfrak{d}_{11}^{(1)} + y_y\,\mathfrak{d}_{11}^{(2)} + z_z\,\mathfrak{d}_{11}^{(3)} + \frac{y_z}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{11}^{(4)} + \frac{z_x}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{11}^{(5)} + \frac{x_y}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{11}^{(6)}\Big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\sqrt{2}\,XY\Big(x_x\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{12}^{(1)} + y_y\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{12}^{(2)} + z_z\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{12}^{(3)} + \frac{y_z}{\sqrt{2}}2\,\mathfrak{d}_{12}^{(4)} + \frac{z_x}{\sqrt{2}}2\,\mathfrak{d}_{12}^{(5)} + \frac{x_y}{\sqrt{2}}2\,\mathfrak{d}_{12}^{(6)}\Big)\Big].$$

Da die Deformationsgrößen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y sich transformieren, wie die Aggregate U^2, V^2, W^2, $2\,VW$, $2\,WU$, $2\,UV$ der Vektorkomponenten U, V, W, so stimmt die erhaltene Form mit der Bd. I, S. 142 als vierte bezeichneten überein; setzt man also $\mathfrak{d}_{11}^{(1)}$ an Stelle von $\mathfrak{c}_{11}$, $\sqrt{2}\,\mathfrak{d}_{12}^{(1)}$ an Stelle von $\mathfrak{c}_{61}$, $2\,\mathfrak{d}_{12}^{(5)}$ an Stelle von $\mathfrak{c}_{65}$ etc., so kann man die jeder Krystallgruppe entsprechenden Konstantensysteme direkt aus Schema IV, Bd. I. S. 143 u. f. entnehmen. —

Die durch (93) resp. durch (94'') gegebenen Werte der Druckkomponenten enthalten keine Anteile, welche den früher so genannten

MAXWELL'schen Spannungen entsprechen. Diese letzteren erscheinen hierdurch als ihrer Natur nach von den $A''_x, \dots A''_y$ verschieden, denn sie beteiligen sich nicht an den thermisch-mechanischen Umsetzungen; die ihnen zu Grunde liegenden Wirkungen werden daher bei allgemeinen Entwickelungen wohl besser gemäß den Formeln (62) und (63) als körperliche Kräfte und Oberflächendrucke geführt. Thut man dies, so sind die Formeln (93) für die Druckkomponenten, und demgemäß die (94') für die Deformationsgrößen beide vollständig; der Anteil der MAXWELL'schen Spannungen macht sich dann in den elastischen Drucken $X_x, \dots X_y$ geltend, die er modifiziert.

Zieht man dagegen die Form der Spannungen $A'_x, \dots A'_y$ vor, so muß man in den Formeln (93), wie auch in den in (94') vorkommenden Funktionen $\xi_x, \dots \xi_y$, die elastischen Drucke $X_x, \dots X_y$ durch die Aggregate $X_x + A'_x, \dots X_y + A'_y$ ersetzen. Die vollständigen Werte der Drucke lauten dann

$$\left.\begin{array}{l} (\Xi_x) = X_x + A'_x + A''_x + q_1 \tau = X_x + A_x + q_1 \tau, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\Xi_y) = X_y + A'_y + A''_y + q_6 \tau = X_y + A_y + q_6 \tau. \end{array}\right\} \quad 94''')$$

Endlich ist noch die Möglichkeit gegeben, die gesamten elektrischen Anteile $A_x, \dots A_y$ an den Drucken $\Xi_x, \dots \Xi_y$ in körperliche Kräfte und Oberflächendrucke zu verwandeln; dann reduzieren sich die Formeln (93) auf

$$\Xi_x = X_x + q_1 \tau, \dots \Xi_y = X_y + q_6 \tau,$$

die Werte (94') auf

$$x_x = \xi_x + a_1 \tau, \dots x_y = \xi_y + a_6 \tau,$$

wobei die $\xi_x, \dots \xi_y$ durch die Gleichungen (74'), also durch die elastischen Drucke $X_x, \dots X_y$ allein bestimmt sind.

Hier erscheint dann die elektrische Einwirkung auf die Deformationen als ganz durch die Drucke $X_x, \dots X_y$ vermittelt, die sich ihrerseits aus den körperlichen Kräften und Oberflächendrucken elektrischen Ursprungs bestimmen. —

Der bei weitem wichtigste Fall ist der eines isotropen Mediums, nicht nur aus praktischen Gründen, sondern auch, weil das Verhalten der Krystalle mit Symmetriecentrum von dem der isotropen Körper mehr nur quantitativ, als qualitativ abweicht, und deshalb ihre Behandlung, die im allgemeinen viel umständlicher ist, wenig lohnt.

Wir stellen daher den obigen allgemeinen Formeln nunmehr die für isotrope Medien geltenden gegenüber, wobei wir, gemäß

dem S. 136 Gesagten, durch die Bezeichnung die Identität der Größen f_{hh} und f_{hk} mit den früher benutzten $(\mathfrak{d}_{hh}-1)/4\pi$ und $\mathfrak{d}_{hk}/4\pi$ hervortreten lassen wollen.

Es gilt hier, falls $\mathfrak{d}$ die frühere Bedeutung hat, und $\mathfrak{d}^{(0)}, \dots \mathfrak{d}^{(3)}$ neue Konstanten bezeichnen,

$$f_{11}=f_{22}=f_{33}=\frac{\mathfrak{d}-1}{4\pi},\quad f_{11}^{(0)}=f_{22}^{(0)}=f_{33}^{(0)}=\frac{\mathfrak{d}^{(0)}}{4\pi},$$

$$f_{11}^{(1)}=f_{22}^{(2)}=f_{33}^{(3)}=\frac{\mathfrak{d}^{(3)}}{4\pi},\quad f_{11}^{(2)}=f_{11}^{(3)}=f_{22}^{(3)}=f_{22}^{(1)}=f_{33}^{(1)}=f_{33}^{(2)}=\frac{\mathfrak{d}^{(1)}}{4\pi},$$

$$f_{23}^{(4)}=f_{31}^{(5)}=f_{12}^{(6)}=\left(\frac{\mathfrak{d}^{(3)}-\mathfrak{d}^{(1)}}{8\pi}\right)=\frac{\mathfrak{d}^{(2)}}{8\pi},$$

während alle anderen $f_{hk}^{(i)}$ verschwinden.

Demgemäß wird, da noch $q_1=q_2=q_3=q$, $q_4=q_5=q_6=0$ ist, bei isotropen Medien aus dem System (93)

$$\Xi_x=X_x+q\,\tau+A_x'', \dots \Xi_y=X_y+A_y'';$$

95)
$$\begin{cases} A_x''=\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}^{(1)}K^2+\mathfrak{d}^{(2)}X^2), & B_y''=C_y''=\frac{1}{8\pi}\mathfrak{d}^{(2)}YZ,\\ B_y''=\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}^{(1)}K^2+\mathfrak{d}^{(2)}Y^2), & C_x''=A_z''=\frac{1}{8\pi}\mathfrak{d}^{(2)}ZX,\\ C_z''=\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{d}^{(1)}K^2+\mathfrak{d}^{(2)}Z^2), & A_y''=B_x''=\frac{1}{8\pi}\mathfrak{d}^{(2)}XY; \end{cases}$$

95′)
$$\begin{cases} \alpha=\frac{X}{4\pi}(\mathfrak{d}-1+\mathfrak{d}^{(0)}\tau+\mathfrak{d}^{(1)}\vartheta+\mathfrak{d}^{(2)}x_x)+\frac{\mathfrak{d}^{(2)}}{8\pi}(Yx_y+Zx_z),\\ \beta=\frac{Y}{4\pi}(\mathfrak{d}-1+\mathfrak{d}^{(0)}\tau+\mathfrak{d}^{(1)}\vartheta+\mathfrak{d}^{(2)}y_y)+\frac{\mathfrak{d}^{(2)}}{8\pi}(Zy_z+Xy_x),\\ \gamma=\frac{Z}{4\pi}(\mathfrak{d}-1+\mathfrak{d}^{(0)}\tau+\mathfrak{d}^{(1)}\vartheta+\mathfrak{d}^{(2)}z_z)+\frac{\mathfrak{d}^{(2)}}{8\pi}(Xz_x+Yz_y); \end{cases}$$

95″)
$$\eta_1=q\,\vartheta+r\,\tau+\frac{\mathfrak{d}^0}{8\pi}K^2.$$

Hierin bezeichnet ϑ, wie früher, die räumliche Dilatation $x_x+y_y+z_z$.

Von den obigen allgemeinen Formeln wollen wir nun die Anwendung machen auf die Theorie der im engeren Sinne als Elektrostriktion bezeichneten Erscheinungen an isotropen Körpern, d. h. auf die Gesetze der Formänderungen, welche die letzteren erleiden, wenn sie nur elektrischen Kräften ausgesetzt werden. Diese Formänderungen sind jederzeit sehr klein, die Temperatur ändert sich dabei gleichfalls äußerst wenig, man kann daher stets in den Formeln (95′) für α, β, γ die mit τ und mit $x_x, \dots x_y$ proportionalen Glieder vernachlässigen. Es läßt sich auch durch geeignete experimentelle Anordnung erreichen, daß in den Ausdrücken (94′) für die Deformationsgrößen das Temperaturglied unmerklich ist.

Die erste der erwähnten Beschränkungen vereinfacht das Problem ganz außerordentlich, da aus den elektrischen Bedingungsgleichungen alles auf das mechanische Verhalten des Dielektricums Bezügliche verschwindet. Das elektrische Problem wird dadurch vollständig isoliert und läßt sich als erstes ganz ohne Rücksicht auf das elastische behandeln. Dabei kann man nach Belieben von dem Bedingungssystem (82) oder (83) ausgehen, da in dem hier vorliegenden Falle wahre Ladungen durch mechanische Ursachen nicht auftreten können, die wahren Ladungen also in der Regel direkt oder indirekt vorgeschrieben sein werden.

Die theoretisch einfachste Anordnung des Experimentes ist diejenige, daß die ganze Oberfläche des Dielektricums mit leitenden Belegungen versehen ist, welche geeignete Ladungen tragen; hier ist es möglich, die Untersuchung auf das Dielektricum allein zu beschränken, während in anderen Fällen die Potentialfunktion auch im äußeren Raum zu bestimmen ist; überdies bietet die Anordnung meist den praktischen Vorteil größter Feldstärke bei gegebenen Potentialen. Wir wollen uns auf ihre Betrachtung beschränken.

Da die Formeln (95′) in unserem Falle lauten

$$\alpha = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi} X, \quad \beta = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi} Y, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{d} - 1}{4\pi} Z,$$

und da die Bedingung für φ' im Innern des Dielektricums nach S. 119 zu

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)$$

wird, so ergiebt sich als elektrische Hauptgleichung des Problems

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\triangle \varphi' = 0. \tag{96}$$

Hierzu kommen für die mit Leitern belegten Oberflächen vorgeschriebene Werte von φ' selbst.

Die mechanischen Hauptgleichungen des Problems lauten, wenn äußere körperliche Kräfte nicht wirken, allgemein

$$0 = \frac{\partial (\Xi_x)}{\partial x} + \frac{(\partial \Xi_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\Xi_z)}{\partial z}$$

u. s. f., also in unserem Falle wegen (94‴)

$$0 = \frac{\partial (X_x + A_x)}{\partial x} + \frac{\partial (X_y + A_y)}{\partial y} + \frac{\partial (X_z + A_z)}{\partial z} \tag{96'}$$

u. s. f., wobei die $X_x, \ldots X_y$ die elastischen, die $A_x, \ldots A_y$ die dielektrischen Spannungen bezeichnen.

Für erstere gilt nach Bd. I, S. 337 das System Gleichungen

96'')
$$\left\{\begin{array}{l} -X_x = c\,x_x + c_1\,y_y + c_1\,z_z = c_1\,\vartheta + c_2\,x_x, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -Y_z = \tfrac{1}{2}(c - c_1)\,y_z = \tfrac{1}{2}\,c_2\,y_z, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

für letztere benutzen wir die in (65'''') gegebene, auch aus (95) folgende Form

96''')
$$\left\{\begin{array}{l} A_x = \frac{1}{8\pi}\big((\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)})\,K^2 - (2\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})\,X^2\big), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_z = -\frac{1}{8\pi}\,(2\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)})\,Y Z, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

In der Grenze gegen die Belegungen müssen die Bedingungen

$$(\overline{\Xi}_n)_h + (\overline{\Xi}_n)_k = (\overline{H}_n)_h + (\overline{H}_n)_k = (\overline{Z}_n)_h + (\overline{Z}_n)_k = 0$$

erfüllt sein.

Da die Belegungen die Elektricität leiten sollen, so sind in ihnen die elektrischen Kräfte X, Y, Z, und daher auch die dielektrischen Spannungen $A_x, \ldots A_y$ gleich Null; sind sie zugleich sehr dünn, so gilt Gleiches von der elastischen Spannung $X_x, \ldots X_y$ daselbst, und die obigen Bedingungen reduzieren sich auf

96'''') $$\overline{X}_n + \overline{A}_n = 0, \quad \overline{Y}_n + \overline{B}_n = 0, \quad \overline{Z}_n + \overline{C}_n = 0,$$

wobei die Werte $X_n, \ldots C_n$ im Dielektricum zu nehmen sind.

Im Innern des Dielektricums sind die Spannungen $A_x, \ldots A_y$ äquivalent mit körperlichen Kräften

97) $$\Xi = -\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die im vorliegenden Falle isotroper Körper sehr einfache Werte besitzen.

Es gilt zunächst nach (96''')

$$\Xi = -\frac{1}{8\pi}\left[(\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)})\frac{\partial K^2}{\partial x} - (2\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}_2)\left(\frac{\partial X^2}{\partial x} + \frac{\partial XY}{\partial y} + \frac{\partial XZ}{\partial z}\right)\right],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

da aber die Kräfte eine Potentialfunktion φ' besitzen, welche die Gleichung $\triangle\,\varphi' = 0$ erfüllt, so giebt dies

97') $$\Xi = -\frac{\partial\,\Theta}{\partial x}, \quad H = -\frac{\partial\,\Theta}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial\,\Theta}{\partial z},$$

wobei

$$\Theta = \frac{2\,\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}}{16\,\pi} K^2. \qquad 97'')$$

Für die Komponenten A_n, B_n, C_n gilt zunächst nach (96''') allgemein

$$A_n = \frac{1}{8\,\pi}\left[(\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(1)}) K^2 \cos(n,x) - (2\,\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(2)}) X N\right],$$

. . . . ;

wirken sie gegen eine Fläche, längs deren, wie in den Grenzbedingungen (96'''') vorausgesetzt ist, die elektrische Potentialfunktion φ' einen konstanten Wert hat, so ist dort $K = N$ und $X = K \cos(n, x)$, also

$$A_n = D_n \cos(n, x), \quad B_n = D_n \cos(n, y), \quad C_n = D_n \cos(n, z), \qquad 97''')$$

worin

$$D_n = -\frac{1}{8\,\pi}(\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(1)} - \mathfrak{d}^{(2)}) K^2 \qquad 97'''')$$

einen normalen Druck gegen die Fläche $\varphi' =$ Const. repräsentiert. —

Von diesen Formeln machen wir nun die Anwendung auf eine Kugelschale[35]) vom inneren Radius r_i, vom äußeren r_a; die innere Belegung sei auf das Potential P_i, die äußere auf P_a geladen.

Nach Symmetrie ist dann φ' allein vom Radiusvektor r abhängig, und die Formel $\triangle \varphi' = 0$ wird zu

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi'}{\partial r}\right) = 0,$$

was auf

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{b}{r^2}, \quad \varphi' = a - \frac{b}{r} \qquad 98)$$

führt; die Konstanten a und b bestimmen sich durch die Nebenbedingungen zu

$$a = \frac{P_a r_a - P_i r_i}{r_a - r_i}, \quad b = \frac{(P_a - P_i) r_a r_i}{r_a - r_i}. \qquad 98')$$

Die elektrische Kraft K liegt parallel mit r, und es wird

$$K = -\frac{b}{r^2}. \qquad 98'')$$

Dieses Resultat ist nun in die Formeln (96''') resp. (97') für die dielektrischen Spannungen und mit diesen in die elastischen Gleichungen einzusetzen. Letztere vereinfachen sich erheblich, da nach Symmetrie die Verrückungen parallel dem Radius r liegen und von seiner Größe allein abhängig sein müssen.

Wir setzen daher

99) $$u = \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial h}{\partial z},$$

wo h eine Funktion von r allein ist; dieser Ansatz repräsentiert nach Bd. I, S. 347, eine sogenannte Potentialdeformation. Es wird dann

$$-X_x = c_2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + c_1 \triangle h, \quad -Y_z = c_2 \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}$$

u. s. f., und die Hauptgleichungen (96′), welche die Gestalt annehmen

$$\Xi = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

u. s. f., lauten nach Einsetzen aller Werte

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = c \triangle \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial y} = c \triangle \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = c \triangle \frac{\partial h}{\partial z},$$

woraus, wenn k eine Konstante bezeichnet, gefolgert werden kann

99′) $$k + \Theta = c \triangle h = \frac{c}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial h}{\partial r}\right).$$

Für die Druckkomponente, die normal gegen die Oberfläche wirkt, ergiebt sich nach einfacher Rechnung

99″) $$\pm N_n = c_2 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + c_1 \triangle h = c \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{2 c_1}{r} \frac{\partial h}{\partial r}.$$

Setzt man für Θ seinen Wert

$$\Theta = \frac{2 \mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}}{16 \pi} \frac{b^2}{r^4},$$

der aus (97″) und (98′) folgt, so erhält man aus (99′), falls k_1 und k_2 Integrationskonstanten bezeichnen,

99‴) $$h = \frac{(2 \mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}) b^2}{32 \pi c r^2} + \frac{k r^2}{6} - \frac{k_1}{r} + k_2.$$

Hieraus folgt für die Normalkomponente N_n der elastischen Spannung die Formel

$$\pm N_n = \frac{(2 \mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}) b^2}{16 \pi r^4} \frac{3 c - 2 c_1}{c} + \tfrac{1}{3} k (2 c_1 + c) - \frac{2 k_1}{r^3} (c - c_1),$$

während für diejenige der dielektrischen Spannung nach (97‴) gilt:

$$\pm D_n = \frac{(\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(1)} - \mathfrak{d}^{(2)}) b^2}{8 \pi r^4}.$$

Da für $r = r_i$, wie für $r = r_a$,

$$N_n + D_n = 0$$

sein soll, so sind zwei Gleichungen vorhanden, aus denen man die noch unbekannten Konstanten k und k_1 bestimmen kann.

Die allgemeinen Resultate der Berechnung sind kompliziert, sie werden relativ einfach, wenn man die Differenz $r_a - r_i$, d. h. die Dicke der Kugelschale, als klein neben r_i und r_a betrachten kann.

Kürzt man hier ab

$$(3c - 2c_1)(2\mathfrak{d}^{(1)} + \mathfrak{d}^{(2)}) + 2c(\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^{(1)} - \mathfrak{d}^{(2)})$$
$$= 2c\mathfrak{d} + 4(c - c_1)\mathfrak{d}^{(1)} + (c - 2c_1)\mathfrak{d}^{(2)} = \varkappa$$

und bezeichnet einen mittleren Wert von r_i und r_a mit r_1, so erhält man

$$r_1^4 k(2c_1 + c) = \frac{\varkappa b^2}{16\pi c}, \quad r_1 k_1 (c - c_1) = \frac{2\varkappa b^2}{48\pi c}.$$

Von besonderem Interesse ist die Vergrößerung des Kugelradius, d. h. der Wert $\partial h / \partial r$ für $r = r_1$; die durchgeführte Rechnung ergiebt

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \frac{b^2}{8\pi r_1^2} \frac{\mathfrak{d}(c + c_1) + \mathfrak{d}^{(1)}(c - c_1) - \mathfrak{d}_1^{(2)} c_1}{(c - c_1)(2c_1 + c)},$$

also einen von einem Aggregat aller drei Konstanten $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}^{(1)}$ und $\mathfrak{d}^{(2)}$ abhängigen Ausdruck. Beobachtungen der Größenänderung eines Kugelkondensators durch Ladung geben also über die Zahlwerte der Ergänzungskonstanten $\mathfrak{d}^{(1)}$ und $\mathfrak{d}^{(2)}$ keinen Aufschluß. —

Einen speziellen Fall der vorstehenden Aufgabe stellt die Frage nach dem Verhalten einer elastischen dielektrischen Flüssigkeit, z. B. eines Gases, in der Umgebung einer geladenen leitenden Kugel dar.

Hier ist einerseits c_2 gleich Null, da in einer ruhenden Flüssigkeit keine tangentialen Drucke bestehen können, andererseits ist $\mathfrak{d}^{(2)}$ gleich Null, weil die Dielektricitätskonstante in ihr nicht von Winkeländerungen abhängen kann; weiter ist in dem Wert für φ' die Konstante a gleich Null, weil φ' im Unendlichen verschwindet, endlich bestimmt sich b einfacher $= P_i r_i$, da $r_a = \infty$ und $P_a = 0$ zu setzen ist. Hiernach sind die vorstehenden Formeln zu spezialisieren.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der räumlichen Dilatation ϑ, so ist eine vollständige Integration der elastischen Gleichungen gar nicht nötig; da nach den Formeln (99) $\vartheta = \triangle h$ ist, so ergiebt sich hier aus (99') unmittelbar, weil ϑ im Unendlichen verschwinden, also die Konstante k gleich Null sein muß,

$$\Theta = c\vartheta,$$

oder nach Einsetzen des Wertes von Θ,

$$\vartheta = \frac{\mathfrak{d}^{(1)}}{8\pi c} K^2 = \frac{\mathfrak{d}^{(1)} b^2}{8\pi c r^4} = \frac{\mathfrak{d}^{(1)} P_i^2 r_i^2}{8\pi c r^4}.$$

Wenn, wie gewisse Beobachtungen [36]) schließen lassen, $(\mathfrak{d}-1)$ der Dichte des Gases proportional ist, so ist auch $\mathfrak{d}^{(1)}$ gleich $-(\mathfrak{d}-1)$, und das Resultat nimmt die Form an

$$\vartheta = -\frac{(\mathfrak{d}-1)P_i^2 r_i^2}{8\pi c r^4}.$$

Das Gas in der Nähe des Konduktors befindet sich also in verdichtetem Zustande. —

Bei den vorstehenden Betrachtungen ist, wie schon oben gesagt, die Temperatur konstant auf der normalen $\tau = 0$ gehalten gedacht und in den Formeln (95′) für die Momente auch der Einfluß der Deformationen ignoriert. Für eine Prüfung der Theorie wäre es sehr wesentlich, wenn es gelänge, die Konstanten $\mathfrak{e}^{(1)}$ und $\mathfrak{e}^{(2)}$, welche die Abhängigkeit der Momente von den Deformationsgrößen messen, durch die Beobachtung der Influenzierung von durch mechanische Kräfte deformierten Dielektrica zu bestimmen; indessen scheinen hier große praktische Schwierigkeiten vorzuliegen.

Erheblich einfacher ist die experimentelle Bestimmung des Einflusses, welchen die Temperatur auf die influenzierten Momente übt, weil sich derselbe viel beträchtlicher machen läßt, als derjenige mechanischer Kräfte.

Betrachtet man ein auf konstante Temperatur τ erwärmtes Dielektricum, so kann man für die Deformationsgrößen x_x, y_y, z_z den Wert $a\tau$ setzen, worin a den gewöhnlichen thermischen linearen Dilatationskoefficienten bezeichnet, also von den sekundären Wirkungen der Elektrostriktion abstrahieren. Es gilt dann nach (95)

$$100)\qquad \alpha = \frac{\mathfrak{d}'-1}{4\pi}X,\quad \beta = \frac{\mathfrak{d}'-1}{4\pi}Y,\quad \gamma = \frac{\mathfrak{d}'-1}{4\pi}Z,$$

worin

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + (\mathfrak{d}^{(0)} + 3\,\mathfrak{d}^{(1)}a + \mathfrak{d}^{(2)}a)\tau;$$

indessen dürfte die Kleinheit von a mitunter gestatten,

$$\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} + \mathfrak{d}^{(0)}\tau$$

zu setzen.

Ausgeführte Beobachtungen [37]) haben für feste, wie für flüssige Dielektrica nicht unbeträchtliche, und zwar für erstere meist positive, für letztere meist negative Werte $\mathfrak{d}^{(0)}$, ergeben; hieraus folgt eine erhebliche Veränderlichkeit der Dielektricitätskonstante und demgemäß auch der Elektrisierungszahl mit der Temperatur. Dies Resultat gestattet eine interessante Folgerung zu ziehen.

Denkt man eines jener Dielektrica ausschließlich elektrischen Kräften ausgesetzt und die Anordnung so getroffen, daß in seinem

Innern die Feldstärke konstant ist, so kann man $\vartheta = n K^2$ setzen, worin n eine Konstante bezeichnet, die aus den Formeln auf S. 139 und 140 zu bestimmen ist. Unter Rücksicht hierauf wird die Gleichung (95″) zu

$$\eta_1 = r\tau + \left(\frac{\mathfrak{d}^{(0)}}{8\pi} + q n\right) K^2, \tag{100'}$$

wobei die Bedeutung von r in Formel (81″″) angegeben ist; dies ergiebt bei adiabatischer Elektrisierung, wo $\eta_1 = 0$ ist, eine Temperaturänderung

$$\tau = -\left(\frac{\mathfrak{d}^{(0)}}{8\pi} + q n\right)\frac{K^2}{r}. \tag{100''}$$

Wenn wegen der Kleinheit von n das zweite Glied der Klammer neben dem ersten vernachlässigt werden kann, so gilt das Resultat, daß jene untersuchten Dielectrica bei einer Elektrisierung eine Abkühlung resp. eine Erwärmung erfahren müssen, die beiläufig mit dem Quadrat der Feldstärke proportional ist.

II. Kapitel.

Magnetismus.

§ 16. Die fundamentalen Erfahrungsthatsachen über permanente Magnete. Ihre Momente, ihre Axen und das Potential ihrer Wechselwirkung.

Die Erfahrung zeigt, daß eine Reihe von Körpern, insbesondere gewisse Eisenerze, von Natur die Eigenschaft besitzen, auf einander Kräfte und Momente auszuüben, welche von denen, die durch die allgemeine Gravitation bewirkt werden, verschieden sind, und daß andere Körper diese Eigenschaft dauernd oder vorübergehend annehmen, wenn sie jenen ersteren genähert oder aber der Einwirkung von elektrischen Strömen, auf die wir später ausführlicher eingehen, ausgesetzt werden.

Wir nennen alle diejenigen Körper magnetisch oder magnetisiert, welche auf jene zuerst genannten natürlichen Magnete Wirkungen von der Art äußern, wie sie zwischen zweien von letzteren nach dem Gesagten stattfinden.

Unsere Untersuchungen beziehen sich zunächst auf sogenannte permanente Magnete, d. h. auf Körper, die bei allen mit ihnen vorgenommenen Operationen ihren Zustand weder vorübergehend noch dauernd ändern. Zwar giebt es anscheinend derartige Körper in Wirklichkeit in aller Strenge ebensowenig, wie die influenzlosen oder absoluten Isolatoren, die wir im vorigen Kapitel voraussetzten; indessen doch soweit angenähert, daß ihre Annahme zum Zwecke der Entwickelung der Theorie eine physikalische Unmöglichkeit nicht involvieren dürfte. Glasharte, nicht zu dicke Stahlstäbe kommen dem Ideal permanenter Magnete ziemlich nahe.

Ein permanenter Magnet, der an der Erdoberfläche irgendwie beweglich befestigt ist, erleidet nach der Erfahrung magnetische Wirkungen, auch wenn wir ihm andere magnetische Körper nicht

nähern. Wir müssen daher nach dem Vorausgeschickten die Erde selbst als magnetisch ansehen.

Bezüglich dieser sogenannten erdmagnetischen Wirkung sehen wir als durch die Beobachtung sichergestellt an, daß sie auf Magnete von Dimensionen, welche die nicht übersteigen, mit denen wir operieren können, erstens niemals resultierende Kräfte, sondern stets nur resultierende Momente ausübt, und daß sie zweitens innerhalb sehr erheblicher Bereiche als von dem Ort unabhängig betrachtet werden kann.

Über die Wechselwirkung zwischen verschiedenen permanenten Magneten betrachten wir als Resultat der Beobachtung, daß die resultierenden Drehungsmomente in großen gegenseitigen Entfernungen bei ungeänderter gegenseitiger Orientierung der dritten Potenz dieser Entfernung umgekehrt proportional wechseln.

Verbindet man mit diesen Beobachtungsresultaten die durch die Analogie mit den elektrischen Kräften nahe gelegten beiden Annahmen, daß die zwischen permanenten Magneten stattfindenden Wechselwirkungen sich auf solche zwischen allen ihren Elementen zurückführen lassen, und daß letztere Wechselwirkungen ausschließlich in Kräften, nicht in Drehungsmomenten, bestehen, deren Größen nur Funktionen der Entfernung sind, und deren Richtungen in der Verbindungslinie liegen, so erhält man dadurch eine zur Ableitung der allgemeinen Gleichungen genügende Grundlage.

Die Gesamtkomponenten Ξ, H, Z der erdmagnetischen Wirkung auf einen permanenten Magneten müssen nach dem ersten Beobachtungsresultat, wie für einen endlichen Magneten, so für jeden durch geometrische Zerlegung aus ihm erhaltenen Teil, sich gleich Null ergeben. Denn ein solcher Teil ist wieder ein Magnet, und nach der Annahme permanenter Magnetisierung muß er einzeln denselben Zustand besitzen, wie im Verband der übrigen Teile; auch haben wir zunächst keine Veranlassung, irgend eine Art der Zerlegung als unmöglich auszuschließen.

Um diese Überlegung zu verwerten, müssen wir Ξ, H, Z gemäß den gemachten Hypothesen wirklich bestimmen. Die denkbar einfachste Form würde sich für dieselben ergeben, wenn man nur die Volumenelemente dk als Träger der magnetischen Wirkung betrachtete; man erkennt aber leicht, daß man bei einer solchen Verfügung mit dem zweiten Beobachtungsresultat in Widerspruch kommen würde. Wir sind daher gezwungen, auch den Oberflächenelementen do eines permanenten Magneten eine Wirkung beizulegen, was, wie sich zeigen wird, auf einen Widerspruch nicht führt.

Diesem Resultat entsprechend setzen wir nunmehr

$$101)\quad \begin{cases} \Xi = A'\left[\int \sigma\, d o + \int \varrho\, d k\right], \quad H = B'\left[\int \sigma\, d o + \int \varrho\, d k\right], \\ Z = C'\left[\int \sigma\, d o + \int \varrho\, d k\right], \end{cases}$$

worin A', B', C' Konstanten der erdmagnetischen Wirkung sind, und σ resp. ϱ je eine für den magnetischen Zustand des Oberflächenelementes do resp. des Volumenelementes dk charakteristische Skalargröße bezeichnet. Da

$$\Xi : H : Z = A' : B' : C'$$

ist, so stellen A', B', C' die Komponenten eines Vektors R' dar, dessen Größe die Intensität der erdmagnetischen Einwirkung mißt, und dessen Richtung mit der jener parallel ist.

Es kann dann die durch die erste Beobachtungsthatsache geforderte Eigenschaft, daß für jedes Integrationsgebiet

$$101')\quad \int \sigma\, d o + \int \varrho\, d k = 0$$

sein soll, nur dadurch bewirkt werden, daß sich das Raumintegral $\int \varrho\, d k$ völlig in ein Oberflächenintegral verwandeln läßt, welches das Integral $\int \sigma\, d o$ zu Null ergänzt.

Hierzu ist erforderlich, daß ϱ die Form besitzt

$$101'')\quad \varrho = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right),$$

in welcher, damit ϱ von dem Koordinatensystem unabhängig und dem Volumenelement dk individuell sei, α, β, γ Komponenten eines Vektors von gleicher Natur sein müssen, den wir mit μ bezeichnen wollen. Ferner ist erforderlich, daß α, β, γ stetige Funktionen der Koordinaten sind; wären sie längs einer Fläche o' unstetig, so müßte man o' der Begrenzung des Magneten zurechnen und in dem ersten Integral (101') mit berücksichtigen. Der Wert (101'') von ϱ führt die Gleichung (101') zurück auf

$$\int \left[\sigma + \overline{\alpha} \cos(n_i, x) + \overline{\beta} \cos(n_i, y) + \overline{\gamma} \cos(n_i, z)\right] d o = 0,$$

worin n_i die innere Normale auf do bezeichnet. Soll diese Gleichung bei jeder beliebigen Zerlegung des permanenten Magneten für jedes Stück gelten, so muß sein

$$101''')\quad \sigma = -\left[\overline{\alpha} \cos(n_i, x) + \overline{\beta} \cos(n_i, y) + \overline{\gamma} \cos(n_i, z)\right],$$

wodurch der Zusammenhang zwischen ϱ und σ festgelegt ist.

Diese Betrachtungsweise scheint zunächst mit der Annahme eines permanenten Magneten in Widerspruch zu kommen, weil die bei der Zerlegung neu auftretenden Oberflächenstücke dadurch eine Wirksamkeit erhalten, die sie zuvor nicht besaßen. Indessen

erkennt man leicht, daß die beiden Seiten einer Trennungsfläche derartig entgegengesetzt wirksam werden, daß sie sich beim Zusammenfügen der Teile zum Ganzen gegenseitig völlig neutralisieren; in der That giebt die Formel (101‴) für die eine den entgegengesetzten Wert σ, als für die andere.

Die hierdurch für ϱ und σ gefundenen Ausdrücke geben nur die analytischen Formen, in welchen diese Größen nach den beiden ersten Beobachtungsresultaten sich darstellen müssen. Bezüglich der absoluten Werte ist daran zu erinnern, daß die Art ihrer Einführung in ϱ und σ, und somit auch in α, β, γ und μ, einen konstanten Faktor unbestimmt läßt. Es ist daher durch das Bisherige zwar die Richtung λ des Vektors μ, welche man die magnetische Axe des Volumenelementes dk oder die lokale magnetische Axe nennt, bestimmt, nicht aber seine Größe, die man als das magnetische Gesamtmoment der Volumeneinheit bezeichnet, ebenso nicht diejenige der α, β, γ, welche die magnetischen Momente der Volumeneinheit oder die spezifischen Momente nach den Koordinatenaxen heißen.[35]) Auf die Bestimmung dieses noch willkürlichen Faktors werden wir weiter unten eingehen.

Um uns nun davon zu überzeugen, daß die Werte (101″) und (101‴) für ϱ und σ mit erdmagnetischen Drehungsmomenten vollkommen vereinbar sind, bilden wir den Wert des Momentes Λ um die X-Axe, welcher nach (101) lautet

$$\Lambda = C'\left[\int \overline{y}\sigma\, do + \int y\varrho\, dk\right] - B'\left[\int \overline{z}\sigma\, do + \int z\varrho\, dk\right];$$

setzt man hier ϱ und σ nach (101″) und (101‴) ein, so ergiebt sich nach Ausführung einer teilweisen Integration

$$\Lambda = C'\int \beta\, dk - B'\int \gamma\, dk.$$

Kürzt man ab

$$\int \alpha\, dk = \mathsf{A}, \quad \int \beta\, dk = \mathsf{B}, \quad \int \gamma\, dk = \Gamma, \tag{102}$$

so erhält man für die Drehungsmomente um alle drei Koordinatenaxen

$$\Lambda = C'\mathsf{B} - B'\Gamma, \quad M = A'\Gamma - C'\mathsf{A}, \quad N = B'\mathsf{A} - A'\mathsf{B}. \tag{102'}$$

Bei gegebener Orientierung des Magneten gegen das Koordinatensystem sind nach S. 148 die $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ ihm individuelle Konstanten, die man seine magnetischen Momente nach den Koordinatenaxen nennt. Sie sind im allgemeinen von Null verschieden; findet dies statt, so giebt es auch immer Orientierungen des Magneten, für welche die Drehungsmomente Λ, M, N nicht verschwinden. Die bisherigen theoretischen Resultate sind also mit der obigen zweiten Beobachtungsthatsache im Einklang.

Wie die α, β, γ, so haben auch die $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ den Charakter von Komponenten eines Vektors; wir bezeichnen den letzteren mit M und nennen seine Größe das Gesamtmoment des Magneten, seine Richtung, die wir mit dem Buchstaben Λ bezeichnen werden, seine magnetische Axe. Wie resultierende Vektoren jederzeit, so ist auch M als absolute Größe zu führen, während seine Komponenten nach den Koordinatenaxen, wie nach irgend welchen anderen festgesetzten Richtungen, positiv oder negativ sein können.

Ist α, β, γ innerhalb des Magneten konstant, so ist

$$\mathsf{A} = \alpha k, \quad \mathsf{B} = \beta k, \quad \Gamma = \gamma k,$$

wobei k das Volumen des Magneten bezeichnet; hier ist dann auch M gleich μk und Λ parallel zu λ. Im allgemeinen ist dagegen M von $\int \mu\, d k$, welches wohl als Magnetisierungsmoment bezeichnet wird, wesentlich verschieden, und ersteres kann verschwinden, während letzteres einen bedeutenden Wert besitzt.

Da in α, β, γ und μ noch ein gemeinsamer willkürlicher Faktor enthalten ist, so gilt Gleiches auch von $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ und M. —

Kehren wir zu unseren für $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ erhaltenen Formeln (102′) zurück, so zeigt ihre Betrachtung, daß, wie immer α, β, γ im Magneten variieren, jederzeit eine Richtung von R' gegen den Magneten, resp. eine Orientierung des Magneten gegen die Erde existiert, für welche die sämtlichen magnetischen Drehungsmomente verschwinden; diese Orientierung stellt, wenn andere Kräfte nicht vorhanden sind, eine Gleichgewichtslage des Magneten dar.

Die Momente $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ verschwinden, wenn

102″) $$A' : B' : C' = \mathsf{A} : \mathsf{B} : \Gamma,$$

d. h. wenn die Richtung der Axe Λ des Magneten derjenigen des erdmagnetischen Vektors R' gleich- oder entgegensinnig parallel ist. Diese Bedingung bestimmt aber die Orientierung des Magneten keineswegs vollständig; sie bleibt vielmehr erfüllt, wenn man den Magneten parallel mit sich verschiebt oder um die Richtung von M dreht. Hierauf beruht eine theoretisch einfache, aber allerdings nicht eben praktische Methode, um die Richtung von Λ für einen gegebenen Magneten experimentell zu bestimmen.

Entzieht man nämlich einen magnetischen Körper auf irgend eine Weise vollständig der Wirkung der Schwere, läßt ihn dann drei verschiedene Gleichgewichtslagen unter der Wirkung des Erdmagnetismus annehmen und bezeichnet bei jeder derselben auf ihm einen Punkt p_h, welcher senkrecht über einem in dem Körper markierten

festen Punkt p, z. B. seinem unterstützten Schwerpunkt, liegt, so ist die Axe des durch diese Punkte p_h mit der Spitze in p gelegten Kreiskegels der Richtung $\mathsf{\Lambda}$ parallel.

Die Erfahrung zeigt, daß, wenn in mittleren nördlichen geographischen Breiten beobachtet wird, im Falle des Gleichgewichtes die magnetische Axe $\mathsf{\Lambda}$ in einer wenig von dem geographischen Meridian abweichenden vertikalen Ebene, dem sogenannten magnetischen Meridian, liegt und sich von Süden nach Norden hin neigt; gleiche Lage hat demnach dort auch der erdmagnetische Vektor R'. —

Die beiden Seiten der Richtung $\mathsf{\Lambda}$ sind nicht gleichwertig; es ist nämlich, wie leicht aus den Formeln (102′) gefolgert werden kann, stabiles Gleichgewicht dann vorhanden, wenn die Bedingung (102″) in der Weise erfüllt wird, daß A, B, $\mathsf{\Gamma}$ einerseits, A', B', C' andererseits das gleiche Vorzeichen, labiles, wenn sie entgegengesetztes haben.

Im ersten Falle ist $A'/R' = \mathsf{A}/\mathsf{M}$, u. s. f., im letzteren $A'/R' = -\mathsf{A}/\mathsf{M}$, u. s. f. Wir wollen weiterhin die Seite der Richtung $\mathsf{\Lambda}$, die im Falle stabilen Gleichgewichtes nach Norden weist, als die positive bezeichnen.

Drückt man in den Formeln (102′) A', B', C' durch die Richtung und die Größe von R', ferner A, B, $\mathsf{\Gamma}$ durch diejenigen von M aus und führt eine Richtung S' ein, die normal auf der Ebene durch R' und $\mathsf{\Lambda}$ liegt, so daß $\mathsf{\Lambda}$, R', S' sich in dem gleichen Sinne folgen, wie X, Y, Z, so erhält man

$$\left.\begin{array}{c} L = R'\mathsf{M}\sin(\mathsf{\Lambda}, R')\cos(S', x), \quad M = R'\mathsf{M}\sin(\mathsf{\Lambda}, R')\cos(S', y) \\ N = R'\mathsf{M}\sin(\mathsf{\Lambda}, R')\cos(S', z), \end{array}\right\} \qquad 102''')$$

und somit für das resultierende Drehungsmoment Δ, dem die Richtung S' als Axe zugehört, den Wert

$$\Delta = R'\mathsf{M}\sin(\mathsf{\Lambda}, R'). \qquad 102'''')$$

Nehmen wir an, die Z-Axe stehe am Beobachtungsort normal zur Oberfläche der Erde, und der Magnet sei nur um sie drehbar, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$N = R'\mathsf{M}\sin(\mathsf{\Lambda}, R')\cos(S', z) = 0, \qquad 103)$$

was, da der Winkel $(\mathsf{\Lambda}, R')$ in mittleren Breiten nicht verschwinden kann, erfordert, daß gilt

$$\cos(S', z) = 0.$$

Legen wir noch die X-Koordinatenaxe im magnetischen Meridian nach Süden, die Y-Axe nach Osten und fixieren die Lage der

vertikalen Ebene durch Λ gegen die XY-Ebene durch den Winkel ν, der gleich Null sein möge, wenn die positive Seite von Λ nach Norden weist, so erhält man aus der dritten Formel (102') direkt

$$103') \qquad N = -A'\mathsf{B} = -H\mathsf{M}\sin(\Lambda, Z)\sin\nu,$$

worin H den absoluten Wert der Horizontalkomponente des Vektors R' bezeichnet. Liegt die Axe Λ normal zur Rotationsaxe, so wird noch einfacher

$$103'') \qquad N = -H\mathsf{M}\sin\nu. -$$

Für das Potential Ψ_{12} der Wechselwirkung zweier permanenter Magnete (1) und (2) erhält man nach den bisherigen Resultaten und der S. 147 gemachten Hypothese den Ansatz

$$\Psi_{12} = \int \sigma_2 \, d o_2 \left[\int \sigma_1 P \, d o_1 + \int \varrho_1 P \, d k_1\right] + \int \varrho_2 \, d k_2 \left[\int \sigma_1 P \, d o_1 + \int \varrho_1 P \, d k_1\right],$$

worin P eine Funktion der gegenseitigen Entfernung r der Elemente do resp. dk ist, in die es multipliziert erscheint.

Führt man für beide Magnete die Werte (101'') und (101''') der σ und ϱ ein, so folgt nach leichter Umformung in sogleich verständlicher Bezeichnung

$$104) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi_{12} = \iint \Big[& \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}\right) \\ & + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}\right) \\ & + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\alpha_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial P}{\partial z_1}\right)\Big] d k_1 \, d k_2. \end{aligned} \right.$$

Dieser Ausdruck für Ψ_{12} ist mit dem vorigen stets äquivalent, wenn beide Magnete kein Volumen gemeinsam haben. Wendet man den letzteren auf zwei gegen ihre Entfernung unendlich kleine Magnete von den Volumina k_1 und k_2 an und bezeichnet mit μ_1 und μ_2 die Größen der zu den Komponenten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gehörigen Vektoren, so erhält man bei Einführung der magnetischen Gesamtmomente $\mu_1 k_1 = \mathsf{M}_1$, $\mu_2 k_2 = \mathsf{M}_2$ und der ihnen entsprechenden Axen Λ_1 und Λ_2

$$104') \qquad \Psi_{12} = \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2}.$$

Bezeichnet man die Differentialquotienten von P nach der gegenseitigen Entfernung r der beiden Magnete durch obere Indices, so ist dies identisch mit

$$\Psi_{12} = \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \left(P'' \frac{\partial r}{\partial \Lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \Lambda_2} + P' \frac{\partial^2 r}{\partial \Lambda_1 \partial \Lambda_2} \right),$$

oder, da bei von (1) nach (2) positiv gerechnetem r

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \Lambda_1} &= -\cos(\Lambda_1, r), \quad \frac{\partial r}{\partial \Lambda_2} = +\cos(\Lambda_2, r), \\ r \frac{\partial^2 r}{\partial \Lambda_1 \partial \Lambda_2} &+ \frac{\partial r}{\partial \Lambda_1} \frac{\partial r}{\partial \Lambda_2} = -\cos(\Lambda_1, \Lambda_2) \end{aligned}\right\} \quad 104'')$$

ist, mit

$$\Psi_{12} = \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \left(\left(\frac{P'}{r} - P'' \right) \cos(\Lambda_1, r) \cos(\Lambda_2, r) - \frac{P'}{r} \cos(\Lambda_1, \Lambda_2) \right). \quad 104''')$$

Nennt man χ den Winkel zwischen den Ebenen durch Λ_1, r und durch Λ_2, r und setzt kurz

$$\sphericalangle (\Lambda_1, r) = \vartheta_1, \quad \sphericalangle (\Lambda_2, r) = \vartheta_2,$$

so gilt

$$\cos(\Lambda_1, \Lambda_2) = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\chi,$$

und man erhält aus (104''')

$$\Psi_{12} = -\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \left(P'' \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \frac{P'}{r} \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\chi \right). \quad 104'''')$$

Für die Ableitung der Wechselwirkungen aus dem Potential ist wesentlich die gemachte Annahme permanenter Magnete. Aus ihr folgt ohne weiteres, daß bei virtuellen Verschiebungen der Magnete die magnetische Verteilung sich nicht ändert, daß also die aufgewandte Arbeit und demzufolge die Komponenten und Momente sich nach den Bd. I, S. 102, für starre Körper gegebenen Regeln berechnen lassen.

Das ganze Drehungsmoment, welches der Magnet (2) erfährt, kann man zerlegen in die drei Momente um die Richtung von r, um die Normale auf r und Λ_2 und um eine zu diesen beiden normale dritte Axe; diese Momente werden nach jenen Regeln durch die negativen Differentialquotienten von Ψ_{12} erhalten, welche Drehungen um die genannten Axen entsprechen.

Bei der Drehung um die erste Axe variiert nur χ um $d\chi$, bei der um die zweite nur ϑ_2 um $d\vartheta_2$; eine Drehung um die dritte von der Größe $d\delta$ ändert nur χ um $d\delta . \operatorname{cotg} \vartheta_2$.

Das erste und das dritte Moment wird hiernach mit P'/r proportional, das zweite enthält, außer einem Glied derselben Natur, ein zweites, das mit P'' proportional ist. Berücksichtigt man die auf S. 147 erwähnte dritte Beobachtungsthatsache, welche alle Momente bei ungeänderter Orientierung mit $1/r^3$ proportional ergiebt, so erkennt man, daß die unbekannte Funktion P die Gestalt

$$P = f/r$$

haben muß, worin f eine Konstante ist, die nur noch von dem Medium, innerhalb dessen die Wechselwirkung stattfindet, abhängen kann.

Wir erhalten sonach schließlich [39])

105)
$$\left\{\begin{aligned}\Psi_{12}=f\iint\Bigg[&\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\alpha_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\\&+\beta_2\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\alpha_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\\&+\gamma_2\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\alpha_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+\beta_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+\gamma_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)\Bigg]d k_1\,d k_2.\end{aligned}\right.$$

Dieses Resultat zeigt, daß das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei permanenten Magneten dieselbe Form hat, wie das Newton'sche Potential zwischen zwei neutralen Körpern, welches Bd. I, S. 172, aufgestellt worden ist, daß es sich also ganz ebenso verhält, wie das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei erregten Dielektrica. Es liegt daher nahe, die Analogie noch zu vertiefen, indem man die Größen σ und ϱ als die flächenhaften und räumlichen Dichten eines Agens — des Magnetismus — deutet, welches die Wechselwirkungen scheinbar verursacht.

Da die Formel (101') die gesamte Menge des in einem permanenten Magneten befindlichen Magnetismus gleich Null ergiebt, so ist man gezwungen, positive und negative Magnetismen zu unterscheiden; über die Wahl dieser Benennung ist bereits dadurch verfügt, daß S. 151 der Sinn festgesetzt ist, in dem die magnetische Axe λ oder Λ positiv gerechnet werden soll.

Man erkennt dies am leichtesten, indem man α, β, γ innerhalb des Magneten konstant annimmt; dann gilt nach (101'') $\varrho = 0$ und nach (101''')

$$\sigma = +\bar{\mu}\cos(\lambda, n_a),$$

und da μ als absolute Größe gerechnet wird, so ist σ überall da positiv, wo die äußere Normale n_a mit der magnetischen Axe einen spitzen Winkel einschließt, negativ, wo einen stumpfen. Zieht man hinzu die oben getroffene Verfügung über die positive Richtung von Λ, so erhält man das Resultat, daß ein homogener Magnet, der im stabilen Gleichgewicht verharrt, auf der nördlichen, d. h. der Nordrichtung des erdmagnetischen Vektors R' zugewandten, Seite positiven, auf der südlichen negativen Magnetismus trägt. Dem-

gemäß bezeichnet man positiven Magnetismus auch wohl als nördlichen, negativen als südlichen. —

Durch die Grundformel (105) ist das Potential Ψ_{12} der Wechselwirkung zwischen zwei permanenten Magneten völlig definiert bis auf den bisher willkürlichen konstanten Faktor f, der durch Festsetzung der für die magnetischen Erscheinungen zu benutzenden Einheiten bestimmt werden kann, wie umgekehrt die Verfügung über ihn gewisse Einheiten einführt. Die Analogie mit den Formeln für Dielektrica legt nahe, ihn gleich einer reinen Zahl, und zwar gleich Eins zu wählen[40]; doch ist die Bedeutung dieser Verfügung hier nicht so einfach nachweisbar, wie in der Elektricitätslehre, weil die permanenten Magnete neutrale Körper sind, ihre Wechselwirkung sich also im Falle unendlicher Entfernung und endlicher Größe nicht auf diejenige zwischen zwei Massenpunkten reduziert, sondern auf diejenigen zwischen zwei Doppelpunkten.

Am anschaulichsten wird die Bedeutung durch Betrachtung der Drehungsmomente, welche zwei endliche Magnete in großer Entfernung aufeinander ausüben.

Um diese vorzunehmen, wenden wir die Formel (105), die wir bei Einführung der Festsetzung $f = 1$ auch schreiben können

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{12} = \iint\Big(&\alpha_1\alpha_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \beta_1\beta_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y_1\,\partial y_2} + \gamma_1\gamma_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z_1\,\partial z_2}\\ &+ \beta_1\gamma_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y_1\,\partial z_2} + \gamma_1\beta_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z_1\,\partial y_2} + \ldots + \beta_1\alpha_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y_1\,\partial x_2}\Big)dk_1\,dk_2,\\ = \iint &\mu_1\mu_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}\,dk_1\,dk_2,\end{aligned}\right\}\quad 105')$$

auf zwei gegen ihre Entfernung kleine Magnete an, wodurch wir erhalten

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{12} &= \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x_1\,\partial x_2} + \mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y_1\,\partial y_2} + \ldots + \mathsf{B}_1\mathsf{A}_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y_1\,\partial x_2}\\ &= \mathsf{M}_1\mathsf{M}_2\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial\Lambda_1\,\partial\Lambda_2};\end{aligned}\right\}\quad 105'')$$

dies ist nach (104'''') auch äquivalent mit

$$\Psi_{12} = -\frac{\mathsf{M}_1\mathsf{M}_2}{r^3}\left(2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\chi\right), \qquad 105''')$$

worin $\vartheta_1\ \vartheta_2$ und χ die frühere Bedeutung haben.

Aus der letzten Gleichung folgt, daß der Magnet (2) seitens (1) ein Moment um die Richtung von r erfährt von der Größe

$$106)\qquad \Pi = \frac{M_1 M_2}{r^3} \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \chi ,$$

um eine Richtung s normal zu r und zu Λ_2 dagegen

$$106')\qquad \Sigma = -\frac{M_1 M_2}{r^3}\left(2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos \chi\right),$$

wobei Π im Sinne von χ, Σ im Sinne von ϑ_2 positiv zu rechnen ist.

Liegt die eine der beiden Axen, z. B. Λ_2, in der Richtung von r, so wird der Winkel χ scheinbar unbestimmt; die Bestimmung liegt dann aber in der Festsetzung über s, das ja normal zu der Ebene durch Λ_2 und r angenommen wurde. Steht s normal zu der Ebene durch r und die Axe des anderen Magneten — hier Λ_1 —, so ist χ gleich Null zu setzen.

Demgemäß erhält man die folgenden beiden speziellen Werte von Σ.

Ist Λ_1 parallel und Λ_2 normal zu r, so ist $\chi = 0$, $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = \frac{1}{2}\pi$, also

$$106'')\qquad \Sigma_I = -\frac{2 M_1 M_2}{r^3};$$

ist Λ_2 parallel, Λ_1 normal zu r, so ist $\chi = 0$, $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_1 = \frac{1}{2}\pi$, also

$$106''')\qquad \Sigma_{II} = -\frac{M_1 M_2}{r^3}.$$

Für Π ergiebt sich ein einfacher Spezialwert, wenn

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \chi = \tfrac{1}{2}\pi$$

ist, also die Axen Λ_1 und Λ_2 normal zu einander und zu r liegen; er lautet

$$106'''')\qquad \Pi = \frac{M_1 M_2}{r^3}.$$

Jede der drei letzten Formeln gestattet eine einfache Deutung der getroffenen Verfügung $f = 1$. Es ist dadurch nämlich festgesetzt, daß ein unendlich kleiner Magnet von der Einheit des magnetischen Moments auf einen gleichen Magneten in der Entfernung Eins bei der ersten der vorstehenden Anordnungen das Drehungsmoment Zwei, bei den beiden letzten das Drehungsmoment Eins ausübt.

Durch die Festsetzung über f ist mit der Einheit auch die Dimension eines magnetischen Momentes gegeben.

Da die Dimension eines Drehungsmomentes gleich $m l^2 t^{-2}$ ist, so wird

$$[\mathsf{M}] = m^{1/2} l^{5/2} t^{-1}, \tag{107}$$

und es gilt für das Moment μ der Volumeneinheit

$$[\mu] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}; \tag{107'}$$

hieraus folgt mit Hilfe der Beziehungen (101″) und (101‴)

$$\left.\begin{array}{l} [\varrho] = m^{1/2} l^{-3/2} t^{-1}, \\ [\sigma] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}. \end{array}\right\} \tag{107''}$$

Diese Formeln sind mit den entsprechenden aus der Elektricitätslehre vollkommen identisch. —

An die oben gebildeten Werte für die Momente Π und Σ wollen wir schließlich noch einige Bemerkungen knüpfen.

Π verschwindet, wenn χ gleich 0 oder π ist; wäre der Magnet (1) fest, (2) um die Richtung von r drehbar, so fände in der ersten Position labiles, in der zweiten stabiles Gleichgewicht statt, wenn ϑ_1 und ϑ_2 zwischen 0 und π liegen. Die Erscheinung läßt sich dahin deuten, daß die gleichnamigen Enden der beiden magnetischen Axen sich scheinbar abstoßen, die verschiedenartigen sich anziehen.

Bildet man für den Magneten (1) das Drehungsmoment um die Richtung r, so erhält man den entgegengesetzt gleichen Wert, wie für (2). Dies gilt aber nicht für alle Axen. Nimmt man z. B. $\mathsf{\Lambda}_1$ und $\mathsf{\Lambda}_2$ in derselben Ebene durch r liegend an, setzt also $\chi = 0$, so erhält man die Werte der Drehungsmomente um die Normale S auf $\mathsf{\Lambda}_1$ und $\mathsf{\Lambda}_2$

$$\Sigma_2 = -\frac{\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2}{r^3}(2\cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2),$$

$$\Sigma_1 = -\frac{\mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2}{r^3}(2\sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2),$$

und diese sind keineswegs einander gleich.

Dies hängt nach Bd. I, S. 114, damit zusammen, daß die wechselwirkenden Kräfte zwischen zwei gegen ihre Entfernung unendlich kleinen Magneten im allgemeinen nicht in deren Verbindungslinie fallen. Man bestimmt die Gesamtkomponenten der Wechselwirkung am leichtesten aus der ersten Formel (105″) für Ψ; speziell die Komponente nach r findet sich aber noch bequemer aus (105‴), da bei einer Parallelverschiebung nach dieser Richtung die Winkel ϑ_1, ϑ_2 und χ sich nicht ändern.

Die sämtlichen Komponenten werden mit $1/r^4$ proportional, nehmen also noch schneller mit wachsender Entfernung ab, als die

ausgeübten Drehungsmomente. Sie sind überdies schwieriger zu beobachten, als diese, und deshalb zur Prüfung der Folgerungen der Theorie wohl niemals benutzt worden.

Denkt man die beiden Magnete starr mit einander verbunden, so resultieren aus diesen Kräften auf das System wirkende Momente, welche, da der Hebelarm mit r proportional ist, $1/r^3$ als Faktor haben; die Rechnung zeigt, daß sie je der Summe aus den oben für die gleichen Axen berechneten wechselseitigen Momenten entgegengesetzt gleich sind, wie dies nach dem Energieprinzip, das wegen der Existenz eines Potentiales hier Gültigkeit besitzt, in der That auch stattfinden muß.

§ 17. Die Potentialfunktion eines permanenten Magneten; ihre Entwickelung bei einem Magneten unbekannter Konstitution. Magnetpole.

Die Resultate des vorigen Paragraphen haben eine große Analogie zwischen dem Verhalten permanenter Magnete und demjenigen influenzierter Dielektrica aufgedeckt; wir gehen jetzt daran, dieselbe nach einer gewissen Richtung hin noch zu erweitern. Wie sich nämlich für die Wirkung der erregten Dielektrica eine Potentialfunktion als charakteristisch erwies, so gestatten auch die Potentiale permanenter Magnete die Zurückführung auf eine solche, die allerdings nicht ganz so einfach gewonnen wird, wie bei dem elektrischen Problem.

Wir wollen uns vorstellen, der eine der früher betrachteten permanenten Magnete, den wir statt durch (2) weiter durch (0) bezeichnen wollen, und dessen Koordinaten und Momente ohne Index geführt werden mögen, habe die Form eines gegen seine Dicke unendlich dünnen, aber beliebig gekrümmten Fadens von stetig variierendem Querschnitt q, sei z. B. ein harter Stahldraht, und seine Magnetisierung sei derartig, daß die lokale magnetische Axe überall der Cylinderaxe parallel liegt, und das magnetische Moment der Längeneinheit, nämlich $q\mu = m$, konstant ist. Einen solchen fadenförmigen Magneten nennen wir einen homogenen Linearmagneten.

Wir können dann schreiben, indem wir mit s die Axenkurve bezeichnen, also $dk = q\,ds$ setzen,

$$\Psi_{10} = m \int ds \frac{\partial}{\partial s} \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) dk_1,$$

oder nach Ausführung der Integration und bei Benutzung der Abkürzung

$$\int\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1 = \int \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} d k_1 = \psi, \tag{108)}$$

worin nun ψ eine Funktion allein der Koordinaten x, y, z des Linienelementes ds ist, auch

$$\Psi_{10} = m(\psi_+ - \psi_-); \tag{108')}$$

hierin sollen die Indices $_+$ und $_-$ andeuten, daß die Werte von ψ an den beiden Enden des Fadens zu nehmen sind.

Aus dieser Formel ist alles verschwunden, was sich auf die Gestalt der Axenkurve des Linearmagneten bezieht; sie enthält allein noch die Koordinaten seiner Endquerschnitte, die man seine Pole nennt. Die Stärke der Magnetisierung kommt nur in dem Produkt $q\mu = m$, d. h. dem Moment der Längeneinheit vor; da für die Endquerschnitte nach (101‴) gilt $\sigma_- = -\mu$, $\sigma_+ = +\mu$, so kann man auch schreiben $m = q_+ \sigma_+ = -q_- \sigma_-$, und hieraus ergiebt sich m als die absolute Größe der auf den Endquerschnitten oder in den Polen liegenden Magnetismen. Die Dimension der Polstärke m ist sonach

$$[m] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}. \tag{108'')}$$

Denkt man sich den Faden unendlich lang und den negativen Pol $s = 0$ unendlich fern von dem Magneten (1), versteht man weiter unter ψ ohne Index speziell den Wert von ψ am Orte x, y, z des positiven Poles, so reduziert sich die Formel (108′) auf

$$\Psi_{10} = m\psi; \tag{108''')}$$

falls noch der Cylinder derartig magnetisiert ist, daß $m = 1$, wird Ψ_{10} mit ψ identisch.

Hier ist dann Ψ_{10} eine Funktion nur der Koordinaten x, y, z des Einheitspoles, und die vollständige Übereinstimmung des Resultates mit der Formel (3″) einerseits und (33″) andererseits gestattet, der Funktion ψ den Namen der Potentialfunktion des permanenten Magneten beizulegen. Sie ist aber minder einfach definiert, als die Potentialfunktion φ einer elektrischen Verteilung, nämlich, um das Gesagte zu wiederholen, definiert als das Potential seiner Wirkung auf das positive Ende eines homogenen Linearmagneten, für welchen das magnetische Moment der Längeneinheit gleich Eins ist.

Die Dimension von ψ ist dieselbe, wie die von φ, da gleiches von Ψ und Φ, von m und e gilt; man hat also nach (5⁗)

$$[\psi] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}. \tag{108'''')}$$

Die auf den Einheitspol wirkenden magnetischen Komponenten, die weiterhin immer A, B, C heißen mögen, und deren Resultante, die immer mit R bezeichnet werden soll, sind gegeben durch

109)
$$\left\{\begin{aligned} A = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \end{aligned}\right.$$

haben also die Dimension

109′)
$$[R] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}.$$

Die magnetischen Kräfte R, resp. A, B, C, entsprechen genau den im ersten Kapitel benutzten elektrischen Kräften K, resp. X, Y, Z; wie K den Namen der elektrischen, so führt R auch denjenigen der magnetischen Feldstärke. —

Aus der Potentialfunktion ψ eines permanenten Magneten (1) kann man nach (105′) sogleich sein Potential auf einen zweiten (0) bestimmen; man erhält nämlich

109″)
$$\left\{\begin{aligned} \Psi_{10} &= \int \left(\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) d k \\ &= \int \mu \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} d k, \end{aligned}\right.$$

oder, unter Rücksicht auf (109), auch

109‴)
$$\Psi_{10} = -\int (\alpha A + \beta B + \gamma C) \, d k,$$

Formeln, die große praktische Bedeutung besitzen. —

Indem wir den negativen Pol des Linearmagneten (0) ins Unendliche gerückt haben, ist es uns gelungen, seine Wirkung zu beseitigen und die Analogie mit den Verhältnissen der Elektricitätslehre herzustellen. Dies Verfahren ist nicht immer anwendbar; es versagt z. B., wenn der lineare Magnet sich in einem Hohlraum des Magneten (1) befindet, und dann kann man einen Magnetpol auch theoretisch nicht isolieren. Wenn es sich um Messungen der Wirkungen handelt, die ein körperlicher Magnet (1) in seiner Umgebung übt, wird man in der Praxis häufig sogar auch dann auf die Herstellung eines isolierten Poles verzichten, wo es theoretisch möglich wäre, weil ein solcher Pol infolge des anhängenden Linearmagneten nur unvollkommen beweglich ist; man wird lieber die Kräfte und Momente beobachten, die ein zweiter körperlicher Magnet durch den zu untersuchenden erleidet, und die Verhältnisse passend nur dadurch vereinfachen, daß man den Hilfsmagneten sehr klein gegen seine Entfernung von dem gegebenen, oder, kurz gesagt, als Magnetnadel bildet.

Dann ist das Potential, das er erleidet, nach (109'') gegeben durch

$$\Psi_{10} = \mathsf{M}\frac{\partial \psi}{\partial \Lambda}. \tag{109''''}$$

Da sonach exakte Messungen, welche zu einer Prüfung der Grundlagen der Theorie dienen können, nicht die Wirkungen betreffen, welche isolierte Pole erleiden, sondern immer endliche Magnete benutzen, so ist im Vorstehenden die Entwickelung der allgemeinen Theorie auch auf deren Verhalten gegründet. Doch empfiehlt es sich weiterhin vielfach, zum Zwecke des vereinfachten Ausdrucks mit der auf einen Einheitspol bezogenen Wirkung, d. h. mit der Potentialfunktion ψ, zu operieren. —

Die Formel (109''') kann auch dazu dienen, die auf S. 147 bei Behandlung der auf einen beliebigen Magneten ausgeübten erdmagnetischen Wirkung eingeführten Komponenten A', B', C', und damit den resultierenden Vektor R', präzis zu deuten.

Nach dem dort Gesagten betrachten wir die Erde als einen permanenten Magneten und die von ihr ausgeübte Kraft als innerhalb beträchtlicher Bereiche, also jedenfalls innerhalb des ihrer Wirkung ausgesetzten Magneten (0), nach Größe und Richtung konstant. Die Gleichung (109''') nimmt hiernach die Form an

$$\Psi_{10} = -(A\mathsf{A} + B\mathsf{B} + C\Gamma),$$

worin A, B, Γ die frühere Bedeutung besitzen. Bestimmt man die Lage der magnetischen Axe Λ durch den Winkel a gegen die X-Axe und den Winkel l zwischen den Ebenen XY und $X\Lambda$, so ist

$$\mathsf{B} = \mathsf{M} \sin a \cos l, \quad \Gamma = \mathsf{M} \sin a \sin l,$$

also

$$\frac{\partial \mathsf{B}}{\partial l} = -\Gamma, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial l} = \mathsf{B};$$

hieraus folgt der Wert des Drehungsmomentes um die X-Axe

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial l} = C\mathsf{B} - B\Gamma;$$

ähnlich findet sich, als um die Y- und die Z-Axe wirkend,

$$\mathcal{M} = A\Gamma - C\mathsf{A}, \quad \mathcal{N} = B\mathsf{A} - A\mathsf{B}.$$

Vergleicht man diese Formeln mit (102'), so ergiebt sich

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C;$$

A', B', C' sind also die auf einen Einheitspol wirkenden Komponenten der erdmagnetischen Kraft, R' ist ihre Resultante. —

Die Potentialfunktion ψ nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn der Magnet (1) lineär und homogen magnetisiert ist. Die An-

wendung desselben Verfahrens, von dem S. 159 in Bezug auf Ψ Gebrauch gemacht ist, ergiebt, falls der konstante Parameter $q_1 \mu_1 = m_1$ gesetzt wird,

110) $$\psi = m_1 \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right),$$

wobei r_+ die Entfernung von dem positiven, r_- die Entfernung von dem negativen Pol bezeichnet. Ein homogener lineärer Magnet giebt also die gleiche Potentialfunktion, wie zwei entgegengesetzt gleiche, nach dem NEWTON'schen Gesetz wirkende, in seinen Enden liegende Massenpunkte.

Sind beide Magnete lineär und homogen, so erhält man durch Kombination von (108') und (110)

110') $$\Psi_{10} = m\,m_1 \left(\frac{1}{r_{++}} + \frac{1}{r_{--}} - \frac{1}{r_{+-}} - \frac{1}{r_{-+}}\right),$$

worin die r durch die Indices als die Entfernungen zwischen den verschiedenen positiven und negativen Polen charakterisiert sind.

Das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei homogenen Linearmagneten reduziert sich sonach auf dasjenige von vier in ihren Polen befindlichen Massen $\pm m$ und $\pm m_1$, welche nach dem NEWTON'schen Gesetz aufeinander wirken; das Vorzeichen der einzelnen Glieder ergiebt, daß dabei gleichartige Massen sich abstoßen, ungleichartige sich anziehen. —

Ein anderer, besonders einfacher und wichtiger Fall ist der, daß der Magnet die Gestalt einer irgendwie gekrümmten, gegen ihre seitliche Ausdehnung sehr dünnen Platte hat, und die Magnetisierung derart ist, daß an jeder Stelle die lokale Axe λ normal zur Mittelfläche o_1 der Platte steht. Führt man die Dicke $d n_1$ der Platte ein, vertauscht also $d k_1$ mit $d o_1\, d n_1$, und kürzt man das Produkt $\mu_1\, d n_1$ in ν_1 ab, wo nun ν_1 die Bedeutung des magnetischen Momentes der Flächeneinheit der Platte hat, so erhält man aus (108)

110'') $$\psi = \int \nu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1}\, d o_1\,;$$

eine solche Platte ist also nach Bd. I, S. 173 einer magnetischen Doppelfläche äquivalent.

Ist ν_1 konstant, so hat, wie ebenda gezeigt, das darein multiplizierte Integral den Wert der Kegelöffnung ω_1 von dem Einheitspol nach der Randkurve von o_1 hin, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die positive oder die negative Seite der magnetischen Axe dem Einheitspol zugewandt ist; es gilt somit

110''') $$\psi = \nu_1\, \omega_1.$$

Dabei sei bemerkt, daß nach Bd. I, S. 177 die Kraftkomponenten, welche eine solche homogene magnetische Doppelfläche auf einen Einheitspol ausübt, die Werte besitzen

$$\left.\begin{aligned} A=\nu_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}dy_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}dz_1\right),\quad B=\nu_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}dz_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}dx_1\right),\\ C=\nu_1\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}dx_1-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}dy_1\right); \end{aligned}\right\}\quad 110'''')$$

die Integration ist über die Randkurve s_1 der Doppelfläche zu erstrecken, deren Element ds_1 die Projektionen dx_1, dy_1, dz_1 besitzt.

Von den Fällen körperlicher Magnete hat wegen seiner Einfachheit und wegen späterer Anwendungen der homogener Magnetisierung besondere Bedeutung; hier ist die magnetische Potentialfunktion nach dem Bd. I, S. 169 Gesagten sogleich angebbar, wenn der Wert der Newton'schen Potentialfunktion des mit homogener Dichte erfüllten Volumens bekannt ist. Für die Kugel ist der bezügliche Ausdruck Bd. I, S. 161 Formel (168') angegeben.

Allgemeinere wichtige Gesetze über mögliche Arten der Magnetisierung folgen aus dem Bd. I, S. 193 u. f. Mitgeteilten. —

Während wir bisher die Gesetze der Wirkung von Magneten gegebener Konstitution untersucht haben, so bietet sich nun die Frage, in wie weit wir für einen gegebenen Magneten diese Konstitution, d. h. also die Werte der spezifischen Momente in allen seinen Punkten theoretisch oder experimentell bestimmen können.

Denken wir uns etwa einen harten Stahlstab durch Kräfte, welche von permanenten oder veränderlichen Magneten ausgehen, dauernd magnetisiert, so würde das Ziel der Theorie dieses Prozesses offenbar eine Formel sein, welche die Momente α, β, γ an jeder Stelle des Stahlstabes darstellt als Funktionen der Kräfte, welche je auf diese Stelle gewirkt haben, und der Zeiten, zu welchen sie ausgeübt worden sind. Eine solche Theorie ist aber kaum in ersten Ansätzen vorhanden, und hieraus folgt, daß, um über den Zustand eines permanenten Magneten Aufklärung zu erhalten, in erster Linie die Beobachtung die Hilfsmittel bieten muß. Aber auch sie kann nur Beschränktes leisten, und zwar, ganz abgesehen von praktischen Schwierigkeiten, schon deshalb, weil die Aufgabe, aus den Wirkungen auf äußere Punkte die Konstitution des Magneten zu finden, unbestimmt ist und somit unendlich viele Lösungen gestattet. Es bedarf daher immer noch der Ergänzung durch will-

kürliche Beschränkungen, um sie zu einer bestimmten zu machen, und von diesen ist die sachgemäßeste diejenige, die magnetisch wirksamen Massen durchaus auf der Oberfläche des Magneten liegend anzunehmen, also $\varrho = 0$ zu setzen. In der That ist schon auf S. 188 des I. Bandes und dann auf S. 24 dieses Bandes gezeigt, daß jede Verteilung von nach dem Newton'schen Gesetz wirksamen Massen innerhalb einer geschlossenen Oberfläche in Bezug auf äußere Punkte durch eine, und zwar nur eine Oberflächenbelegung zu ersetzen ist.

Eine solche Verteilung giebt nun zwar eine anschauliche Vorstellung von der Wirkungsweise des betreffenden Magneten, hat aber mit seiner wahren Konstitution direkt nichts zu thun und besitzt um so geringeres Interesse, als ihre Einführung nicht einmal der Potentialfunktion ψ eine besonders bequeme Form erteilt.

Für die Praxis verzichtet man daher auf die Kenntnis der Konstitution der benutzten permanenten Magnete und stellt sich ausschließlich das Ziel, ihre Potentialfunktion auf äußere Punkte zu bestimmen; dies gelingt in wichtigen Fällen auf dem Wege der Reihenentwickelung, die man soweit fortsetzt, als die Glieder für die geforderte Genauigkeit merkliche Größe besitzen, wobei die Werte der Konstanten durch die Beobachtung bestimmt werden. Diese Reihen konvergieren jederzeit nur innerhalb gewisser Bereiche.

Geht man von der Grundformel (108) für die Potentialfunktion

$$\psi = \int \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d k_1$$

aus, legt den Koordinatenanfang in das Innere des Magneten und nimmt den Punkt x, y, z so fern an, daß sein Abstand r_0 vom Koordinatenanfang groß gegen den aller Volumenelemente $d k_1$ ist, so kann man die Differentialquotienten von r nach Potenzen von x_1, y_1, z_1 entwickeln und erhält, da

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} \right)_0 = - \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \right)_0 = - \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right)_0 = - \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z}$$

ist, die folgende Reihe

$$\psi = \int \left[\alpha_1 \left(- \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x} + x_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x^2} + y_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x \partial y} + z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x \partial z} - \tfrac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x^3} - \dots \right) \right.$$
$$\left. + \beta_1 \left(- \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y} + x_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x \partial y} + \dots \right) + \gamma_1 \left(- \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z} + x_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x \partial z} + \dots \right) \right] d k_1 .$$

Hierin ordnen wir den früheren Bezeichnungen (102)

$$\int \alpha_1\, d k_1 = \mathsf{A}, \quad \int \beta_1\, d k_1 = \mathsf{B}, \quad \int \gamma_1\, d k_1 = \Gamma,$$

in denen für die nächste Entwickelung die Indices $_1$ rechts unterdrückt sind, die weiteren

$$\left.\begin{array}{l} \int \alpha_1\, x_1\, dk_1 = \mathsf{A}_1,\ \int \alpha_1\, y_1\, d k_1 = \mathsf{A}_2, \ldots\ \int \beta_1\, x_1\, d\, k_1 = \mathsf{B}_1, \ldots \\ \frac{1}{2}\int \alpha_1 x_1^2\, dk_1 = \mathsf{A}_{11},\ \int \alpha_1 x_1 y_1 dk_1 = \mathsf{A}_{12}, \ldots \int \beta_1 x_1 y_1\, dk_1 = \mathsf{B}_{12}, \ldots \end{array}\right\} \quad 111)$$

zu und erhalten so

$$\left.\begin{array}{l} \psi = -\left(\mathsf{A}\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x} + \mathsf{B}\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y} + \Gamma\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z}\right) \\ \quad + \mathsf{A}_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x^2} + \mathsf{A}_2 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial y} + \mathsf{A}_3 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial z} \\ \quad + \mathsf{B}_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial y\, \partial x} + \mathsf{B}_2 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial y^2} + \mathsf{B}_3 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial y\, \partial z} \\ \quad + \Gamma_1 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial z\, \partial x} + \Gamma_2 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial z\, \partial y} + \Gamma_3 \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial z^2} \\ \quad -\left(\mathsf{A}_{11} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x^3} + \mathsf{A}_{12} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x^2\, \partial y} + \mathsf{A}_{13} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x^2\, \partial z} + \ldots\right) \\ \quad -\left(\mathsf{B}_{11} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial y\, \partial x^2} + \mathsf{B}_{12} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial y^2} + \mathsf{B}_{13} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \ldots\right) \\ \quad -\left(\Gamma_{11} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial z\, \partial x^2} + \Gamma_{12} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial y\, \partial z} + \Gamma_{13} \dfrac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial x\, \partial z^2} + \ldots\right); \end{array}\right\} \quad 111')$$

dies kürzen wir ab in

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots \qquad 111'')$$

und denken in jedes ψ_h die Glieder mit $h$ten Differentialquotienten zusammengefaßt.

Die Funktion ψ_h läßt sich schreiben φ_h / r_0^{2h+1}, worin φ_h eine ganze rationale Funktion $h$ten Grades von x, y, z darstellt; ψ_h genügt nach seiner Definition der Gleichung $\triangle\, \psi_h = 0$, und gleiches gilt, wie durch Rechnung leicht zu zeigen, auch von φ_h. Die Funktionen ψ_h sind die allgemeinen fallenden, die φ_h die allgemeinen steigenden Kugelfunktionen; sie lassen sich in etwas einfachere, aber minder symmetrische Formen zusammenziehen, indem man die in gleiche

Differentialquotienten von $1/r_0$ multiplizierten Glieder zusammenfaßt und überdies die Beziehung $\triangle(1/r_0)=0$ benutzt.

Die Reihe (111') konvergiert für Punkte außerhalb der Kugelfläche um den Koordinatenanfang, welche den Magneten von außen berührt, ohne ihn zu schneiden. Sie gestattet eine einfache Deutung, wenn man die S. 163 des I. Bandes eingeführten, durch successive Multiplikation aus einem Punkte entwickelten Polsysteme heranzieht. Der Magnet wird hiernach in Formel (111') ersetzt durch die Übereinanderlagerung von derartigen Polsystemen, die sämtlich im Koordinatenanfang liegen und ihre Multiplikationsrichtungen in den Koordinatenaxen haben.

Faßt man die Parameter $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma \ldots$ als Produkte von Vektorkomponenten auf, setzt also

$$111''')\left\{\begin{array}{l}
-\mathsf{A}=\mathsf{M}_1\cos(l_1, x),\ -\mathsf{B}=\mathsf{M}_1\cos(l_1, y),\ -\Gamma=\mathsf{M}_1\cos(l_1, z)\\
+\mathsf{A}_1\ =\mathsf{M}_1'\cos(l_1', x)\cos(l_2', x),\ +\mathsf{A}_2=\mathsf{M}_1'\cos(l_1', x)\cos(l_2', y),\ldots\\
+\mathsf{B}_1\ =\mathsf{M}_1'\cos(l_1', y)\cos(l_2', x),\ +\mathsf{B}_2=\mathsf{M}_1'\cos(l_1', y)\cos(l_2', y),\ldots\\
+\Gamma_1\ =\mathsf{M}_1'\cos(l_1', z)\cos(l_2', x),\ +\Gamma_2=\mathsf{M}_1'\cos(l_1', z)\cos(l_2', y),\ldots\\
-\mathsf{A}_{11}=\mathsf{M}_1''\cos(l_1'', x)\cos(l_2'', x)\cos(l_3'', x),\ldots\\
-\mathsf{B}_{11}=\mathsf{M}_1''\cos(l_1'', y)\cos(l_2'', x)\cos(l_3'', x),\ldots\\
-\Gamma_{11}=\mathsf{M}_1''\cos(l_1'', z)\cos(l_2'', x)\cos(l_3'', x),\ldots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

so erhält man einfacher

$$111'''')\ \psi=+\mathsf{M}_1\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial l_1}+\mathsf{M}_1'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial l_1'\partial l_2'}+\mathsf{M}_1''\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial l_1''\partial l_2''\partial l_3''}+\ldots,$$

woraus ersichtlich wird, daß jede der fallenden Kugelfunktionen ψ_h als die Potentialfunktion eines durch successive Multiplikation entwickelten Polsystemes vom $h$ten Grade aufgefaßt werden kann.

Setzt man einen dieser Werte von ψ in die Formel (109'''') für das Potential auf einen gegen seine Entfernung unendlich kleinen Magneten (0) ein, so kann man nach dem S. 153 Gesagten die Drehungsmomente berechnen, welche derselbe in verschiedenen Positionen seitens des Magneten (1) erfährt, und die Beobachtung dieser Momente kann umgekehrt zur Bestimmung der Parameter von ψ dienen. Deren Anzahl ist, wie man sieht, selbst bei Beschränkung auf die Glieder dritter Ordnung im allgemeinen eine sehr große, die Aufgabe ihrer Bestimmung also eine sehr komplizierte. Der Wert von ψ vereinfacht sich aber, wenn der Magnet seiner Gestalt nach gewisse Symmetrien besitzt, und die Einwirkungen, durch welche er

erregt ist, im Einklang mit diesen Symmetrien ausgeübt sind, so daß man annehmen kann, daß die Momente α, β, γ nach gewissen Gesetzmäßigkeiten verteilt sind.

Besitzt z. B. der Magnet seiner Gestalt nach zwei zu einander normale Symmetrieebenen und ist er so magnetisiert, daß jene Ebenen auch magnetische Symmetrieebenen sind, so wählen wir sie zu *XZ*- und *YZ*-Koordinatenebenen. Es ist dann α und β in spiegelbildlich sich entsprechenden Punkten bald von gleicher, bald von entgegengesetzter, γ dagegen stets von gleicher Größe, und man kann leicht durch Diskussion der Formeln (111) konstatieren, welche der Parameter $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \ldots$ verschwinden müssen.

Schneller und ohne Rechnung gelangt man zu der definitiven Formel für ψ, wenn man die S. 164, Bd. I, für die Symmetrien von neutralen Polsystemen angegebenen Regeln benutzt.

Man erkennt durch sie, daß unter den vorausgesetzten Umständen in der Gleichung (111'''') l_1 parallel der *Z*-Axe, l_1' und l_2' in einer Koordinatenebene symmetrisch zu einer Koordinatenaxe, l_1'' und l_2'' ähnlich wie l_1' und l_2', l_3'' parallel der *Z*-Axe liegen muß, u. s. f.

Demgemäß reduziert sich ψ auf

$$\left.\begin{aligned}\psi = -\Gamma\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial z} + (\mathsf{A}_1 - \Gamma_3)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial x^2} + (\mathsf{B}_2 - \Gamma_3)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial y^2}\\ - (\mathsf{A}_{13} + \Gamma_{11} - \Gamma_{33})\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial x^2\,\partial z} - (\mathsf{B}_{23} + \Gamma_{22} - \Gamma_{33})\frac{\partial^3\frac{1}{r^0}}{\partial y^2\,\partial z} \pm \cdots\end{aligned}\right\} \qquad 112)$$

Sind die *XZ*- und *YZ*-Ebenen gleichwertig, so wird noch einfacher

$$\psi = -\Gamma\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial z} + (\Gamma_3 - \mathsf{A}_1)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial z^2} - (\Gamma_{33} - \mathsf{A}_{13} - \Gamma_{11})\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial z^3} \pm \cdots \qquad 112')$$

Hat der Magnet nach Form und Konstitution den Charakter eines Rotationskörpers um die *Z*-Axe, so ist diese eine unendlichvielzählige Symmetrieaxe; alle Multiplikationsrichtungen müssen daher mit ihr zusammenfallen, und (111''') liefert hier direkt

$$\psi = \mathsf{M}_1\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial z} + \mathsf{M}_1'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial z^2} + \mathsf{M}_1''\frac{\partial^3\frac{1}{r_0}}{\partial z^3} \pm \cdots \qquad 112'')$$

Jede Kugelfunktion ψ_h enthält hier also nur noch eine Konstante, ist, wie man sagt, einfach; daraus folgt, daß die Verfügung über die Werte, die ψ längs der *Z*-Axe annimmt, ψ für das ganze Konvergenzbereich der Reihe bestimmt.

Die Vergleichung des Resultates (112″) mit (112′) ergiebt, daß bis auf Glieder vierter Ordnung exklusive ein Magnet, der zwei gleichwertige normale Symmetrieebenen besitzt, gleichfalls den Charakter eines Rotationskörpers hat.

Noch ist über den Koordinatenanfangspunkt nicht verfügt; legen wir ihn so, daß

$$\Gamma_3 = \mathsf{A}_1$$

wird, eine Beziehung, die sich nach der Definition beider Größen stets erfüllen läßt, so ist auch M_1' gleich Null, und

$$112''') \qquad \psi = \mathsf{M}_1 \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z} + \mathsf{M}_1'' \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial z^3} + \cdots;$$

ψ enthält hier in der obigen Annäherung nur ungerade Glieder, ist also in gegen die XY-Ebene sich spiegelbildlich entsprechenden Punkten von entgegengesetzt gleicher Größe.

Eine ähnliche Vereinfachung ist in dem der Formel (112) entsprechenden allgemeineren Fall durch die Verfügung über den Koordinatenanfang nicht zu erreichen; hier sind die Glieder zweiter Ordnung aber z. B. dann gleich Null, wenn man durch die XY-Ebene den Magneten in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften teilen kann, die in entsprechenden Punkten gleiche Momente γ und entgegengesetzte α, β besitzen. —

Betrachtet man ein auf der Z-Axe, und zwar mit seiner Mitte im Koordinatenanfang gelegenes Polpaar $\pm m$ in dem nicht unendlich kleinen Abstand l, so gilt für dessen Potentialfunktion ψ' der Ausdruck

$$112'''') \qquad \psi' = -m\, l \left(\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z} + \frac{l^2}{24} \frac{\partial^3 \frac{1}{r_0}}{\partial z^3} + \cdots \right).$$

Die Vergleichung mit der Formel (112‴) ergiebt, daß man einen Magneten, welcher eine Potentialfunktion vom Charakter eines Rotationskörpers besitzt, jederzeit bis auf die Glieder vierter Ordnung exklusive durch zwei Pole ersetzen kann, deren Stärke und deren Abstand durch die beiden Bedingungen

$$m\, l = \Gamma = \mathsf{M}_1,$$

$$\frac{m\, l^3}{24} = \Gamma_{33} - \mathsf{A}_{13} - \Gamma_{11} = \mathsf{M}_1''$$

bestimmt werden. Diese Pole scheinen also in hohem Grade geeignet, den magnetischen Zustand des betrachteten Körpers zu charakterisieren.

Es ist indessen zu beachten, daß unter Umständen aus den vorstehenden Gleichungen ein negatives l^2, also ein imaginärer Polabstand folgt, und dies weist darauf hin, daß jene Darstellung zwar vielfach bequem sein, aber doch das Wesentliche nicht wiedergeben kann.

Auch der allgemeinere Ausdruck (112) wird nach Beseitigung der Glieder zweiter Ordnung mit (112'''') vergleichbar; das Resultat der Betrachtung ist, daß der gegebene Magnet für alle Punkte eines Radiusvektors mit denselben zwei Polen äquivalent ist, daß aber jedem Radiusvektor im allgemeinen andere Pole entsprechen. [41]) —

Der obigen ersten Entwickelung für die Potentialfunktion entspricht eine zweite, bei welcher der wirkende Magnet weit vom Koordinatenanfang abliegend, dagegen der Punkt x, y, z ihm nahe angenommen ist. Hier ist zu setzen

$$\left.\begin{aligned}\psi = \int\Bigg[&\alpha_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x_1} - x\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x_1^2} - y\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x_1\,\partial y_1} - z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x_1\,\partial z_1} + \tfrac{1}{2}x^2\frac{\partial^3\frac{1}{r}}{\partial x_1^3} + \dots\right)\\ &+\beta_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y_1} - x\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x_1\,\partial y_1} - \dots\right) + \gamma_1\left(\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z_1} - x\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x_1\,\partial z_1} - \dots\right)\Bigg]dk_1,\end{aligned}\right\}\ 113)$$

worin $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ das Quadrat der Entfernung des Volumenelementes dk_1 vom Koordinatenanfang bezeichnet. Wir kürzen diese Reihe ab in

$$\left.\begin{aligned}\psi = \Delta_0 &- (x\,\Delta_1 + y\,\Delta_2 + z\,\Delta_3)\\ &+ \tfrac{1}{2}(x^2\,\Delta_{11} + y^2\,\Delta_{22} + z^2\Delta_{33} + 2\,y\,z\,\Delta_{23} + \dots) + \dots,\end{aligned}\right\}\ 113')$$

worin die Δ Konstanten bezeichnen, oder wie oben in

$$\psi = \psi_0' + \psi_1' + \psi_2' + \dots. \qquad 113'')$$

Da ψ im Raume außerhalb des Magneten die Gleichung $\triangle\psi = 0$ erfüllen muß, so gilt gleiches von den einzelnen Gliedern ψ_h'; da sie gleichzeitig ganze rationale Funktionen von x, y, z sind, so stellen sie, wie oben die φ_h, steigende Kugelfunktionen dar und können sich von jenen nur durch die Werte der in ihnen enthaltenen Konstanten unterscheiden.

Die Reihe konvergiert innerhalb einer Kugel um den Koordinatenanfang, die den Magneten mit ihrer äußeren Fläche berührt, ohne ihn zu schneiden. —

§ 18. Experimentelle Bestimmung der Konstanten permanenter Magnete. Die Gauss'sche Theorie des Erdmagnetismus.

Die Beobachtungen zur Bestimmung der Potentialfunktion eines gegebenen permanenten Magneten komplizieren sich in praxi dadurch, daß die Magnetnadel (0), welche, wie oben gesagt, beweglich aufgehängt gedacht ist, stets der Wirkung des Erdmagnetismus unterliegt. Es ist ein Kunstgriff von Gauss, die letztere der Messung dienstbar zu machen.[42]

Denken wir die Nadel um eine vertikale Axe drehbar, und bestimmen wir ihre Lage durch den Winkel ν, welchen ihre horizontal gelegte magnetische Axe mit dem magnetischen Meridian einschließt, so ist nach (103'') das vom Erdmagnetismus ausgeübte Moment

$$-\mathsf{M} H \sin \nu,$$

worin H die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Feldstärke bezeichnet.

Das Drehungsmoment der Wechselwirkung ist

$$-\partial \Psi_{10} / \partial \nu,$$

die Bedingung des Gleichgewichtes lautet also

$$114)\qquad \frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \nu} + \mathsf{M} H \sin \nu = 0.$$

Kann die Nadel (0) als unendlich klein gegenüber ihrer Entfernung von dem Magneten (1) betrachtet werden, so ist nach (109'''')

$$\Psi_{10} = \mathsf{M} \frac{\partial \psi}{\partial \Lambda},$$

also die obige Formel identisch mit

$$114')\qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \nu \, \partial \Lambda} + H \sin \nu = 0.$$

Denkt man den Wert (111') für ψ hier eingesetzt, so erkennt man, wie durch Kombination von Beobachtungen in verschiedenen Lagen die unabhängigen Parameter von ψ bestimmt werden können; allerdings erhält man zunächst nur ihre Verhältnisse zu H, — als erstes z. B. M_1 / H — und ihre absolute Größe kann erst angegeben werden, wenn H auf andere Weise gefunden ist.

Zu dieser Bestimmung eignet sich vor allem eine Beobachtung über die Schwingungsdauer des Magneten (1) unter der Wirkung des Erdmagnetismus, wobei jener passend um eine vertikale Axe derartig drehbar befestigt ist, daß seine magnetische Axe horizontal

liegt. Bezeichnet man dann den Winkel zwischen dieser Axe und dem magnetischen Meridian mit ν_1, das Trägheitsmoment des Magneten durch $\mathfrak{M}_1$, so erhält man die Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_1 \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial t^2} + \mathsf{M}_1 H \sin \nu_1 = 0. \qquad 114'')$$

Aus der Schwingungsdauer, die, auf unendlich kleine Amplituden reduziert, den Wert

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathsf{M}_1 H}}$$

besitzt, kann man bei bekanntem $\mathfrak{M}_1$ — über dessen Bestimmung Bd. I. S. 109 gesprochen ist — das Produkt $\mathsf{M}_1 H$ ableiten, und da nach obigem auch das Verhältnis M_1/H bestimmbar ist, so kann man die beiden Werte M_1 und H gesondert berechnen. —

Wir schließen an die Erwähnung der wichtigsten Methode zur Bestimmung der einen erdmagnetischen Konstante H eine Bemerkung über die Ableitung zweier anderer, die mit H zusammen Größe und Richtung der erdmagnetischen Kraft am Beobachtungsort vollständig anzugeben gestatten. Es sind dies die Winkel ι und δ der Inklination und der Deklination, deren erster die Neigung der Kraft gegen die Horizontalebene angiebt, und deren letzter die westliche Abweichung der Vertikalebene durch die Richtung der Kraft, d. h. des magnetischen Meridians, von dem geographischen Meridian darstellt.

Die Deklination δ bestimmt sich relativ leicht, indem man einen permanenten Magneten um eine an ihm feste Axe $\varDelta$ drehbar befestigt und seine Gleichgewichtslage einmal beobachtet, wenn die eine, sodann, wenn die andere Seite dieser Axe vertikal nach oben gerichtet ist. Das Mittel aus den Winkeln, welche eine im Magneten feste und normal zu $\varDelta$ stehende Richtung P in diesen beiden Positionen mit dem geographischen Meridian einschließt, giebt den Wert von δ. In praxi sucht man die magnetische Axe so genau, als möglich, in die Richtung von P zu legen.

Die Bestimmung der Inklination ι bietet wesentlich größere experimentelle Schwierigkeiten. Die direkte Methode, von der hier allein zu handeln ist, setzt einen Magneten voraus, der um eine durch den Schwerpunkt seiner Masse gehende Axe $\varDelta$ reibungslos drehbar ist, während seine magnetische Axe wieder einer zu $\varDelta$ normalen Richtung P möglichst nahe gebracht ist. Wird der Magnet um die horizontal und dabei senkrecht zum magnetischen Meridian gelegte Axe $\varDelta$ drehbar befestigt, während einmal die eine, das andere Mal die zweite Seite von $\varDelta$ nach Osten weist, so ist das Mittel

der Winkel, welche in den beiden Gleichgewichtslagen die Richtung P mit der Horizontalebene einschließt, gleich ι. Auf die praktischen Schwierigkeiten dieser Methode einzugehen ist hier nicht der Ort. —

Die oben erörterten Entwickelungen der Potentialfunktion eines permanenten Magneten gewinnen eine besondere Bedeutung bei der Untersuchung des magnetischen Zustandes der Erde, die man jedenfalls insofern als dauernd magnetisch ansehen kann, als sie durch die Einwirkung der zur Untersuchung benutzten Beobachtungsmagnete nur unmerklich in ihrem Zustand geändert wird.[43])

Betrachten wir die Erde als Kugel, so wird die Potentialfunktion aller inneren Magnetismen für äußere und Oberflächenpunkte durch die erste Entwickelung gegeben sein, dagegen die Potentialfunktion etwaiger äußerer Magnetismen für innere und Oberflächenpunkte durch die zweite. Solche äußere, scheinbare magnetische Massen brauchen, wie wir später zeigen werden, nicht an feste Körper gebunden zu sein und sind daher von vornherein keineswegs auszuschließen. Der allgemeinste Ausdruck für den Wert der Potentialfunktion an der Erdoberfläche ist die Summe beider Reihen.

Wir bezeichnen den Radius der Erde mit a, die Entfernung des betrachteten Punktes vom Centrum mit r, und können dann die beiden Entwickelungen offenbar schreiben

115) $$\psi = \frac{a^3}{r^2} Y_1 + \frac{a^4}{r^3} Y_2 + \frac{a^5}{r^4} Y_3 + \dots$$

für

$$a \leqq r$$

und

115′) $$\psi = Z_0 + r Z_1 + \frac{r^2}{a} Z_2 + \frac{r^3}{a^2} Z_3 + \dots$$

für

$$a \geqq r .$$

Hierin sind die Y_h und Z_h ganze, rationale, homogene Funktionen $h$ten Grades der Argumente x/r, y/r, z/r, von denen nur zwei voneinander unabhängig vorgeschrieben werden können; sie werden zum Unterschied von den früher eingeführten Kugelfunktionen passend Kugelflächenfunktionen genannt. Da Y_h von gleichem Grade ist, wie Z_h, kann es sich von ihm nur durch die Werte der Konstanten unterscheiden.

Statt der Argumente x/r, y/r, z/r kann man auch einführen die Poldistanz ϑ in Bezug auf den geographischen Nordpol und die von Westen nach Osten von einem beliebigen Meridian aus gerechnete geographische Länge χ.

Man erhält dann für die Komponenten S nach dem Lot auf

der Erdoberfläche, T nach dem Meridian in der Richtung nach Süden, P nach dem Parallelkreis in der Richtung nach Osten die folgenden Formeln

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad T = -\frac{\partial \psi}{r \partial \vartheta}, \quad P = -\frac{\partial \psi}{r \sin \vartheta \partial \chi}$$

oder bei Benutzung der Abkürzungen

$$\cos \vartheta = \xi, \quad \sin \vartheta = \eta$$

auch

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad T = +\frac{\eta \partial \psi}{r \partial \xi}, \quad P = -\frac{\partial \psi}{r \eta \partial \chi}. \qquad 115'')$$

Diese Komponenten hängen mit den direkt beobachteten Größen H, δ, ι zusammen durch die Formeln

$$H^2 = \overline{P}^2 + \overline{T}^2, \quad \operatorname{tg} \delta = \overline{P}/\overline{T}, \quad \operatorname{tg} \iota = \overline{S}/H,$$

lassen sich also aus ihnen berechnen. —

Aus den Formeln (115'') folgt ganz unabhängig von dem speziellen Gesetz für ψ ein merkwürdiges allgemeines Resultat.

Kennt man nämlich längs eines Bereiches der Erdoberfläche die Werte von S, T, P, und somit auch ihre Differentialquotienten nach ξ und χ, so kann man daraus die in eben jenem Bereich stattfindenden Änderungen dieser Größen in der Richtung der Normalen, d. h. ihre ersten Differentialquotienten nach r berechnen.

Aus den Definitionen (115'') folgt nämlich ohne weiteres

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\eta} T\right) = -\frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial r}(r \eta P) = +\frac{\partial S}{\partial \chi},$$

oder

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{T}{r} - \frac{\eta}{r}\frac{\partial S}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{P}{r} + \frac{1}{r \eta}\frac{\partial S}{\partial \chi},$$

wodurch das Gesagte für T und P ganz allgemein erwiesen ist.

Um Analoges für S zu erhalten, bedarf es der vielleicht einigermaßen bedenklichen Annahme, daß an der betrachteten Stelle wirksame Magnetismen nicht liegen, ψ dort also die Gleichung

$$\triangle \psi = 0$$

erfüllt. Diese Formel nimmt bei Einführung der Unabhängigen r, ξ, χ die Gestalt an

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2 \partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\eta^2 \partial \psi}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} = 0,$$

oder

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r^2 S) + \frac{\partial}{\partial \xi}(r \eta T) - \frac{r}{\eta}\frac{\partial P}{\partial \chi} = 0;$$

daraus folgt aber unmittelbar

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{2S}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \eta T}{\partial \xi} - \frac{1}{r\eta}\frac{\partial P}{\partial \chi},$$

was das Gesagte nun auch in Bezug auf S beweist.

Diese Beziehungen sind von Interesse, wenn es sich darum handelt, den magnetischen Einfluß von Gebirgsmassen durch die Beobachtung zu konstatieren. Bestimmt man durch Messungen in einem weiteren Umkreis die horizontalen Änderungen von S, T, P und berechnet daraus nach den obigen Formeln $\partial S/\partial r, \ldots$ so ergeben sich die Werte $S_h, \ldots.$ in der Höhe h über der Erdoberfläche nach den Formeln

$$S_h = \overline{S} + h\,\overline{\frac{\partial S}{\partial r}}, \ldots;$$

sie können, wenn die Beobachtungsstationen das Gebirge in hinreichend großer Entfernung umgeben, als von dessen Wirkung frei betrachtet werden. Ihr Unterschied von denen, die aus Messungen auf dem Gebirge selbst geschlossen werden, stellt dann den Einfluß des letzeren dar. —

Wir wollen nun weiterhin zunächst die Annahme verfolgen, daß der Sitz der erdmagnetischen Wirkung sich allein im Innern der Erde befände, wollen also den Entwickelungen speziell die erste Reihe (115) zu Grunde legen.

Ihr Einsetzen in die Formeln (115″) führt auf die folgenden Werte:

115‴) $\overline{S} = \Sigma(h+1)Y_h, \quad \overline{T} = \eta\,\Sigma\frac{\partial Y_h}{\partial \xi}, \quad \overline{P} = -\frac{1}{\eta}\Sigma\frac{\partial Y_h}{\partial \chi};$

die Summen sind von $h = 1$ bis $h = \infty$ zu nehmen.

Diese Formeln gestatten drei einfache allgemeine Sätze abzuleiten, welche sich auf die Bestimmung der Parameter der Y_h, und somit auch von ψ durch die Beobachtung beziehen.

Die Kenntnis von $\overline{S}$ für die ganze Erdoberfläche genügt für sich allein, um ψ und damit auch S, T und P für alle Werte $r \geqq a$ abzuleiten; denn die erste Formel (115‴) für $\overline{S}$ enthält dieselben Kugelfunktionen, wie die Formel (115) für ψ, nur mit anderen Faktoren multipliziert.

Die Kenntnis von $\overline{T}$ für alle Stellen der Erdoberfläche genügt gleichfalls für sich, um den allgemeinen Wert von ψ abzuleiten.

In der That folgt aus der zweiten Formel (115‴)

$$\int\frac{\overline{T}\,d\xi}{\eta} = \Sigma Y_h + F(\chi),$$

worin F die statt einer Integrationskonstanten auftretende Funktion

von χ allein bezeichnet. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und ϑ, d. h. $\xi = 1$ und ξ, so fällt $F(\chi)$ heraus; der Wert der Summe rechts für die untere Grenze wird als auf den Nordpol bezüglich konstant, und man erhält

$$\int_1^\xi \frac{\overline{T}\,d\xi}{\eta} = \Sigma Y_h - C.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist nach Annahme bekannt; rechts befindet sich außer C kein konstantes Glied, die Formel gestattet sonach die Bestimmung der Parameter in den Y_h, wie zu beweisen war.

Die Kenntnis von $\overline{P}$ an der ganzen Erdoberfläche und die von $\overline{T}$ längs eines Meridians genügt gleichfalls, um den allgemeinen Wert von ψ abzuleiten.

Man erhält nämlich zunächst aus der dritten Formel (115''')

$$\eta \int \overline{P}\,d\chi = f(\xi) - \Sigma Y_h,$$

und bei Einsetzen in die zweite Formel (115''')

$$\overline{T} = \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f(\xi) - \eta \int \overline{P}\,d\chi\right).$$

Wendet man dies auf zwei Meridiane $\chi = 0$ und χ an, so ergiebt sich

$$\overline{T}_\chi - \overline{T}_0 = - \left| \eta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\eta \int \overline{P}\,d\chi\right)\right|_0^\chi,$$

und somit der Wert von $\overline{T}_\chi$, wenn der von $\overline{T}_0$ vorgeschrieben ist. Aus $\overline{T}_\chi$ kann man dann ψ nach dem oben Erörterten ableiten.

Diese Resultate zeigen, daß die Beobachtungen von allen Größen H, δ, ι mehr liefern, als zur Bestimmung von ψ nötig ist, und demgemäß noch die Mittel bieten werden, die wichtige Frage zu entscheiden, ob der Sitz der erdmagnetischen Kraft nur im Innern der Erde oder auch außerhalb anzunehmen ist. —

Machen wir zweitens die Annahme, daß die erdmagnetische Kraft ausschließlich von Massen herrührt, die außerhalb der Erde liegen, so ist die zweite Entwickelung (115') zu benutzen, die, in (115'') eingesetzt, liefert

$$\overline{S} = -\Sigma h Z_h, \quad \overline{T} = \eta \Sigma \frac{\partial Z_h}{\partial \xi}, \quad \overline{P} = -\frac{1}{\eta} \Sigma \frac{\partial Z_h}{\partial \chi}, \qquad 115'''')$$

wo die Summen wie früher von $h = 1$ bis $h = \infty$ zu nehmen sind.

Man erkennt, daß die drei Sätze von S. 174 aus diesen Formeln ebenso ableitbar sind, wie aus (115'''), daß sonach auch in dem jetzt vorausgesetzten Falle eine Prüfung der zu Grunde gelegten Annahme mittels Beobachtungen, die sich nur auf die Erdoberfläche beziehen, möglich ist.

Die allgemeinste Annahme ist die, daß innere und äußere Massen zusammenwirken. Hier ist eine Prüfung nicht mehr erforderlich, auch nur in sehr beschränktem Maße durch Beobachtungen an der Erdoberfläche möglich; dagegen gestatten letztere die Bestimmung der allgemeinen Potentialfunktion

$$\psi = Z_0 + \Sigma\left(\frac{r^h Z_h}{a^{h-1}} + \frac{a^{h+2}}{r^{h+1}} Y_h\right),$$

und damit die Sonderung der von inneren und der von äußeren Ursachen herrührenden Anteile.

Die Komponenten $\overline{T}$ und $\overline{P}$ enthalten zwar beide die Kugelfunktionen Y_h und Z_h in derselben Kombination

$$U_h = Y_h + Z_h$$

— worauf sich eine Prüfung der allgemeinsten Theorie gründen lassen würde — aber $\overline{S}$ zeigt sie in der Verbindung

$$V_h = -(h+1)\,Y_h + h\,Z_h;$$

danach S. 172 Y_h und Z_h ganze, rationale, homogene Funktionen vom $h$ten Grade sind und sich nur durch die Werte ihrer Konstanten unterscheiden, so treten diese in U_h und V_h in derselben Verbindung auf, wie die Y_h und Z_h selbst, und lassen sich daher aus bekannten U_h und V_h gesondert bestimmen. Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen. —

§ 19. Die Gesetze der magnetischen Influenz.

Die Fähigkeit, magnetische Kräfte auszuüben, welche die natürlichen Magnete dauernd von selbst besitzen, und gehärtete Stahlmassen durch geeignete Behandlung ebenso dauernd erhalten, kann man anderen Körpern vorübergehend erteilen, indem man sie magnetischen Kräften aussetzt. Dies zeigt sich dadurch, daß das Feld eines permanenten Magneten im leeren Raum durch Einbringen beliebiger, ursprünglich unmagnetischer Körper geändert wird; denn nach dem S. 146 Gesagten dürfen wir diese Beobachtung dahin deuten, daß in den eingeführten Körpern Magnetismen influenziert werden, die ihrerseits die Änderung des Feldes bewirken.

Da die Fähigkeit, magnetische Kräfte auszuüben, durch Leitungsvorgänge nicht modifiziert wird, insbesondere keinem Körper durch Leitung mitgeteilt oder entzogen werden kann, so bietet der Vorgang das vollständige Analogon zu der Influenzierung der Dielektrica durch elektrisch geladene absolute Isolatoren und soll auch im folgenden von diesem Gesichtspunkt aus behandelt werden.

Um die Grundgesetze für die elektrische Influenzierung der Dielektrica abzuleiten, waren wir von der Erfahrungsthatsache ausgegangen, daß die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Ladungen, wenn man den unendlichen, zuvor leeren Raum mit einer dielektrischen Flüssigkeit erfüllt, nur um einen dieser Flüssigkeit individuellen Faktor geändert wird. Die entsprechende Thatsache für permanente Magnete und magnetische Flüssigkeiten ist nun zwar direkt kaum feststellbar, da die betreffenden magnetischen Wirkungen relativ viel schwächer sind, als die analogen elektrischen, und es würde daher gewagt erscheinen, auf sie in derselben Weise die Theorie zu bauen, wie das in § 7 bezüglich der Dielektrica geschehen ist.

Indessen kann man die Übereinstimmung der auf dieser Grundlage gewonnenen Folgerungen mit der Erfahrung als Beweis für ihre Zulässigkeit betrachten; insbesondere kommt auch in Betracht, daß influenzierte Magnete sich den permanenten höchst analog verhalten, und für die Potentialfunktion der letzteren in (108) derselbe Ausdruck gewonnen ist, der in (33″) für ein influenziertes Dielektricum aufgestellt war.

Demzufolge wollen wir nun auch, wenngleich nicht als direkt, so doch als indirekt erwiesen annehmen, daß die Wechselwirkung zwischen zwei permanenten Magneten in einer Flüssigkeit durch einen der letzteren individuellen Faktor modifiziert wird, und wollen diesen Faktor gleich $1/\mathfrak{m}$ setzen. Die Konstante $\mathfrak{m}$ ist eine reine Zahl, es gilt also für sie

$$[\mathfrak{m}] = 1; \tag{116}$$

sie nimmt bei den magnetischen Erscheinungen dieselbe Stelle ein, wie die Konstante $\mathfrak{d}$ nach S. 48 bei elektrischen, und man kann daher $\mathfrak{m}$, ähnlich wie $\mathfrak{d}$, als die diamagnetische Konstante oder die magnetische Permeabilität der Flüssigkeit bezeichnen[44]; der erste Name ist indessen nicht gebräuchlich. Es mag übrigens schon hier bemerkt werden, daß $\mathfrak{m}$ nicht, wie $\mathfrak{d}$, für alle Körper größer, als Eins, ist; es ist mitunter auch kleiner, als Eins, jedoch bei Flüssigkeiten stets sehr wenig von Eins verschieden.

Das magnetische Elementargesetz, d. h. die Formel für das Potential Ψ'_{12} der Wechselwirkung zwischen zwei gegen ihre Entfernung sehr kleinen Magneten, wird nunmehr, wenn letztere sich nicht im leeren Raume, sondern in einer unendlichen Flüssigkeit befinden,

116′) $$\Psi'_{12} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2}.$$

Das aus seinem Verhalten im leeren Raume bestimmte Moment M eines permanenten Magneten wollen wir sein w a h r e s Moment nennen, der Ausdruck

116″) $$\mathsf{M} / \mathfrak{m} = \mathsf{M}'$$

mag sein f r e i e s Moment heißen.

Man kann dann die Formel (116′) schreiben

116‴) $$\Psi'_{12} = \mathsf{M}'_1 \mathsf{M}_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2} = \mathsf{M}_1 \mathsf{M}'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2}$$

und erkennt dadurch, daß die getroffene Verfügung auf dieselbe Unsymmetrie führt, die S. 50 bei den analogen Formeln für Dielektrica zu Tage trat.

Wegen ihrer formalen Symmetrie heben wir noch den Ausdruck

116⁗) $$\Psi'_{12} = \tfrac{1}{2} (\mathsf{M}'_1 \mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_1 \mathsf{M}'_2) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2}$$

hervor, auf den wir später zurückgreifen werden.

Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß die Formel

$$\Psi'_{12} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \mathsf{M}_1 \mathsf{M}_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2} = \mathfrak{m} \mathsf{M}'_1 \mathsf{M}'_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \Lambda_1 \, \partial \Lambda_2}$$

einen einfachen Satz über die Wechselwirkung von permanenten Magneten bei gleichen wahren oder bei gleichen freien Momenten innerhalb verschiedener Flüssigkeiten ausspricht, der dem S. 50 erwähnten über elektrische Wechselwirkungen durchaus parallel ist. —

Dem Elementarpotential (116′) entspricht für die Wechselwirkung zwischen zwei endlichen Magneten das Potential

117) $$\Psi_{12} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \int\!\!\int \mu_1 \, \mu_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1 \, \partial \lambda_2} dk_1 \, dk_2 ,$$

aus dem sich die Momente und Komponenten der Wechselwirkung nach bekannten Regeln berechnen lassen.

Der früheren Potentialfunktion (108)

$$\psi = \int \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} dk_1$$

können wir jetzt eine neue

$$\psi' = \frac{1}{\mathfrak{m}} \int \mu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} dk_1 \tag{117'}$$

zuordnen, welche die Komponenten A, B, C der Kraft auf einen Pol, der im leeren Raum den Charakter eines Einheitspoles besitzt — d. h. auf einen wahren Einheitspol — nach den Formeln

$$A = -\frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial \psi'}{\partial z} \tag{117''}$$

zu berechnen gestattet.

$$\psi' - \psi = \psi'' = \frac{1 - \mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} \mu_1 \, dk_1 = \frac{1 - \mathfrak{m}}{\mathfrak{m}} \psi \tag{118}$$

stellt dann die Wirkung der an Stelle des leeren Raumes jetzt den Magneten umgebenden Flüssigkeit dar. ψ läßt sich durch ein Integral über die Oberfläche des Magneten ausdrücken, welches die Potentialfunktion der äquivalenten Oberflächendichte darstellt. Da es aber naturgemäßer ist, anzunehmen, daß die gesamte Flüssigkeit sich am Zustandekommen von ψ'' beteiligt, so wird man, wie S. 53 den Wert von φ'', so hier den von ψ'' in ein Raumintegral über die ganze Flüssigkeit verwandeln und diesen Wert als den allgemeinen, den obigen als einen speziellen, nur in dem betrachteten einfachen Falle stattfindenden ansehen.

Dieser Ausdruck lautet, falls man

$$\frac{\mathfrak{m} - 1}{4\pi} = \mathfrak{k} \tag{118'}$$

und

$$-\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial x} = \alpha, \quad -\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial y} = \beta, \quad -\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial z} = \gamma \tag{118''}$$

setzt und das Integral jetzt über den von der Flüssigkeit erfüllten Raum k erstreckt,

$$\psi'' = \int_f \left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d k_1 \,; \tag{118'''}$$

er hat also genau denselben Wert, als wenn die Flüssigkeit ein permanenter Magnet mit den Momenten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ pro Volumeneinheit wäre.

Die Konstante $\mathfrak{k}$ heißt die Magnetisierungszahl der Flüssigkeit; ihre Dimensionalgleichung ist nach (116)

118''') $$[\mathfrak{k}] = 1 \,. -$$

Damit für innere Punkte nicht nur der Wert der Potentialfunktion ψ'', sondern auch die Werte ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten bei Benutzung der Form (118''') den aus der früheren (118) resultierenden gleich sind, setzen wir ebenso, wie bei der analogen Betrachtung auf S. 59 fest, daß bei der Berechnung des Integrales (118''') der Grenzübergang in der bestimmten Weise stattfindet, daß der Einheitspol, in welchem die zu integrierende Funktion unendlich wird, ausgeschlossen wird durch eine unendlich kleine geschlossene Fläche von der Gestalt der Begrenzung eines Cylinders, dessen Axe mit der magnetischen Axe λ an der Stelle des Einheitspoles zusammenfällt, und dessen Querdimensionen unendlich klein gegen seine Länge sind.

Die Formeln (118') bis (118''') übertragen wir genau, wie auf S. 56 die analogen elektrischen, hypothetisch zuerst auf den Fall, wo die Flüssigkeit nicht den ganzen Raum zwischen und um die permanenten Magnete ausfüllt, weiter auf feste, homogene, isotrope Körper, sowie schließlich auf solche von stetig wechselndem magnetischen Verhalten, indem wir $\mathfrak{m}$ als Funktion der Koordinaten mit unter das Raumintegral ziehen. Von der Prüfung dieser Erweiterung und den unter Umständen notwendig werdenden Abänderungen wird weiter unten gehandelt werden. —

Wir gehen nun dazu über, auf Grund der vorstehenden Resultate die charakteristischen Eigenschaften der Potentialfunktion ψ' abzuleiten.

Um Verwechselungen zu vermeiden, wollen wir dabei den Zustand der permanenten Magnete, welche in dem betrachteten System enthalten sind, nur noch durch die äquivalenten Dichten ϱ und σ, die als wahre bezeichnet werden dürfen, ausdrücken, die Bezeichnungen α, β, γ also nur noch auf die influenzierten Magnetismen anwenden.

Ferner wollen wir, um das Problem der Influenzierung möglichst allgemein zu fassen, annehmen, daß auch die mit permanenten Ladungen versehenen Körper, die übrigens sämtlich im Endlichen liegen mögen, daneben influenzierbar sind; wir erhalten dadurch offenbar eine größere Annäherung an die Wirklichkeit. Influenzlose Körper, also absolute permanente Magnete, werden dann solche sein, für welche $\mathfrak{m} = 1$, also $\mathfrak{k} = 0$ ist. Leiter für Magne-

tismus existieren nach der Erfahrung nicht und bleiben daher auß Betracht.

Unter diesen Voraussetzungen erstreckt sich jedes Syste magnetisierbarer Körper durch den ganzen unendlichen Raum, un seine Potentialfunktion wird die Gestalt besitzen

$$\left.\begin{aligned}\psi' = \Sigma'' \int \frac{\sigma_{hi}\, d\, o_{hi}}{r} + \int \frac{\varrho_1\, d\, k_1}{r} \\ - \int \mathfrak{k}_1 \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi'}{\partial y_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \frac{\partial \psi'}{\partial z_1} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} \right) d\, k_1\, .\end{aligned}\right\} \quad 119$$

Hierin stellen die ersten beiden Integrale die Potentialfunktione aller wahren Magnetismen dar, die sich zum Teil im Innern, zu Teil auf der Oberfläche von permanenten Magneten befinden; da letzte Integral giebt die Potentialfunktion der influenzierten Moment und ist über den ganzen Raum zu erstrecken.

Man kann das letzte Glied durch teilweise Integration um formen, die aber jederzeit nur über solche Bereiche ausführbar ist innerhalb deren $\mathfrak{k}$ und die Differentialquotienten von ψ' stetig sind Man erhält dadurch

$$\left.\begin{aligned}\psi' = \Sigma'' \int \left(\sigma_{hi} + \overline{\mathfrak{k}}_h \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_h} + \overline{\mathfrak{k}}_i \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_i} \right) \frac{d\, o_{hi}}{r} \\ + \int \left(\varrho_1 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mathfrak{k}_1 \frac{\partial \psi'}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\mathfrak{k}_1 \frac{\partial \psi'}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\mathfrak{k}_1 \frac{\partial \psi'}{\partial z_1} \right) \right] \right) \frac{d\, k_1}{r}\, ;\end{aligned}\right\} \quad 119$$

das Integral über die unendliche Kugel verschwindet nach S. 5 wenn das System im Unendlichen homogen ist, und die wahre Ladungen sämtlich im Endlichen liegen, da ihre Summe von selb jederzeit gleich Null ist.

Aus (119′) folgt, daß man ψ' betrachten kann als die Potentia funktion freier Ladungen von der Flächendichte

$$\sigma_{hi}' = \sigma_{hi} + \overline{\mathfrak{k}}_h \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_h} + \overline{\mathfrak{k}}_i \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_i} \quad 119$$

in den Unstetigkeitsflächen, und von der Raumdichte

$$\varrho' = \varrho + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathfrak{k} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \quad 119$$

an Stellen, wo $\mathfrak{k}$ und die Differentialquotienten von ψ' stetig sind.

Da nun aber nach der Definition von ψ'

$$-4\pi\sigma_{hi}' = \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_h} + \frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n_i}, \quad 1$$

$$-4\pi\varrho' = \triangle \psi' \quad 12$$

ist, so erhält man auch

120'') $$-4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{m}}_h \frac{\partial\psi'}{\partial n_h} + \overline{\mathfrak{m}}_i \frac{\partial\psi'}{\partial n_i},$$

120''') $$-4\pi\varrho = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{m}\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{m}\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{m}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right).$$

Nimmt man hinzu, daß ψ' im Endlichen stetig ist und im Unendlichen sich verhält, wie die Potentialfunktion im Endlichen liegender neutraler Massen, so genügen diese Bedingungen zu seiner Bestimmung.[45] —

Die vorstehenden Formeln gestalten wir um durch Einführung der Komponenten A, B, C der magnetischen Kraft, welche der Einheitspol innerhalb eines unendlich kleinen, absolut leeren cylindrischen Hohlraumes erfahren würde, wenn dessen Axe parallel der magnetischen Axe an der betrachteten Stelle liegt, und seine Querdimensionen verschwindend klein gegen seine Länge sind.

Die so bestimmten Komponenten sind dann durch die bei konstanter magnetischer Verteilung genommenen Differentialquotienten

121) $$A = -\frac{\partial\psi'}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial\psi'}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial\psi'}{\partial z},$$

ihre Resultierende R durch

121') $$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

gegeben, auch wenn die Potentialfunktion der durch Influenz magnetisierten Körper des Systemes durch die Formel (118''') definiert wird.

Bezeichnet man noch die Komponente nach der Richtung der Normalen n eines Flächenelementes mit N — was zu Verwechselungen mit der gleichen Benennung für die Normalkomponente einer elektrischen Kraft keine Veranlassung geben wird —, so nehmen die obigen Bedingungen (120) bis (120''') die folgende Gestalt an:

121'') $$4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{m}}_h \overline{N}_h + \overline{\mathfrak{m}}_i \overline{N}_i, \qquad 4\pi\sigma'_{hi} = \overline{N}_h + \overline{N}_i,$$

121''') $$4\pi\varrho = \frac{\partial\mathfrak{m}A}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{m}B}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{m}C}{\partial z}, \qquad 4\pi\varrho' = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

σ und ϱ sind nur an resp. in permanenten Magneten von Null verschieden; in der Grenze zwischen zwei anderen Körpern gilt daher stets

$$0 = \overline{\mathfrak{m}}_h \overline{N}_h + \overline{\mathfrak{m}}_i \overline{N}_i,$$

während für jede tangentiale Richtung die Komponenten diesseits

und jenseits gleich sind. Die magnetischen Kraftlinien befolgen daher das Brechungsgesetz

$$\operatorname{tg} \nu_h : \operatorname{tg} \nu_i = \mathfrak{m}_h : \mathfrak{m}_i,$$

welches dem in (40″) gegebenen durchaus analog ist und die gleichen Folgerungen gestattet, wie jenes. Verschiedenheiten werden allein dadurch bedingt, daß es keine Konduktoren für den Magnetismus giebt, sodaß innerhalb keines Bereiches ψ' konstant zu sein braucht, auf keine Grenze die Kraftlinien unter allen Umständen normal auftreffen. Allerdings giebt es Körper — insbesondere weiches Eisen —, für welche die Konstante $\mathfrak{m}$ so groß ist, nämlich 1000 übersteigt, daß jene mitunter nahezu dieselbe Rolle spielen, wie Konduktoren; jedoch verhalten sie sich in anderen Fällen wieder wesentlich von ihnen abweichend. —

Wir führen nunmehr einen neuen Vektor $\mathfrak{R}$ mit den Komponenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ resp. $\mathfrak{N}$ ein durch die Beziehungen

$$\mathfrak{m} A = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{m} B = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{m} C = \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{m} N = \mathfrak{N}, \tag{122}$$

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2} \tag{122'}$$

und nennen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{N}$ die magnetischen Polarisationen nach den Richtungen von A, B, C, N und $\mathfrak{R}$ die resultierende Polarisation.[46])

Für diese Größen gilt nach den ersten Formeln (121″) und (121‴) einfacher

$$4 \pi \varrho = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z}, \tag{122''}$$

$$4 \pi \sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \mathfrak{N}_i; \tag{122'''}$$

die Polarisationen verhalten sich also hierin wie Kräfte in einem influenzlosen Raum; ihre Normalkomponenten werden nur an solchen Flächen unstetig, die wahre Ladungen tragen, d. h. nur an den Oberflächen permanenter Magnete, dagegen springen ihre Tangentialkomponenten an Unstetigkeitsflächen für die Konstante $\mathfrak{m}$.

Die Formeln (122″) und (122‴), welche durchaus mit (41″) und (41‴) gleichartig sind, gestatten auch die magnetischen Polarisationen als stationäre Strömungskomponenten einer imponderabeln Flüssigkeit innerhalb eines isotropen ponderabeln Körpers zu deuten, und zwar erstreckt sich diese Strömung, abweichend von der S. 63 behandelten elektrischen, die durch Konduktoren begrenzt wurde, jederzeit durch den ganzen unendlichen Raum; sie wird bewirkt durch räumliche Quellen von der Ergiebigkeit $4 \pi \varrho$ innerhalb der permanenten Magnete und durch flächenhafte Quellen von der Ergiebig-

keit $4\pi\sigma_{hi}$ in deren Oberfläche. Die Konstante $\mathfrak{m}$ steht an Stelle der Leitfähigkeit und wird demgemäß auch als magnetische Permeabilität bezeichnet, wie dies schon S. 177 erwähnt wurde. —

Die gewonnene mechanische Analogie benutzen wir ähnlich, wie S. 63, um die Grundformeln der magnetischen Influenz hypothetisch auf krystallinische Körper zu erweitern. Für letztere setzen wir[47])

123) $$\begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{m}_{11} A + \mathfrak{m}_{12} B + \mathfrak{m}_{13} C, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{m}_{21} A + \mathfrak{m}_{22} B + \mathfrak{m}_{23} C, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{m}_{31} A + \mathfrak{m}_{32} B + \mathfrak{m}_{33} C, \end{cases}$$
$$\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2;$$

die $\mathfrak{m}_{hk}$, welche an Stelle der Konstanten der Leitfähigkeit treten, bezeichnen wir als die allgemeinen diamagnetischen Konstanten oder die Konstanten der magnetischen Permeabilität des krystallinischen Mediums. Sie sind innerhalb eines homogenen Krystalles konstant, hängen aber von dessen Orientierung gegen das Koordinatensystem ab.

Verbinden wir mit (123) die Formeln

123′) $$4\pi\varrho = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z}$$

123″) $$4\pi\sigma_{hi} = \overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_i,$$

worin

123‴) $$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\cos(n, x) + \mathfrak{B}\cos(n, y) + \mathfrak{C}\cos(n, z)$$

die Komponente des Vektors $\mathfrak{N}$ nach der Richtung von n bezeichnet, und ziehen wir die Definitionen (121) der Komponenten A, B, C, wie die Stetigkeitseigenschaften von ψ' und sein Verhalten im Unendlichen heran, so erhalten wir ein Formelsystem, welches ψ' im ganzen Raum eindeutig bestimmt, wenn nur

123⁗) $$\begin{cases} 8\pi\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_{11} A^2 + \mathfrak{m}_{22} B^2 + \mathfrak{m}_{33} C^2 \\ \qquad + (\mathfrak{m}_{23} + \mathfrak{m}_{32}) BC + (\mathfrak{m}_{31} + \mathfrak{m}_{13}) CA + (\mathfrak{m}_{12} + \mathfrak{m}_{21}) AB \end{cases}$$

eine wesentlich positive quadratische Form ist, was wir annehmen dürfen, so lange keine Beobachtung das Gegenteil beweist.

Über die Zulässigkeit der im Vorstehenden gegebenen erweiterten Formeln hat, wie schon angedeutet, die Erfahrung zu entscheiden. Die Messungen werden sehr wesentlich dadurch erschwert, daß die drei Konstanten $\mathfrak{m}_{hh}$ immer sehr nahe gleich, und zwar gleich Eins, ferner die sechs Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ sehr nahe gleich Null werden; doch ist ein Widerspruch zwischen Theorie und Ex-

periment bisher noch nicht hervorgetreten. Auf die Besprechung wichtiger Beobachtungsmethoden gehen wir später ein. —

Wir wollen schließlich noch die Werte der **magnetischen Momente** α, β, γ für krystallinische Körper bilden.

Die früheren Beziehungen (118″) für isotrope Körper lauten nach Einführung der magnetischen Kraftkomponenten A, B, C

$$\alpha = \frac{\mathfrak{m}-1}{4\pi} A = \mathfrak{k} A, \quad \beta = \frac{\mathfrak{m}-1}{4\pi} B = \mathfrak{k} B, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{m}-1}{4\pi} C = \mathfrak{k} C. \qquad 124)$$

Aus ihnen folgt auf dem S. 65 für die dielektrischen Momente eingeschlagenen Wege als für Krystalle gültig

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\alpha &= \mathfrak{A} - A = (\mathfrak{m}_{11} - 1) A + \mathfrak{m}_{12} B + \mathfrak{m}_{13} C, \\ 4\pi\beta &= \mathfrak{B} - B = \mathfrak{m}_{21} A + (\mathfrak{m}_{22} - 1) B + \mathfrak{m}_{23} C, \\ 4\pi\gamma &= \mathfrak{C} - C = \mathfrak{m}_{31} A + \mathfrak{m}_{32} B + (\mathfrak{m}_{33} - 1) C, \end{aligned}\right\} \qquad 124')$$

wofür wir anschließend an (124) schreiben können

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \mathfrak{k}_{11} A + \mathfrak{k}_{12} B + \mathfrak{k}_{13} C, \\ \beta &= \mathfrak{k}_{21} A + \mathfrak{k}_{22} B + \mathfrak{k}_{23} C, \\ \gamma &= \mathfrak{k}_{31} A + \mathfrak{k}_{32} B + \mathfrak{k}_{33} C, \end{aligned}\right\} \qquad 124'')$$

indem wir setzen

$$\frac{\mathfrak{m}_{hh} - 1}{4\pi} = \mathfrak{k}_{hh}, \quad \frac{\mathfrak{m}_{hk}}{4\pi} = \mathfrak{k}_{hk}. \qquad 124''')$$

Die k_{hk} heißen die **allgemeinen Magnetisierungszahlen** des Krystalles und entsprechen genau den auf S. 65 eingeführten Elektrisierungszahlen $\mathfrak{e}_{hk}$. —

Da die Konstante $\mathfrak{m}$ je nach dem Medium bald größer, bald kleiner, als Eins ist, so ist $\mathfrak{k}$ bald positiv, bald negativ. Demgemäß bewirkt eine magnetische Feldstärke R im Inneren eines isotropen Körpers ein Moment, dessen Axe λ je nach seiner Substanz bald mit der Richtung von R zusammenfällt, bald ihr entgegengesetzt ist. Körper von ersterem Verhalten nannte man ehedem **paramagnetisch**, von letzterem **diamagnetisch**; doch werden diese Namen, weil eine **wesentliche** Verschiedenheit zwischen den beiden Arten nicht besteht, und die Bezeichnung „diamagnetisch“ angemessener in Parallele zu dem in ganz anderem Sinne gebrauchten „dielektrisch“ gesetzt wird, besser unterdrückt.

In der That kann man einen und denselben isotropen Körper von nicht zu großer magnetischer Konstante $\mathfrak{m}$ dadurch, daß man ihn innerhalb verschiedener Flüssigkeiten beobachtet, nach Belieben para- oder diamagnetisch erscheinen lassen. Denn die Bedingungen

(123′) und (123″), auf einen homogenen Körper (i) innerhalb einer Flüssigkeit (f) angewandt, liefern, wenn die influenzierenden wahren Magnetismen als in der Flüssigkeit liegend angenommen werden, resp.

$$4\pi\varrho_f = \mathfrak{m}_f\left(\frac{\partial A_f}{\partial x} + \frac{\partial B_f}{\partial y} + \frac{\partial C_f}{\partial z}\right),$$

$$0 = \frac{\partial A_i}{\partial x} + \frac{\partial B_i}{\partial y} + \frac{\partial C_i}{\partial z}, \quad 0 = \mathfrak{m}_i \overline{N}_i + \mathfrak{m}_f \overline{N}_f;$$

sie enthalten also die Konstanten $\mathfrak{m}_i$ des Körpers nur durch diejenige $\mathfrak{m}_f$ der Flüssigkeit dividiert, und dieses Verhältnis kann durch die Wahl der letzteren Größe beliebig kleiner oder größer, als Eins, gemacht werden.

Ferner sind Krystalle denkbar, deren Konstanten $\mathfrak{k}_{hh}$ auch bei Beziehung auf den leeren oder den Luftraum teils positiv, teils negativ sind, während die $\mathfrak{k}_{hk}$ verschwinden, die also im Grunde zu keiner der beiden Kategorien von Körpern gerechnet werden dürfen.

Bezüglich der Kraftkomponenten A, B, C mag noch daran erinnert werden, daß sie nur zum Teil von den äußeren magnetisierenden Ursachen, z. B. genäherten permanenten Magneten, herrühren, außerdem aber die Wirkung der in dem magnetisierbaren Körper influenzierten Momente α, β, γ, die sogenannte Selbstinfluenz des Körpers, enthalten. —

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind die vorstehenden Endformeln hypothetische Erweiterungen eines durch gewisse Beobachtungen wahrscheinlich gemachten Ansatzes, und demgemäß der Prüfung durch das Experiment bedürftig. Während nun im allgemeinen Widersprüche mit der Erfahrung nicht hervorgetreten sind, so haben doch die Beobachtungen an den Metallen Eisen, Nickel, Kobalt, welche unverhältnismäßig größere Magnetisierungskonstanten besitzen, als alle übrigen Körper, sich den obigen einfachsten Formeln nicht fügen wollen, speziell Momente α, β, γ ergeben, die keineswegs den magnetischen Kräften A, B, C proportional wachsen.

Man ist daher veranlaßt, die für isotrope Körper aufgestellten Formeln (124) für jene stark magnetisierbaren Körper zu verallgemeinern. Ihren Inhalt kann man dahin aussprechen, daß sie für jedes Volumenelement dk die magnetische Axe λ der magnetisierenden Kraft R parallel und das magnetische Moment $\mu\, dk$ derselben proportional setzen. Die erste Aussage aufzugeben liegt bei isotropen Medien kein Grund vor, während dies bei Krystallen durch das Formelsystem (124″) bereits geschehen ist; dagegen veranlassen die genannten Beobachtungen zur Vertauschung der zweiten Aussage mit der allgemeineren, daß $\mu\, dk$ eine unbekannte Funktion von R

ist. Dies kommt ersichtlich darauf hinaus, daß man in den früheren Formeln (124) f nicht mehr als Konstante, sondern als Funktion von R führt.[18])

Diese Verallgemeinerung erschwert die Lösung spezieller Probleme natürlich erheblich, obwohl sie auf die Form der Bedingungen, welche ψ' bestimmen, keinen Einfluß hat; in der That ist der Weg, der zu den Gleichungen (120'') und (120''') führte, von der Natur von f oder m durchaus unabhängig.

Den Verlauf der unbekannten Funktion f ergeben die Beobachtungen dahin, daß sie für kleine R nahe konstant ist, dann mit wachsendem R stark ansteigt und sich schließlich der Null asymptotisch nähert, sodaß fR mit unbegrenzt wachsendem R einen endlichen Grenzwert erreicht. Der letztere Umstand bedingt einen einfachen Satz, dessen Richtigkeit man ohne alle Rechnung erkennen kann. Die in den Formeln (124) auftretenden magnetischen Komponenten A, B, C enthalten die Wirkung der äußeren magnetisierenden Ursachen, wie die des durch sie in dem betrachteten Körper, z. B. einem Stück weichen Eisens, induzierten Magnetismus. Mit unbegrenzt wachsenden äußeren Kräften nimmt der letztere doch nur bis zu einer endlichen Grenze zu; demgemäß wird sein Einfluß mehr und mehr neben dem der äußeren Kräfte A_a, B_a, C_a zurücktreten, und es wird daher für sehr starke magnetisierende Kräfte die magnetische Influenz von der Selbstinfluenz des Körpers nahezu unabhängig sein.

§ 20. Das Potential eines influenzierten Magneten auf andere Körper. Das innere Potential eines allgemeinen magnetischen Systemes und die innere Arbeit bei stattfindenden Dislokationen seiner Teile. Die Arbeit der Magnetisierung. Eine Kugel im homogenen magnetischen Felde.

Da ψ'', die Potentialfunktion der influenzierten Magnetismen, auf einen wahren Einheitspol bezogen ist, so wird das magnetische Potential Ψ'_{12} eines beliebigen Systemes (1), welches wahre und influenzierte Magnetismen mit der Potentialfunktion ψ' enthalten kann, auf eine beliebige wahre magnetische Verteilung (2) gegeben sein durch

$$\Psi'_{12} = \int \psi' \, d m_2 , \qquad 125)$$

worin $d m_2$ ein Element der Verteilung (2) ist, das sowohl eine räumliche, als eine Flächendichte besitzen kann.

Auch die in ψ' enthaltenen freien Magnetismen sind im all-

gemeinen mit räumlichen und flächenhaften Dichten äquivalent, und man kann daher schreiben

125′) $$\Psi'_{12} = \int d\,m_2 \left[\int \frac{\sigma'_1\,d\,o_1}{r} + \int \frac{\varrho'_1\,d\,k_1}{r}\right].$$

Betrachten wir den Fall, daß das magnetisierbare System (1) einen ganz im Endlichen liegenden starren Körper bildet und durch den leeren Raum von den Magnetismen (2) getrennt ist, die gleichfalls an einem starren Körper haften, so unterscheidet sich die Formel (125′) der Bedeutung nach in nichts von der für das Potential zwischen zwei permanenten Magneten gültigen (105′); sie läßt sich vollständig in diese überführen und gestattet die Ableitung der zwischen den Körpern (1) und (2) wirkenden Kräfte und Momente nach derselben Regel, wie jene, da ja die auf den Einheitspol ausgeübten Kräfte A, B, C nach S. 182 aus der Potentialfunktion ψ' durch Differentiationen gewonnen werden, bei denen das magnetische Verhalten aller Massenelemente ungeändert bleibt.

Es spielen in diesem Falle also die freien Magnetismen ganz die Rolle wahrer Magnetismen, und daher kann man die Formel (125′) unmittelbar auf den Fall übertragen, daß, wie der Körper (1), auch (2) wahre und influenzierte Magnetismen nebeneinander besitzt; es ist dann nur die wahre magnetische Masse oder Ladung $d\,m_2$ mit der freien $d\,m'_2$ zu vertauschen.

Für die Anwendung des Resultates ist es vorteilhaft, die ähnlich schon S. 68 eingeführte Auffassung zu benutzen, daß alle unstetigen Übergänge des physikalischen Verhaltens sich durch stetige ersetzen lassen. Es verschwinden dann mit den Unstetigkeiten die magnetischen Flächendichten, und wir erhalten aus dem Vorstehenden für das Potential der Wechselwirkung zwischen beliebig vielen rings vom leeren Raum umgebenen magnetischen Körpern leicht die einfache Formel

125″) $$\Psi' = \Sigma' \Psi'_{hi} = \Sigma' \int\!\!\int \varrho'_h\,\varrho'_i \frac{d\,k_h\,d\,k_i}{r},$$

die vollkommen mit (44‴) übereinstimmt. Aus der Funktion Ψ' kann man die bei einer Dislokation durch die Wechselwirkung zwischen den Körpern geleistete Arbeit

125‴) $$\delta' A_i = -\,\delta_{\varrho'} \Psi'$$

bilden, wobei der Index ϱ' bezeichnet, daß die Variation nur die Anordnung der Körper, aber nicht die in ihnen vorhandenen räumlichen freien Dichten betrifft. —

Wir wenden uns nun zu der Betrachtung eines ganz allgemeinen magnetischen Systemes, dessen Teile nicht notwendig

unabhängig voneinander verschiebbar zu sein brauchen, und knüpfen hier die Betrachtung, wie S. 69 die analoge, an das Potential des Systemes auf sich selbst an.[19])

Indem wir von dem Elementarpotential (116'''') ausgehen und die äquivalenten magnetischen Ladungen einführen, gelangen wir zu der Form

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\int\int \frac{d\,m\,d\,m'}{r}, \tag{126}$$

in welcher die eine Summe über alle wahren, die andere über alle freien Magnetismen zu erstrecken ist; sie ist äquivalent mit

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\int \sigma\,\psi'\,d\,o + \tfrac{1}{2}\int \varrho\,\psi'\,d\,k, \tag{126'}$$

wo das erste Integral sich auf alle mit wahrer Ladung behaftete Flächen, das zweite auf eben solche Volumina bezieht. Wir wollen annehmen, daß beide sich nur im Endlichen befinden, was involviert, daß das System im Unendlichen homogen, z. B. der leere Raum ist.

Führen wir für ϱ und σ die Werte aus (123') und (123'') ein, so erhalten wir nach einer teilweisen Integration, bei welcher das über die unendliche Kugel genommene Oberflächenintegral verschwindet:

$$\Psi = \frac{1}{8\pi}\int (A\,\mathfrak{A} + B\,\mathfrak{B} + C\,\mathfrak{C})\,d\,k, \tag{126''}$$

worin das Integral über den ganzen unendlichen Raum erstreckt ist. Setzt man hier die allgemeinen Werte (123) der Polarisationen ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{8\pi}\int\Big(&\mathfrak{m}_{11}A^2 + \mathfrak{m}_{22}B^2 + \mathfrak{m}_{33}C^2\\ &+(\mathfrak{m}_{23}+\mathfrak{m}_{32})BC + (\mathfrak{m}_{31}+\mathfrak{m}_{13})CA + (\mathfrak{m}_{12}+\mathfrak{m}_{21})AB\Big)\,d\,k,\end{aligned}\right\} \tag{126'''}$$

oder bei Einführung der Abkürzung $\mathfrak{g}$ aus (123'''')

$$\Psi = \int \mathfrak{g}\,d\,k. \tag{126''''}$$

Man kann den Wert (126') für Ψ dem vorstehenden analoger gestalten, indem man die schon oben benutzte Hilfsvorstellung einführt, daß die Übergänge zwischen den Körpern von verschiedenem physikalischen Verhalten nicht sprungweise, sondern stetig stattfinden und daß demgemäß in permanenten Magneten nur räumliche, nicht auch flächenhafte wahre Ladungen liegen.

Die Formel (126') läßt sich nunmehr schreiben

$$\Psi = \tfrac{1}{2}\int \varrho\,\psi'\,d\,k, \tag{127}$$

und andere Ausdrücke für Ψ lassen sich durch Kombination von (126'') und (127) bilden.

Unter diesen besitzt der Wert

127′) $$\Psi_0 = \int \left[\varrho \psi' - \frac{1}{8\pi} (A \mathfrak{A} + B \mathfrak{B} + C \mathfrak{C}) \right] dk \,,$$

den wir durch den Index 0 auszeichnen, obwohl er den früheren Ψ gleich ist, besondere Vorzüge, da er bei einer Variation von ψ', die ϱ und die Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ ungeändert läßt und im Unendlichen verschwindet, sich nicht ändert, so daß wir schreiben können

127″) $$\delta_{\varrho, \mathfrak{m}} \Psi_0 = 0 \,.$$

Der Beweis dieser Behauptung läßt sich in der Weise führen, wie S. 70 bei dem analogen elektrischen Problem gezeigt ist; ebenso haben die dort angestellten Erörterungen über die Ursache der verschiedenen Differentialeigenschaften der verschiedenen Ansätze für Ψ hier Geltung.

Demgemäß kann man aus dem Ausdruck (127′) für Ψ_0 auch alle diejenigen Folgerungen ziehen, die auf S. 72 u. f. aus dem entsprechenden (46′) für das elektrische Potential Φ_0 gewonnen sind.

Besteht insbesondere das magnetische System aus starren Körpern, die durch den leeren Raum geschieden sind, so ist die vollständige Variation des inneren Potentiales Ψ, welche einer Lagenänderung des Systemes entspricht, identisch mit der Variation von Ψ_0 bei gleicher Lagenänderung, aber mit festgehaltenen wahren Ladungen, was wir in Analogie zu (47) schreiben

128) $$\delta \Psi = \delta_\varrho \Psi_0 \,.$$

Für den Ausdruck rechts erhält man aber aus (127′) durch eine geeignete Umformung den Wert

128′) $$\delta_\varrho \Psi_0 = \delta \Psi = \tfrac{1}{2} \sum_h \sum_i \int\int \varrho_h' \varrho_i' \, \delta \left(\frac{1}{r} \right) dk_h \, dk_i \,,$$

der sich unter Berücksichtigung, daß in der Definition (125″) der Funktion Ψ' die Summe Σ' über alle Kombinationen (h, i) zu erstrecken ist, mit der Variation $\delta_{\varrho'} \Psi'$, die in derselben Weise, wie in (125‴) genommen ist, identisch erweist.

Führen wir noch für nicht nur virtuelle, sondern wirklich stattfindende Änderungen, wie früher, das Differentialzeichen ein, so ergiebt hiernach die Gleichung (125‴)

128″) $$d \Psi = d_\varrho \Psi_0 = d_{\varrho'} \Psi' = - d' A_i \,.$$

Die zur Hervorbringung der vorausgesetzten Dislokationen aufzuwendende äußere Arbeit $d'A_a$ folgt hiernach

128‴) $$d' A_a = - d' A_i = d \Psi \,.$$

Hieraus folgt, daß, wenn bei dem Vorgang der Dislokation nicht noch eine anderweitige Umsetzung von Arbeit — z. B. in Wärme — stattfindet, was wir nach den Erfahrungen verneinen können, das innere Potential Ψ des magnetischen Systemes, wenigstens bis auf Glieder, die bei der vorstehend ausgeführten Variation ungeändert bleiben, seine magnetische Energie darstellt. —

Die Dislokation innerhalb des magnetischen Systemes bewirkt Änderungen der influenzierten Ladungen, und $\delta' A_a$ resp. $d' A_a$ kann als der Arbeitsaufwand gedeutet werden, der zu ihrer Hervorbringung erforderlich ist. Dieser Zusammenhang wird klarer gestellt, wenn man beliebige permanente Magnete, aber nur einen magnetisierbaren Körper voraussetzt und $\delta' A_a$ auf dem S. 75 eingeschlagenen Wege auf die Form bringt

$$\delta' A_a = -\int (\alpha\, \delta_{\varrho'} A + \beta\, \delta_{\varrho'} B + \gamma\, \delta_{\varrho'} C)\, dk, \tag{129}$$

worin das Integral über den magnetisierbaren Körper erstreckt ist, und $\delta_{\varrho'} A$, $\delta_{\varrho'} B$, $\delta_{\varrho'} C$ die Änderungen der magnetisierenden Kräfte innerhalb dk bezeichnen, welche bei einer Dislokation der permanenten Magnete gegen den influenzierten Körper eintreten, falls man dabei die influenzierten Momente und somit die freien Ladungen konstant erhält. Auf die Volumeneinheit angewandt ergiebt (129)

$$\delta' \alpha_a = -(\alpha\, \delta_{\varrho'} A + \beta\, \delta_{\varrho'} B + \gamma\, \delta_{\varrho'} C)\,. \tag{129'}$$

Für magnetisierbare Körper, welche die Eigenschaft besitzen, zur Durchführung eines Kreisprozesses einen Arbeitsaufwand nicht zu verlangen, muß dann nach S. 77 gelten

$$\frac{\partial \beta}{\partial C} = \frac{\partial \gamma}{\partial B}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial A} = \frac{\partial \alpha}{\partial C}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial B} = \frac{\partial \beta}{\partial A}; \tag{129''}$$

dies führt darauf, daß die α, β, γ sich als die partiellen Differentialquotienten einer Funktion g der Komponenten A, B, C darstellen lassen müssen, gemäß den Formeln

$$\alpha = -\frac{\partial g}{\partial A}, \quad \beta = -\frac{\partial g}{\partial B}, \quad \gamma = -\frac{\partial g}{\partial C}, \tag{129'''}$$

worin man g als das Magnetisierungspotential der Volumeneinheit bezeichnen kann.

Hieraus folgt dann

$$\delta' \alpha_a = \delta g, \quad \delta' A_a = \int \delta g\, dk = \delta G, \tag{129''''}$$

worin kurz $\int g\, dk = G$ gesetzt ist; G könnte als das gesamte Magnetisierungspotential des Körpers bezeichnet werden. Über den Unter-

schied zwischen G, Ψ und ψ' gilt das S. 77 in einem ähnlichen Fall Gesagte.

Berücksichtigt man die Werte (124'') der magnetischen Momente, so liefert das System (129'') die Beziehung [50])

130) $$\mathfrak{k}_{hk} = \mathfrak{k}_{kh},$$

der nach (124''') sich auch zuordnet

130') $$\mathfrak{m}_{hk} = \mathfrak{m}_{kh};$$

zugleich wird die Funktion g gegeben durch

130'') $$-2g = \mathfrak{k}_{11} A^2 + \mathfrak{k}_{22} B^2 + \ldots + 2\mathfrak{k}_{12} AB,$$

oder wegen (124'') auch durch

130''') $$+8\pi g = R^2 - (\mathfrak{m}_{11} A^2 + \mathfrak{m}_{22} B^2 + \ldots + 2\mathfrak{m}_{12} AB),$$

was sich nach (123'''') schreiben läßt

130'''') $$8\pi(\mathfrak{g} + g) = R^2.$$

Die Bedingung (130) schließt rotatorische Qualitäten bei magnetisierbaren Körpern aus, welche die gemachten Grundannahmen erfüllen. Für solche giebt es dann stets ein spezielles rechtwinkeliges Axensystem X^0, Y^0, Z^0, nämlich dasjenige der Hauptmagnetisierungsaxen, auf welches bezogen die Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ und $\mathfrak{k}_{hk}$ für $h \lesseqgtr k$ verschwinden, und die Grundformeln (123) und (124'') die Gestalten annehmen

131) $$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{m}_1 A^0,\ \mathfrak{B}^0 = \mathfrak{m}_2 B^0,\ \mathfrak{C}^0 = \mathfrak{m}_3 C^0,$$

131') $$\alpha^0 = \mathfrak{k}_1 A^0,\ \beta^0 = \mathfrak{k}_2 B^0,\ \gamma^0 = \mathfrak{k}_3 C^0;$$

sie gestatten mit Hilfe der Ellipsoide

131'') $$\begin{cases} 1 = \mathfrak{m}_1 x^2 + \mathfrak{m}_2 y^2 + \mathfrak{m}_3 z^2, \\ 1 = \mathfrak{k}_1 x^2 + \mathfrak{k}_2 y^2 + \mathfrak{k}_3 z^2 \end{cases}$$

den Zusammenhang zwischen Kraft R, Polarisation $\mathfrak{R}$ und Moment μ geometrisch zu veranschaulichen.

Endlich kann man, wenn die gegenseitige Lage der Hauptaxen X^0, Y^0, Z^0 und der beliebigen Axen X, Y, Z durch das Schema (53) dargestellt ist, die Magnetisierungskonstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ durch die Hauptmagnetisierungskonstanten $\mathfrak{m}_h$ ausdrücken gemäß den Formeln

131''') $$\begin{cases} \mathfrak{m}_{11} = \mathfrak{m}_1 \alpha_1^2 + \mathfrak{m}_2 \alpha_2^2 + \mathfrak{m}_3 \alpha_3^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{m}_{23} = \mathfrak{m}_1 \beta_1 \gamma_1 + \mathfrak{m}_2 \beta_2 \gamma_2 + \mathfrak{m}_3 \beta_3 \gamma_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

denen sich analoge für die Konstanten $\mathfrak{k}_{hk}$ zuordnen. —

Die Voraussetzung für die Gültigkeit der obigen Resultate ist die, daß der magnetisierbare Krystall einen magnetischen Kreisprozeß ohne Aufwand äußerer Arbeit zu vollbringen vermag. Ob sie allgemein erfüllt ist, läßt sich durch die Beobachtung wegen der S. 184 erwähnten Schwierigkeiten kaum feststellen. Dagegen involviert bei allen Krystallgruppen, für welche die rotatorischen Glieder nach Symmetrie verschwinden, und welche aus Schema II'', S. 138, Bd. I, zu ersehen sind, der Ansatz (124''), von dem wir ausgegangen sind, das Vorhandensein der genannten Eigenschaft. Gleiches gilt für isotrope Körper auch dann noch, wenn $\mathfrak{k}$ eine Funktion der magnetisierenden Kraft R ist.

Um so bedeutungsvoller erscheint es, daß die früher genannten stark magnetischen Metalle deutliche Abweichungen von jener Eigenschaft zeigen. Die bezügliche Erscheinung stellt sich in einfachster Form dar, wenn man ein Stück weichen Eisens wiederholt einer von Null bis zu einem Maximum anwachsenden und darauf wieder bis Null abnehmenden magnetisierenden Kraft von konstanter Richtung aussetzt, etwa indem man einen permanenten Magneten ihm aus Unendlich bis auf eine kleine Entfernung nähert und darauf denselben nach Unendlich zurückführt. Man beobachtet in diesem Falle, daß das Moment des erregten Eisens bei gleicher Position des influenzierenden Magneten auf dem Hin- und auf dem Rückwege nicht gleich ist, sondern bei wachsender Kraft dauernd kleiner, als bei abnehmender. Infolge dessen ist die nach (129) für den ganzen Kreislauf berechnete zugeführte Arbeit

$$(A_a) = (\int) d'A_a = -(\int)\int(\alpha\, dA + \beta\, dB + \gamma\, dC)\, dk$$

größer als Null. Da das Anfangs- und das Endmoment bei geeigneter Zubereitung des Eisens merklich gleich groß ist, so kann die zugeführte Arbeit nicht zur Vergrößerung der magnetischen Energie des weichen Eisens dienen; man darf vermuten, daß sie zu einer Steigerung seiner thermischen Energie benutzt wird, da sich, wie feine Versuche erwiesen haben, die Temperatur des weichen Eisens durch wiederholte derartige Kreisprozesse ändert. Geht die Arbeit vollständig hierin auf, so muß nach dem Bd. I, S. 504 Gesagten die im Eisen auftretende, mechanisch gemessene Wärmemenge der Arbeit (A_a) gleich sein.

Um diese Wirkung möglichst zu verstärken, kann man so verfahren, daß man das Versuchsobjekt Kräften von konstanter Richtung aussetzt, die abwechselnd von den größten erreichbaren posi-

tiven Werten bis zu den entsprechenden negativen abnehmen und in umgekehrter Richtung wieder ansteigen.

Diese Beobachtungen zeigen, daß bei den stark magnetischen Metallen der Faktor $\mathfrak{k}$ in dem Ansatz (124) nicht nur von der Stärke der augenblicklich wirkenden magnetisierenden Kraft abhängig ist, sondern auch von den Stärken derer, die früher gewirkt haben. Die ganze Erscheinung, welche man als magnetische Hysteresis bezeichnet, besitzt hiernach eine gewisse Ähnlichkeit mit der Bd. I, S. 457 behandelten elastischen Nachwirkung. Eine erschöpfende theoretische Behandlung hat sie bisher ebensowenig gestattet, wie jene.[51]) —

Was die Bestimmung der magnetischen Influenz gegebener Körper durch gegebene Kräfte angeht, so ist diese Aufgabe, ebenso wie die entsprechende elektrische, auch bei Beschränkung auf Umstände, welche die Anwendung des einfachsten Ansatzes (124″) mit konstanten Koefficienten $\mathfrak{k}_{hk}$ gestatten, nur in ganz vereinzelten Fällen streng gelöst. Ein besonderes praktisches Interesse besitzt der Fall der Influenzierung einer Kugel vom Radius r_1 aus homogener krystallinischer Substanz in einem homogenen magnetischen Felde, der durch einfache Übertragung der Formeln (56) bis (56‴) auf magnetische Verhältnisse zu erledigen ist.

Bezieht man die Kugel auf das System der magnetischen Hauptaxen durch ihr Centrum, bezeichnet mit r_0 den Abstand von demselben und setzt

$$132)\quad \begin{cases} -\psi_i' = A_i x + B_i y + C_i z, \\ -\psi_a' = \overline{A}_a x + \overline{B}_a y + \overline{C}_a z + \mathsf{A}\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x} + \mathsf{B}\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y} + \Gamma\dfrac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z}, \end{cases}$$

so stellt

$$-\psi_a = \overline{A}_a x + \overline{B}_a y + \overline{C}_a z$$

das Gesetz des magnetischen Feldes bei Abwesenheit der magnetischen Kugel dar,

$$-\psi_a'' = \mathsf{A}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial x} + \mathsf{B}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial y} + \Gamma\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial z}$$

die Potentialfunktion der (homogen) erregten Kugel auf äußere Punkte; A, B, Γ sind die magnetischen Gesamtmomente der influenzierten Kugel nach den Koordinatenaxen. Diese Ansätze genügen den gestellten Bedingungen, falls gilt

$$132')\quad A_i = \frac{3\,\overline{A}_a}{\mathfrak{m}_1 + 2}, \qquad B_i = \frac{3\,\overline{B}_a}{\mathfrak{m}_2 + 2}, \qquad C_i = \frac{3\,\overline{C}_a}{\mathfrak{m}_3 + 2},$$

$$\mathsf{A} = \overline{A}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{m}_1 - 1}{\mathfrak{m}_1 + 2}, \quad \mathsf{B} = \overline{B}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{m}_2 - 1}{\mathfrak{m}_2 + 2}, \quad \Gamma = \overline{C}_a r_1^3 \frac{\mathfrak{m}_3 - 1}{\mathfrak{m}_3 + 2}. \qquad 132'')$$

Was die Anwendung dieser Resultate betrifft, so genügt es, auf das S. 85 u. f. in dieser Hinsicht Gesagte zu verweisen; nur einige Punkte, die hier besonderes Interesse erregen, mögen erwähnt werden.

In den Formeln (132″) tritt wieder die Verschiedenheit im Verhalten der Körper, für welche die $\mathfrak{m}_h > 1$ sind, von dem derjenigen, für welche die $\mathfrak{m}_h < 1$ sind, deutlich hervor, auf welche bereits S. 185 aufmerksam gemacht wurde. In dem Falle einer isotropen Kugel liegt bei den ersteren die magnetische Axe der magnetisierenden Kraft gleichsinnig oder direkt, bei den letzteren widersinnig oder invers parallel.

Die Verhältnisse können sich jedoch vollständig ändern, wenn der zu magnetisierende Körper, statt, wie oben angenommen, im leeren Raume, sich in einer selbst magnetisierbaren unendlichen Flüssigkeit befindet. Nach dem S. 186 Erörterten treten hier in allen Formeln statt der $\mathfrak{m}_h$ die Verhältnisse $\mathfrak{m}_h/\mathfrak{m}_f$ auf, worin $\mathfrak{m}_f$ die magnetische Permeabilität der Flüssigkeit bezeichnet. Die Ausdrücke für die Momente nach den Koordinatenaxen in (132″) erhalten nunmehr also die Faktoren

$$\frac{\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_f}{\mathfrak{m}_h + 2\mathfrak{m}_f},$$

und dies zeigt, daß entscheidend für den Sinn der Magnetisierung die Differenz $\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_f$ ist; ein positiver Wert giebt direkte, ein negativer inverse Erregung. —

Was die Gleichgewichtslage der magnetisch influenzierten Krystallkugel betrifft, so liegen wegen der Kleinheit der Differenzen $\mathfrak{m}_h - 1$ die Verhältnisse hier einfacher, wie bei dem analogen elektrischen Problem; der Fall $\mathfrak{m}_h \geqq 4$ ist völlig außer Betracht zu lassen, ja im allgemeinen ist hier jene für sehr schwache Erregbarkeit gültige und auf beliebige Gestalt des krystallinischen Körpers anwendbare angenäherte Betrachtungsweise zulässig und ausreichend, die S. 78 und 80 besprochen ist.

Wie die für eine Kugel erhaltenen Resultate elektrischer Natur, so gestattet auch das für einen dünnen geraden Cylinder oder ein Stäbchen Gefundene die Übertragung auf das magnetische Gebiet. Nach dem S. 87 Gezeigten befindet sich ein magnetisierbares Stäbchen im stabilen Gleichgewicht, wenn seine Axe mit einer Kraftlinie zusammenfällt; es kann daher auch, wenn es leicht beweglich

befestigt ist, durch seine Gleichgewichtslage die Richtung der Kraftlinien an dem Orte angeben, wo es sich befindet. Die Wirkung, die es seinerseits auf andere Punkte des magnetischen Feldes ausübt, ist sehr gering, wenn seine Länge, wie vorausgesetzt, klein ist, und kann nahezu zum Verschwinden gebracht werden, wenn man beiderseits an ihm kettenartig ähnliche Stäbchen anfügt, die gleichfalls nur dann im Gleichgewicht sind, wenn sie mit ihren Axen in die Kraftlinien des Feldes fallen. Hieraus folgt, daß ein System von fadenförmigen Körperchen, das sich im magnetischen Felde zu Ketten ordnet, durch die Richtung seiner Axen die Kraftlinien des Feldes markiert, wie sie vor Einbringung der Körperchen verliefen. Hierauf beruht die bekannte Methode, die Kraftlinien eines Feldes durch auf eine Ebene gestreutes Eisenfeilicht abbilden zu lassen.

§ 21. Die Arbeit der inneren Kräfte bei der Deformation eines magnetischen Systemes. Zurückführung der magnetischen Fernwirkung auf Druckkräfte. Magnetostriktion.

Wie der Inhalt der §§ 7 bis 10 in den vorigen Abschnitten von elektrischen auf magnetische Vorgänge übertragen worden ist, so kann gleiches auch mit den Betrachtungen aus § 11 geschehen; dabei kommt der früher mitunter hervorgehobene Unterschied, der dadurch bedingt ist, daß es Leiter zwar für Elektricität, nicht aber für Magnetismus giebt, nicht in Betracht, weil wir für die speziellen Zwecke des § 11 einen Leiter als den Grenzfall eines Dielektricums mit unendlicher Konstante $\mathfrak{d}$ ansehen konnten. Es genügt demnach, den Gang der Rechnung kurz zu rekapitulieren.

Das Ziel ist die Bestimmung der vollständigen Variation $\delta\Psi$ des inneren magnetischen Potentiales, welche einer Deformation des aus permanenten und veränderlichen Magneten bestehenden Systemes entspricht; die Deformation ist durch die Verrückungskomponenten δu, δv, δw bestimmt, die stetige Funktionen der Koordinaten sein und im Unendlichen, wo sich nur der leere Raum befindet, verschwinden sollen.

Die Variation betrifft ψ, ϱ und die magnetischen Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$. Der erste Anteil ist gleich Null, wenn man für Ψ die spezielle, durch (127') gegebene Form Ψ_0 benutzt und eine magnetische Verteilung voraussetzt, die sich nach der Bedingung (123') im Gleichgewicht befindet. Der zweite ist sogleich angebbar, da nach (59') gilt

$$\delta \varrho = - \left(\frac{\partial \varrho \, \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho \, \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho \, \delta w}{\partial z} \right). \tag{133}$$

Der **dritte** zerfällt selbst wieder in drei Teile, von denen der erste **herrührt** von der **Parallelverschiebung** der ponderabeln Substanz, der **zweite** von ihrer **Drehung**, der dritte von ihrer **Deformation**; die **zwei** ersten können als **geometrische**, der letzte, der hier zunächst **unberücksichtigt** bleiben soll, als **physikalische** Variation der $\mathfrak{m}_{hk}$ bezeichnet werden.

Wir erhalten durch Übertragung der Gleichung (59″)

$$\delta_1 \mathfrak{m}_{hk} = - \left(\frac{\partial \mathfrak{m}_{hk}}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \mathfrak{m}_{hk}}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \mathfrak{m}_{hk}}{\partial z} \delta w \right), \tag{133'}$$

durch Übertragung der Gleichungen (59‴)

$$\left. \begin{array}{l} \delta_2 \mathfrak{m}_{11} = 2 (\mathfrak{m}_{13} \delta' m - \mathfrak{m}_{12} \delta' n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_2 \mathfrak{m}_{23} = (\mathfrak{m}_{22} - \mathfrak{m}_{33}) \delta' l - \mathfrak{m}_{12} \delta' m + \mathfrak{m}_{13} \delta' n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \tag{133''}$$

worin $\delta' l$, $\delta' m$, $\delta' n$ die den Verrückungen δu, δv, δw entsprechenden **Rotationskomponenten** bezeichnen.

Sieht man zunächst, wie schon gesagt, von den physikalischen **Variationen** der Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ ab, setzt also ein Medium voraus, **dessen** Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ durch Deformationen nicht geändert werden, **so erhält** man aus (127′) bei Einführung der Abkürzung (123⁗)

$$\Psi_0 = \int (\varrho \, \psi' - \mathfrak{g}) \, dk$$

und, weil dieser Ausdruck wegen ψ' nicht variiert zu werden braucht,

$$\delta \Psi = \delta_{\psi'} \Psi_0 = \int (\psi' \delta \varrho - \delta_{\psi'} \mathfrak{g}) \, dk. \tag{134}$$

Die Ausführung des Integrales auf der rechten Seite in der S. 93 **gezeigten Weise** führt auf die Form

$$\delta' A_i = - \delta \Psi = \int (\Xi' \delta u + H' \delta v + Z' \delta w) \, dk,$$

worin ist

$$\left. \begin{array}{l} \Xi' = \frac{1}{4\pi} A \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} \right) - \frac{\partial_{\psi'} \mathfrak{g}}{\partial x} \\ \quad + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{A} C - \mathfrak{C} A) - \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{B} A - \mathfrak{A} B), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} \tag{134'}$$

Dies läßt sich leicht auf die Gestalt

$$\Xi' = - \left(\frac{\partial A'_x}{\partial x} + \frac{\partial A'_y}{\partial y} + \frac{\partial A'_z}{\partial z} \right), \tag{134''}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

bringen, worin ist

$$134''')\quad \begin{cases} A'_x = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{A}A - \mathfrak{B}B - \mathfrak{C}C), & B'_z = C'_y = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{C}B + \mathfrak{B}C), \\ B'_y = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{B}B - \mathfrak{C}C - \mathfrak{A}A), & C'_x = A'_z = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{A}C + \mathfrak{C}A), \\ C'_z = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{C}C - \mathfrak{A}A - \mathfrak{B}B), & A'_y = B'_x = -\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{B}A + \mathfrak{A}B). \end{cases}$$

Hierdurch sind die in dem vorausgesetzten speziellen magnetischen System wirkenden inneren körperlichen Kräfte auf Druckkräfte reduziert.

Für isotrope Körper wird einfacher

$$135)\quad \begin{cases} \Xi' = \varrho A - \frac{R^2}{8\pi}\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial x}, \quad H' = \varrho B - \frac{R^2}{8\pi}\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial y}, \\ Z' = \varrho C - \frac{R^2}{8\pi}\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial z} \end{cases}$$

und entsprechend

$$135')\quad \begin{cases} A'_x = -\frac{\mathfrak{m}}{8\pi}(A^2 - B^2 - C^2), & B'_z = C'_y = -\frac{\mathfrak{m}}{4\pi}BC, \\ B'_y = -\frac{\mathfrak{m}}{8\pi}(B^2 - C^2 - A^2), & C'_x = A'_z = -\frac{\mathfrak{m}}{4\pi}CA, \\ C'_z = -\frac{\mathfrak{m}}{8\pi}(C^2 - A^2 - B^2), & A'_y = B'_x = -\frac{\mathfrak{m}}{4\pi}AB. \end{cases}$$

Bei den bisherigen Entwickelungen war, wie auch in der Grundformel (134), vorausgesetzt, daß die Übergänge zwischen den Körpern von verschiedenem magnetischen Verhalten sämtlich stetig stattfänden. Man kann in der S. 97 angegebenen Weise zu dem Fall sprungweiser Änderung übergehen und erhält dann das Resultat, daß auf die Einheit der Grenzfläche zwischen zwei fest zusammenhängenden Medien (h) und (i) ein Grenzdruck mit den Komponenten

$$135'')\quad \Xi'_{hi} = \overline{(A'_n)}_h + \overline{(A'_n)}_i, \quad H'_{hi} = \overline{(B'_n)}_h + \overline{(B'_n)}_i, \quad Z'_{hi} = \overline{(C'_n)}_h + \overline{(C'_n)}_i$$

wirkt. Wegen der Grenzbedingungen, welche ψ' zu erfüllen hat, geben diese Komponenten für die Grenze zwischen zwei isotropen Medien (h) und (i) eine Resultierende, die normal zum Oberflächenelement steht und, von (h) nach (i) positiv gerechnet, die Größe hat

$$135''')\quad N'_{hi} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_i)\left(\overline{R}_h^2 + \frac{\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_i}{\mathfrak{m}_i}\overline{N}_h^2\right),$$

worin R_h die resultierende magnetische Kraft, N_h ihre Komponente nach der äußeren Normalen auf der Begrenzung des Mediums (h) bezeichnet.

Will man die Kräfte bestimmen, welche die Oberflächenelemente der beiden aneinandergrenzenden Körper (h) und (i) einzeln erleiden, welche also zur Geltung kommen, wenn die Körper nicht fest

zusammenhängen, so kommt man mit den bisherigen Hilfsmitteln nur aus, wenn man annimmt, die Drucke seien dieselben, als wenn sich zwischen den Körpern ein enger leerer Raum befände. Dann sind die Werte (135″) zu benutzen, indem ein Mal das Medium (*h*), das andere Mal das Medium (*i*) mit dem leeren Raum vertauscht wird. —

Körper, für welche die bisher abgeleiteten Formeln direkt anwendbar sind, werden nach S. 98 streng durch inkompressible und angenähert durch gasförmige Flüssigkeiten gebildet. Sind sie homogen, so reduzieren sich die magnetischen Gesamtkomponenten Ξ', H', Z, auf Null; denn da Flüssigkeiten permanente Magnetisierung nicht zulassen, so verschwindet für sie auch die wahre magnetische Dichte ϱ. Die magnetische Kraft reduziert sich also ebenso, wie die elektrische, in einer nichtleitenden Flüssigkeit auf einen Oberflächendruck von der durch (135‴) angegebenen Größe. Da für Flüssigkeiten die Magnetisierungskonstanten sehr nahe, für Gase fast streng gleich Eins sind, so kann man diesen Wert noch einfacher schreiben

$$N' = \frac{\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_i}{8\pi} \bar{R}_h^2,$$

was einen anschaulichen Satz enthält.

Über die Methoden der Beobachtung derartiger Drucke ist S. 99 gesprochen; es ist aber zu bemerken, daß die Beobachtung der magnetischen Drucke im allgemeinen leichter ausführbar ist, als die der dielektrischen, weil die Komplikationen der Erscheinungen durch innere und oberflächliche Leitungsfähigkeit völlig fortfallen, außerdem magnetische Feldstärken von ungleich höherem Betrage, als elektrische, praktisch herstellbar sind. Dagegen sind allerdings die Differenzen $\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_i$, mit denen die absoluten Größen der magnetischen Drucke proportional sind, stets außerordentlich klein. —

Um nun jene Ergänzungsglieder der Druckkomponenten zu gewinnen, welche auf der Abhängigkeit der Magnetisierungskonstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ von den Deformationen beruhen, wollen wir sogleich jenen einfachsten und allgemeinsten Weg einschlagen, den wir bei dem analogen elektrischen Problem als den zweiten in § 15 mitgeteilt hatten, und der auf der Annahme beruht, daß der Vorgang der Deformation, wie der Temperaturänderung eines Körpers durch magnetische Influenz ein vollkommen umkehrbarer ist, und daß derselbe daher die Darstellung durch ein thermodynamisches Potential gestattet.

Wir gehen demgemäß von einem (92″) genau entsprechenden Ansatz für die freie Energie ξ_1 der Volumeneinheit aus und schreiben

136) $$\xi_1 = \chi + G_d - \tfrac{1}{2} r \tau^2 - \tau (q_1 x_x + \dots q_6 x_y).$$

Hierin bezeichnet χ das rein elastische Potential, G_d das Magnetisierungspotential der Volumeneinheit; χ ist gegeben durch (69'), für G_d schreiben wir analog der Formel (92)

136') $$-2 G_d = G_{11} A^2 + G_{22} B^2 + G_{33} C^2 + 2 G_{23} BC + 2 G_{31} CA + 2 G_{12} AB,$$

worin

136'') $$G_{hk} = \mathfrak{k}_{hk} + \mathfrak{k}_{hk}^{(0)} \tau + \mathfrak{k}_{hk}^{(1)} x_x + \mathfrak{k}_{hk}^{(2)} y_y + \dots + \mathfrak{k}_{hk}^{(6)} x_y,$$

und die $\mathfrak{k}_{hk}^{(i)}$ Differentialquotienten der $\mathfrak{k}_{hk}$ nach den Argumenten bezeichnen, in welche sie oben multipliziert sind.

Aus diesem Ansatz folgt dann in der gleichen Bezeichnung, die in § 15 angewandt ist,

137) $$\begin{cases} \Xi_x = X_x + q_1 \tau + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{k}_{11}^{(1)} A^2 + \mathfrak{k}_{22}^{(1)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{k}_{12}^{(1)} AB), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Xi_y = X_y + q_6 \tau + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{k}_{11}^{(6)} A^2 + \mathfrak{k}_{22}^{(6)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{k}_{12}^{(6)} AB); \end{cases}$$

137') $$\begin{cases} \alpha = G_{11} A + G_{12} B + G_{13} C, \quad \beta = G_{21} A + G_{22} B + G_{23} C, \\ \qquad \gamma = G_{31} A + G_{32} B + G_{33} C; \end{cases}$$

137'') $$\eta_1 = q_1 x_x + \dots q_6 x_y + r\tau + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{k}_{11}^{(0)} A^2 + \mathfrak{k}_{22}^{(0)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{k}_{12}^{(0)} AB).$$

Faßt man die Gleichungen (137) mit den Faktoren $s_{h1}, s_{h2}, \dots s_{h6}$ für $h = 1, 2 \dots 6$ zusammen und setzt

138) $$\mathfrak{k}_{ki}^{(1)} s_{h1} + \mathfrak{k}_{ki}^{(2)} s_{h2} + \dots \mathfrak{k}_{ki}^{(6)} s_{h6} = \mathfrak{n}_{ki}^{(h)},$$

so erhält man bei Benutzung der Abkürzungen $\xi_x, \dots \xi_y$ aus (74')

138') $$\begin{cases} x_x = \xi_x + a_1 \tau + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}_{11}^{(1)} A^2 + \mathfrak{n}_{22}^{(1)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{n}_{12}^{(1)} AB), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_y = \xi_y + a_6 \tau + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}_{11}^{(6)} A^2 + \mathfrak{n}_{22}^{(6)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{n}_{12}^{(6)} AB). \end{cases}$$

Hierzu ist, wie seiner Zeit zu dem System (94'), zu bemerken, daß die Formeln die Deformationsgrößen $x_x, \dots x_y$ nur dann **vollständig** angeben, wenn die durch (137) bestimmten Druckkomponenten gleichfalls die **vollständigen** sind.

Die in (137) auftretenden quadratischen Formen der Komponenten A, B, C sind direkt die gesuchten Ergänzungsglieder $A_x'', \dots A_y''$ der magnetischen Drucke. Führen wir statt der Magnetisierungszahlen $\mathfrak{k}_{hk}$ und der aus ihnen abgeleiteten $\mathfrak{k}_{hk}^{(i)}$ die für manche Zwecke praktischeren Konstanten $\mathfrak{m}_{hk}$ der magnetischen Permeabilität und die analog aus ihnen gewonnenen $\mathfrak{m}_{hk}^{(i)}$ ein, so nehmen sie die Form an

138'') $$A_x'' = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{m}_{11}^{(1)} A^2 + \mathfrak{m}_{22}^{(1)} B^2 + \dots + 2\, \mathfrak{m}_{12}^{(1)} AB),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die Spezialisierung des vorstehenden Systemes auf die verschiedenen Krystallgruppen geschieht in der auf S. 136 erörterten Weise.

Für isotrope Körper erhält man, indem man drei neue Konstanten $\mathfrak{m}^{(0)}$, $\mathfrak{m}^{(1)}$, $\mathfrak{m}^{(2)}$ einführt, das den Formeln (95) bis (95″) entsprechende System

$$\Xi_x = X_x + q_1 \tau + A_x'', \dots \Xi_y = X_y + A_y'',$$

$$\left.\begin{aligned} A_x'' &= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{m}^{(1)} R^2 + \mathfrak{m}^{(2)} A^2), \quad B_z'' = C_y'' = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)} B C, \\ B_y'' &= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{m}^{(1)} R^2 + \mathfrak{m}^{(2)} B^2), \quad C_x'' = A_z'' = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)} C A, \\ C_z'' &= \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{m}^{(1)} R^2 + \mathfrak{m}^{(2)} C^2), \quad A_y'' = B_x'' = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)} A B; \end{aligned}\right\} \quad 139)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{A}{4\pi}(\mathfrak{m} - 1 + \mathfrak{m}^{(0)}\tau + \mathfrak{m}^{(1)}\vartheta + \mathfrak{m}^{(2)} x_x) + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)}(B x_y + C x_z), \\ \beta &= \frac{B}{4\pi}(\mathfrak{m} - 1 + \mathfrak{m}^{(0)}\tau + \mathfrak{m}^{(1)}\vartheta + \mathfrak{m}^{(2)} y_y) + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)}(C y_z + A y_x), \\ \gamma &= \frac{C}{4\pi}(\mathfrak{m} - 1 + \mathfrak{m}^{(0)}\tau + \mathfrak{m}^{(1)}\vartheta + \mathfrak{m}^{(2)} z_z) + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(2)}(A z_x + B z_y); \end{aligned}\right\} \quad 139')$$

$$\eta_1 = q\,\vartheta + r\,\tau + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{m}^{(0)} R^2. \quad 139'')$$

Die Maxwell'schen magnetischen Spannungen sind in den durch (137) resp. (139) bestimmten $\Xi_x, \dots \Xi_y$ nicht enthalten und müssen, wie S. 137 im analogen Fall ausgeführt ist, wenn die Formeln (138′) Gültigkeit haben sollen, gemäß den Gleichungen (134″) und (135″) in der Art von körperlichen Kräften Ξ', H', Z' und Grenzdrucken Ξ'_{hi}, H'_{hi}, Z'_{hi} eingeführt werden; im anderen Falle ist in (137), wie in den Werten der Abkürzungen $\xi_x, \dots \xi_y$ in (138′), $X_x, \dots X_y$ mit $X_x + A'_x, \dots X_y + A'_y$ zu vertauschen.

Für die vollständigen Druckkomponenten erhält man dann, wie auf S. 137,

$$\left.\begin{aligned} (\Xi_x) &= X_x + A_x' + A_x'' + q_1\tau = X_x + A_x + q_1\tau, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\Xi_y) &= X_y + A_y' + A_y'' + q_6\tau = X_y + A_y + q_6\tau. \end{aligned}\right\} \quad 139''')$$

Endlich bietet sich auch die Möglichkeit, die gesamten magnetischen Anteile $A_x, \dots A_y$ in körperliche Kräfte und Oberflächendrucke zu verwandeln; dann reduzieren sich die Formeln (137) und (138′) auf

$$\Xi_x = X_x + q_1\tau, \dots \Xi_y = X_y + q_6\tau, \quad x_x = \xi_x + a_1\tau, \dots x_y = \xi_y + a_6\tau,$$

wo für die $\xi_x, \dots \xi_y$ die einfachen Formeln (74′) gelten; die Wirkung der magnetischen Spannungen auf die Deformationsgrößen erscheint

hier als eine **indirekte**, durch die rein elastischen Drucke $X_x, \ldots X_y$ vermittelt, welche durch die magnetischen Einflüsse, wie sonst durch mechanische körperliche Kräfte und Oberflächendrucke, modifiziert werden. —

Um für Anwendungen auf isotrope Körper die Ausdrücke für die magnetischen Gesamtdrucke $A_x, \ldots A_y$ zu erhalten, haben wir die Formeln (135′) und (139) zu kombinieren; das Resultat lautet:

$$139'''') \quad \begin{cases} A_x = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{(1)})R^2 - (2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})A^2\right), \\ B_y = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{(1)})R^2 - (2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})B^2\right), \\ C_z = \frac{1}{8\pi}\left((\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{(1)})R^2 - (2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})C^2\right), \\ B_z = C_y = -\frac{1}{8\pi}(2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})BC, \\ C_x = A_z = -\frac{1}{8\pi}(2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})CA, \\ A_y = B_x = -\frac{1}{8\pi}(2\,\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^{(2)})AB. \end{cases}$$

Unter den speziellen, hierher gehörigen Problemen sind am einfachsten diejenigen, welche die **Magnetostriktion** im engeren Sinne betreffen, nämlich die Gesetze der Formänderungen isotroper Körper infolge allein einer Magnetisierung zum Ziele haben. Hier sind die Deformationen und die Temperaturänderungen jederzeit so klein, daß in den Ausdrücken (139′) für α, β, γ die in $x_x, \ldots x_y$ und τ multiplizierten Glieder vernachlässigt werden können; wenn der magnetische Zustand einige Zeit konstant gehalten wird, kann man auch den thermischen Einfluß auf die Drucke und die Deformationsgrößen ignorieren.

Unter diesen Voraussetzungen, welche die Theorie der Vorgänge erheblich vereinfachen, ist es ohne Schwierigkeit möglich, spezielle Probleme der Magnetostriktion zu erledigen; sie haben indessen bisher noch geringe praktische Bedeutung, da die fraglichen Erscheinungen selbst bei den stärkst magnetisierbaren Körpern erst unter der Wirkung so starker magnetischer Kräfte meßbar werden, daß bei ihnen die Anwendbarkeit des einfachen Ansatzes (124) mit konstanten Faktoren $\mathfrak{k}$ aus den S. 187 erörterten Ursachen mehr als zweifelhaft ist.

Vollkommener gelingt dies mit den durch die Formeln (139′) ausgesprochenen Veränderungen der **magnetischen Momente** infolge von **Deformationen**, resp. von **Druckkräften**; natürlich kann

auch hier unter Umständen, wo die Magnetisierungskonstanten sich in Funktionen der magnetisierenden Kraft verwandeln, die Übereinstimmung der Beobachtung mit den Resultaten der obigen Formeln in quantitativer Hinsicht nicht befriedigen. Daß trotzdem die Resultate nach der Seite der Qualität Interesse besitzen, möge an einem einfachen Beispiel dargethan werden.

Wir betrachten einen Kreiscylinder, etwa einen Eisendraht, dessen Axe zur Z-Axe gewählt werden mag, und denken demselben eine Drillung um diese Axe erteilt. Bezeichnet dann δ die relative Drehung zweier um die Längeneinheit von einander entfernten Querschnitte, so ist zu setzen

$$x_x = y_y = z_z = \vartheta = x_y = 0, \quad y_z = x\,\delta, \quad z_x = -\,y\,\delta,$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} \alpha = A\,\mathfrak{k} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} C y\,\delta, \quad \beta = B\,\mathfrak{k} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} C x\,\delta, \\ \gamma = C\,\mathfrak{k} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} (A y - B x)\,\delta; \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

wirkt auf den Draht nur eine longitudinale magnetische Kraft, so giebt dies einfacher

$$\alpha = -\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} C y \delta, \quad \beta = +\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} C x \delta, \quad \gamma = C\,\mathfrak{k}, \tag{140'}$$

die Drillung fügt also zu dem ursprünglich vorhandenen longitudinalen Moment noch ein cirkulares, insofern die Werte α und β eine Magnetisierung darstellen, die gestattet, den Cylinder in ein System ringförmiger homogener Linearmagnete zu zerlegen.

Dies Phänomen gestattet eine Art von Umkehrung.

Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß man in dem Kreiscylinder dadurch cirkulare magnetische Kräfte und eine dementsprechende cirkulare Magnetisierung erregen kann, daß man durch ihn einen longitudinalen galvanischen Strom fließen läßt; hier ist dann

$$A = -\,y D, \quad B = +\,x D, \quad C = 0,$$

worin D eine Konstante bezeichnet. Setzt man dies in (140) ein, so erhält man

$$\alpha = -\,y D\,\mathfrak{k}, \quad \beta = +\,x D\,\mathfrak{k}, \quad \gamma = +\,\tfrac{1}{2}\mathfrak{k}^{(2)} D (x^2 + y^2)\,\delta; \tag{140''}$$

die Drillung fügt also zu der ursprünglichen cirkularen eine longitudinale Magnetisierung hinzu, und das Maß dieser Wirkung giebt dieselbe Konstante $\mathfrak{k}^{(2)}$, welche die reciproke Wirkung bestimmte.

Beiläufig möge erwähnt werden, daß die drei stark magnetischen Metalle, bei denen die $\mathfrak{k}$, wie schon S. 186 bemerkt, Funktionen der resultierenden magnetischen Kraft R sind, auch variable $\mathfrak{k}^{(1)}$ und $\mathfrak{k}^{(2)}$

ergeben, und daß der Verlauf dieser Funktionen bei den verschiedenen Metallen sehr merkwürdig abweichende Gesetze befolgt.

Ähnlich wie influenzierte, so reagieren auch permanente Magnete auf mechanische Einwirkungen, aber es ist noch nicht möglich gewesen, diese Vorgänge der Theorie zu unterwerfen. —

Die Einwirkung einer Temperaturänderung auf die magnetischen Momente ist relativ leicht experimentell zu verfolgen. Das hier im Falle einer gleichförmigen Erwärmung gültige Gesetz erhält man aus (139′), indem man darin $x_x = y_y = z_z = a\tau$ setzt, worin a, der lineare thermische Dilatationskoefficient, als von der Magnetostriktion unabhängig betrachtet werden kann; die bezüglichen Formeln lauten dann

140‴) $$\alpha = \frac{\mathfrak{m}' - 1}{4\pi} A, \quad \beta = \frac{\mathfrak{m}' - 1}{4\pi} B, \quad \gamma = \frac{\mathfrak{m}' - 1}{4\pi} C,$$

worin

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} + (\mathfrak{m}^{(0)} + 3\,\mathfrak{m}^{(1)} a + \mathfrak{m}^{(2)} a)\,\tau$$

ist. Man darf vermuten, daß zumeist die in a multiplizierten Glieder klein neben $\mathfrak{m}^0$ sind, also

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{(0)}\tau$$

gesetzt werden kann.

Dieser Einwirkung entspricht eine reciproke, die aus der Formel (139″) für die Entropie η_1 abgeleitet werden kann. Jene Gleichung lautet, wenn der Körper allein magnetischen Kräften ausgesetzt ist, deren Feld in seinem Innern konstante Größe hat,

$$\eta_1 = r\tau + \left(\frac{\mathfrak{m}^{(0)}}{8\pi} + q\,n\right) R^2,$$

worin n eine Konstante bezeichnet, deren Größe sich nach S. 201 und 202 angeben läßt.

Bei adiabatischer Magnetisierung eines Körpers — wo $\eta_1 = 0$ ist — ergiebt sich

$$\tau = -\left(\frac{\mathfrak{m}^{(0)}}{8\pi} + q\,n\right)\frac{R^2}{r};$$

ist wegen eines kleinen Wertes von n das zweite Glied der Klammer neben dem ersten zu vernachlässigen, so steigt oder fällt die Temperatur des Körpers, je nachdem die Konstante $\mathfrak{m}^{(0)}$ kleiner oder größer als Null ist, d. h., je nachdem bei gleicher magnetisierender Kraft die Magnetisierungszahl mit wachsender Temperatur ab- oder zunimmt. —

Während für alle die in § 11 und 15 angestellten Entwickelungen sich im Vorhergehenden die nahe vollständige Übertragung aus dem Gebiet der Elektricität auf das des Magnetismus als aus-

führbar erwiesen hat, scheint dies bei den Resultaten der §§ 12 bis 14 nicht angängig: eine piezo- und pyromagnetische Erregung acentrischer Krystalle ist nicht beobachtet worden, und es erscheint wenig wahrscheinlich, daß eine solche noch aufgefunden wird, da bei keinem Krystall dieser Art mit einer ausgezeichneten Symmetrieaxe bisher eine permanente Magnetisierung nach deren Richtung gefunden ist. Eine solche müßte nämlich offenbar in Verbindung mit jener Erregbarkeit auftreten; denn einmal sind die Zustände, unter denen die Krystalle gewöhnlich existieren — Atmosphärendruck und eine mittlere Temperatur — nicht irgendwie ausgezeichnete, welche ein singuläres Verhalten der Krystalle rechtfertigen, andererseits bilden sich bei den magnetischen Erregungen nicht jene influenzierten Oberflächenbelegungen, welche bei piezo- und pyroelektrisch erregten Krystallen, wenn der Zustand einige Zeit unverändert andauert, seine Wirkung nach außen kompensieren und zerstören.

Man kann dies Resultat auch theoretisch begründen. Durch Überlegungen, welche im nächsten Kapitel mitgeteilt werden sollen, kann man zeigen, daß die Symmetrieverhältnisse eines homogenen elektrischen und eines homogenen magnetischen Feldes nicht übereinstimmen können. Wenn man in dem ersteren an jeder Stelle eine unendlich-zählige Symmetrieaxe parallel den Kraftlinien annimmt, durch welche unendlich viele gleichwertige Symmetrieebenen gehen, so hat man in dem zweiten allerdings auch eine unendlich-vielzählige Symmetrieaxe, aber daneben statt jener Symmetrieebenen ein Centrum der Symmetrie. Hiernach würden die Symmetrieverhältnisse eine besondere magnetische Erregung an acentrischen Krystallen unmöglich erscheinen lassen.

III. Kapitel.

Elektromagnetismus.

§ 22. Leitersysteme, welche kein elektrisches Gleichgewicht gestatten. Die Gesetze der von ihnen ausgehenden magnetischen Polarisationen und Kräfte. Elektrische Ströme.

Innerhalb eines aus verschiedenen zusammenhängenden Leitern gebildeten Systemes ist nach S. 20 das Zustandekommen dessen, was wir elektrisches Gleichgewicht nannten, nicht möglich, wenn eine gewisse, mit dem VOLTA'schen Spannungsgesetz in Zusammenhang stehende Bedingung durch die Teile des Systemes nicht erfüllt wird. Diese Bedingung ging dahin, daß die Summe der in den Zwischengrenzen wirkenden elektromotorischen Kräfte P_{hk}, unter Rücksicht auf das Vorzeichen über jede innerhalb des Leitersystemes gezogene geschlossene Kurve gebildet, gleich Null sein muß. Während wir im I. Kapitel ausschließlich Systeme voraussetzten, die dieser Bedingung entsprachen, wollen wir jetzt ausschließlich solche betrachten, die ihr widersprechen, d. h. also solche, wo innerhalb der homogenen Teile des Systemes die elektrische Potentialfunktion φ nicht konstant sein kann, die elektrischen Kräfte X, Y, Z also von Null verschieden sein müssen. Ein Beispiel liefert ein einfacher Ring, welcher aus mindestens drei dem VOLTA'schen Gesetz nicht folgenden Leitern derartig zusammengesetzt ist, daß dieselben durch rings von der Oberfläche des Ringes begrenzte Querschnitte voneinander getrennt werden.

Die Grundthatsache, welche ÖRSTEDT[52]) entdeckt, die weitere Beobachtung völlig sicher gestellt hat und wir als Ausgangspunkt benutzen, ist die, daß von einem solchen System, das wir weiterhin kurz das System Σ nennen wollen, nicht nur elektrische, sondern auch magnetische Kräfte ausgehen. Wir müssen das System also nach dem S. 1 und 146 Gesagten als gleichzeitig elektrisch

und magnetisch betrachten, und bezeichnen dementsprechend die von ihm gezeigten Erscheinungen als elektromagnetische.

Wird das System Σ ohne Änderung der Lage seiner Teile so durchschnitten, daß das VOLTA'sche Gesetz jetzt für jede die Grenze nicht überschreitende geschlossene Kurve erfüllt ist, wird also elektrisches Gleichgewicht auf ihm hergestellt, so verschwinden die magnetischen Kräfte. Da nun das elektrische Gleichgewicht dadurch ausgezeichnet ist, daß in jedem homogenen Leiterstück die elektrischen Kräfte gleich Null sind, so ist das Auftreten magnetischer Kräfte an die Existenz elektrischer Kräfte im Innern der homogenen Teile des Systemes Σ gebunden, beruht also jedenfalls nicht auf daselbst befindlichen wahren Magnetismen.

Wir stellen uns die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den von Σ ausgehenden magnetischen Kräften und den in seinem Innern stattfindenden elektrischen Kräften aufzusuchen.

Ihre Lösung werden wir derart stufenweise erreichen, daß wir zunächst allgemeine Eigenschaften der hier stattfindenden magnetischen Kräfte, dann ebensolche der elektrischen ableiten und mit deren Hilfe schließlich den allgemeinen Zusammenhang zwischen beiden gewinnen. —

An die Spitze der auf ihre Lösung hinzielenden Entwickelungen stellen wir die nahezu selbstverständliche Annahme, daß die elektrischen und magnetischen Kräfte K und R, um die es sich bei den vorliegenden Problemen handelt, ihrer Natur nach dieselben sind, wie diejenigen, mit deren Untersuchung wir uns in den beiden ersten Kapiteln beschäftigt haben, und daß sie daher auch die gleichen Wirkungen üben wie jene, speziell elektrische und magnetische Influenzen bewirken, welche den früher aufgestellten Gesetzen genügen.

Es entsprechen ihnen demgemäß auch elektrische und magnetische Polarisationen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{R}$, deren Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit den Komponenten X, Y, Z und A, B, C der Kräfte in denselben Beziehungen stehen, die durch die Formelsysteme (42) und (123) ausgedrückt sind. Und zwar werden wir, gemäß dem S. 89 Gesagten, elektrische Polarisationen ebensowohl in Leitern, als in Nichtleitern zulassen, was im letzten Paragraphen dieses Kapitels Bedeutung erhält.

Den Kräften und Polarisationen legen wir dieselben Stetigkeitseigenschaften bei, die wir in den ersten beiden Kapiteln abgeleitet haben. Insbesondere nehmen wir an, daß durch Unstetigkeitsflächen des physikalischen Verhaltens, zu denen wir stets mit Ladungen ver-

sehene Flächen rechnen, die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetischen Kraft ohne Sprung hindurchgehen; daraus folgt dann, daß die Tangentialkomponenten der Polarisation in diesen Grenzen unstetig werden.

Ferner behalten wir die Beziehungen der Polarisationen zu den wahren, die der Kräfte zu den freien elektrischen und magnetischen Ladungen so bei, wie sie oben angegeben sind, und wie wir sie für die nächsten Anwendungen, soweit sie die magnetischen Größen betreffen, hier herstellen wollen. Es ist nämlich für innere Punkte

141)
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} = 4\pi\varrho, \\ &\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 4\pi\varrho', \end{aligned}\right.$$

worin ϱ die wahre, ϱ' die freie räumliche magnetische Dichte bezeichnet; analog gilt — wie man auch aus den vorstehenden Formeln ableiten kann — für Unstetigkeitsflächen, die wir stets als Grenzen zwischen verschiedenen Teilen (h) und (k) des Systemes betrachten können,

141′)
$$\overline{\mathfrak{N}}_h + \overline{\mathfrak{N}}_k = 4\pi\sigma_{hk}, \quad \overline{N}_h + \overline{N}_k = 4\pi\sigma'_{hk}.$$

Da in diesem Kapitel elektrische Dichten zunächst nicht in Betracht kommen, so ist eine Verwechselung der obigen ϱ und σ mit jenen Bezeichnungen nicht wohl möglich.

Den magnetischen und elektrischen Kräften und Polarisationen entsprechen auch Energiebeträge, und wir verfahren konsequent, wenn wir für sie dieselben Ausdrücke beibehalten, die oben in (45″) und (126″) dafür angegeben sind.

Wesentlich neu ist aber die Annahme, daß bei ganz beliebigen, von den früher betrachteten abweichenden elektromagnetischen Vorgängen jene Ausdrücke die vollständigen Werte der bezüglichen Energien darstellen sollen; führen wir sie ein, so wird der Ausdruck

141″)
$$\left\{\begin{aligned} E &= E_e + E_m \\ &= \frac{1}{8\pi}\int\Big[(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z) + (\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C)\Big]\,dk, \end{aligned}\right.$$

wo das Integral über den ganzen Raum zu erstrecken ist, als die elektromagnetische Energie eines beliebigen Systemes zu bezeichnen sein. —

Gehen wir nun näher auf das gestellte Problem ein, so mag das Leitersystem Σ, auf welchem elektrisches Gleichgewicht unmöglich

ist, ganz beliebig gegeben sein; es kann z. B. beliebig viele, beliebig gestaltete Teile aus homogener oder inhomogener, isotroper oder krystallinischer Substanz enthalten.

Beschränkend setzen wir allein fest, daß es sich nicht in das Unendliche erstreckt, und daß es keine permanenten Magnete enthält; ersteres wegen der analytischen Vereinfachung, letzteres, um die spezifischen, uns interessierenden magnetischen Wirkungen, um die es sich hier handelt, klarer hervortreten zu lassen. Von beiden Beschränkungen kann man sich nachträglich mit Leichtigkeit frei machen.

Außerhalb Σ können noch beliebige Körper vorhanden sein; doch mögen permanente Magnete und weitere Leitersysteme, die, wie Σ, elektrisches Gleichgewicht nicht zulassen, ausgeschlossen sein. In das Unendliche erstrecke sich allseitig nur ein homogenes isotropes Dielektricum, z. B. der leere Raum.

Durch die vorstehenden Beschränkungen ist das Vorhandensein wahrer Magnetismen ausgeschlossen, es ist also ϱ und σ im ganzen Raume gleich Null, während über das Verhalten von ϱ' und σ' im allgemeinen nichts ausgesagt werden kann.

Für einen großen Teil der Entwickelung erweist sich der in den vorigen Kapiteln wiederholt benutzte Kunstgriff vorteilhaft, alle anscheinend unstetigen Übergänge innerhalb des gesamten körperlichen Systemes durch stetige zu ersetzen. Derselbe dispensiert für das Erste von der speziellen Behandlung der Zwischengrenzen, indem er die Polarisationen, deren Tangentialkomponenten hier springen, nunmehr im ganzen Raume stetig werden läßt, dieselben also, da eine Vielwertigkeit von vornherein ausgeschlossen ist, als reguläre Funktionen zu betrachten gestattet.

Unter diesen Voraussetzungen wird als einzige charakteristische Formel für die Polarisationen die aus (141) folgende

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} = 0 \qquad 141''')$$

zu führen sein, wobei nach (123) ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{m}_{11} A + \mathfrak{m}_{12} B + \mathfrak{m}_{13} C,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Wenden wir uns nun zu dem ersten Teil der oben skizzierten Entwickelung, der Untersuchung der allgemeinen magnetischen Eigenschaften des Systemes Σ, die nicht auf wahren Magnetismen beruhen, so ist es nach dem soeben Erörterten selbstverständlich, die Untersuchung auf die Polarisationen, und nicht auf die Kräfte

zu richten, da für die ersteren die Formel (141‴) eine wesentliche Eigenschaft aussagt, der wir etwas entsprechendes für die letzteren nicht zur Seite stellen können.

Um die Gesetze der magnetischen Polarisationen zu gewinnen, genügt es, mit den vorstehenden ganz allgemeinen Annahmen noch ein Beobachtungsresultat zu verbinden, welches die magnetischen Kräfte außerhalb des Systemes Σ betrifft.

Wir wollen als durch die Erfahrung erwiesen betrachten, daß die magnetischen Kräfte außerhalb Σ eine Potentialfunktion ψ besitzen, daselbst also den Bedingungen

$$141'''') \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

genügen, und daß ψ sich im Unendlichen verhält, wie die Potentialfunktion endlicher und im Endlichen liegender Magnetismen.

Die Beobachtungen, auf welche diese Behauptung sich stützt, sind, so weit es sich um die Wirkung des Systemes Σ im leeren Raum handelt, sehr einfach und sicher; es gelingt nämlich, die Wirkung jedes derartigen Systemes innerhalb endlicher Bereiche stets durch geeignet aufgestellte Magnete beliebig genau zu kompensieren. Für die in der Umgebung von Σ etwa vorhandenen festen und flüssigen Körper ist eine solche Beobachtung allerdings schwierig; man kann sie indessen durch den Schluß ersetzen, daß, weil das äußere magnetische Feld des Systemes infolge der genannten Eigenschaft den im vorigen Kapitel betrachteten Feldern gleichartig ist, es auch auf eingeführte fremde Körper, wie jene, wirken muß, nämlich eine scheinbare magnetische Verteilung influenzierend, die wiederum eine Potentialfunktion besitzt.

In § 23 des I. Teiles ist bewiesen worden, daß unter den oben erfüllten Voraussetzungen die Vektorkomponenten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sich vollkommen eindeutig darstellen lassen durch die folgenden Formeln

$$142) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}, \quad \mathfrak{B} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}, \quad \mathfrak{C} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y},$$

worin $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ gegeben sind durch

$$142') \qquad \mathfrak{U} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z}, \quad \mathfrak{V} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}, \quad \mathfrak{W} = \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y},$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ aber durch

$$142'') \qquad \mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\mathfrak{A}_1\, dk_1}{r}, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\mathfrak{B}_1\, dk_1}{r}, \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\mathfrak{C}_1\, dk_1}{r},$$

und diese Integrale über den ganzen Raum zu erstrecken sind.

Aus dem Wert von $\mathfrak{U}$, nämlich aus

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty}\left(\mathfrak{C}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d k_1 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty}\left(\mathfrak{C}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1,$$

erhält man durch eine teilweise Integration, bei der das Integral über die unendliche Kugelfläche verschwindet, weil das körperliche System durchaus im Endlichen liegt und sich im Unendlichen wie aus Magneten bestehend verhält,

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty}\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial z_1}\right)\frac{d k_1}{r},$$

und ähnlich läßt sich $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ umgestalten.

Nun sind aber in jedem homogenen isotropen Körper die magnetischen Kräfte nur um einen konstanten Faktor von den Polarisationen verschieden, und da außerhalb Σ die Bedingungen (141''') erfüllt sind, so ergiebt sich, daß man schreiben kann

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{U} &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial z_1}\right)\frac{d k_1}{r}, \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial z_1} - \frac{\partial \mathfrak{C}_1}{\partial x_1}\right)\frac{d k_1}{r},\\ \mathfrak{W} &= \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathfrak{A}_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial k_1}{r},\end{aligned}\right\} \qquad 142''')$$

wobei die Integrationen nur über das System Σ und die inhomogenen oder krystallinischen Teile der übrigen Körper zu erstrecken sind. Von den ersteren kommen besonders die Übergangsschichten in Betracht, auf die wir weiter unten speziell eingehen werden. —

Wir wollen nun drei Hilfsgrößen $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ einführen durch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right) &= \mathfrak{u}', \quad \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x}\right) = \mathfrak{v}',\\ \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y}\right) &= \mathfrak{w}',\end{aligned}\right\} \qquad 143)$$

in denen v eine Konstante bezeichnet; dann wird aus (142''')

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{u}_1' \, d k_1}{r}, \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{v}_1' \, d k_1}{r}, \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{w}_1' \, d k_1}{r} \qquad 143')$$

und aus (142)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{v}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) d k_1, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{w}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} - \mathfrak{u}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1,\\ \mathfrak{C} &= \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{u}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{v}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right) d k_1.\end{aligned}\right\} \qquad 143'')$$

Die Diskussion der gewonnenen Resultate wollen wir dadurch vereinfachen, daß wir nunmehr den Raum außerhalb des Systemes Σ vollständig von einem homogenen isotropen Dielektricum erfüllt annehmen, also jene bisher zugelassenen äußeren Körper im übrigen beseitigen. Es gelten dann die obigen Formeln, wenn man die Integrationen allein über das System Σ inklusive der dasselbe umgebenden Übergangsschicht erstreckt.

Die Formeln (143″) drücken dann die magnetischen Polarisationen in jedem Punkte des Raumes aus durch deren Werte im Innern des Systemes Σ. Sie sind von großer Allgemeinheit, denn sie ruhen auf den wenigen S. 207 u. f. zusammengestellten Voraussetzungen.

Aus der Definition (143) der Hilfsgrößen $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ ergiebt sich, daß sie Vektorkomponenten sind, da Gleiches von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gilt. Wir bezeichnen den ihnen zugehörigen resultierenden Vektor mit $\mathfrak{i}'$, setzen also

144) $$\mathfrak{i}' = \sqrt{\mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}'^2};$$

die Komponente $\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{i}'$ nach einer Richtung n bestimmt sich hiernach zu

144′) $$\mathfrak{n}' = \mathfrak{i}' \cos(\mathfrak{i}', n) = \mathfrak{u}' \cos(n, x) + \mathfrak{v}' \cos(n, y) + \mathfrak{w}' \cos(n, z).$$

Aus (143) folgt ferner, daß die $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ überall der Bedingung

144″) $$\frac{\partial \mathfrak{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}'}{\partial z} = 0$$

genügen, überdies verschwinden, wo die magnetische Polarisation ein Potential hat.

Integriert man die letzte Formel über ein beliebiges Volumen und bezeichnet dessen Oberfläche mit o, so ergiebt sie

144‴) $$\int \overline{\mathfrak{n}'}\, d o = 0 .$$

Diese Resultate zeigen, daß man $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ als die Komponenten einer stationären Strömung deuten kann, die innerhalb des Leitersystemes Σ verläuft, und deren Dichte nach Größe und Richtung durch den Vektor $\mathfrak{i}'$ dargestellt wird. Wir wollen sie aus später zu erörternden Gründen eine elektrische oder galvanische Strömung nennen und sie von einer später einzuführenden wahren speziell als freie Strömung unterscheiden.

Über ihre Eigenschaften giebt das System (143) Aufschluß. Die auf der linken Seite desselben stehenden Aggregate $(\partial \mathfrak{C}/\partial y - \partial \mathfrak{B}/\partial z)$ u. s. f. kann man im Anschluß an das Bd. I, S. 192 Gesagte die Wirbelkomponenten der magnetischen Polarisation nennen.

Dieselben lassen sich zu einer Resultierenden zusammensetzen, deren Größe die resultierende Wirbelstärke der Polarisation, und deren Richtung diejenige der ihr entsprechenden Wirbelaxe angiebt.

Die Gleichungen sagen dann aus, daß die freie elektrische Strömung $\mathfrak{i}'$ dieser Wirbelaxe parallel verläuft und mit der Wirbelstärke der Polarisation proportional ist. —

Bisher haben wir, getreu der S. 209 eingeführten Annahme, die Übergänge zwischen den verschiedenen Teilen des Systemes Σ, wie diejenigen zwischen ihm und der Umgebung, stetig stattfindend gedacht. Wir wollen jetzt die Modifikationen untersuchen, die unsere Resultate erleiden, wenn wir, dem in Wirklichkeit anscheinend stattfindenden Fall entsprechend, die Übergangsschichten unendlich dünn, also die Übergänge selbst unendlich schnell stattfindend annehmen.

Die Formeln (143), welche die Hilfsgrößen $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ definieren, beziehen sich auf die Volumeneinheit; wir wollen sie mit dem Volumenelement multiplizieren und über ein Stück einer Grenzschicht, dessen Grundfläche do sei, integrieren. Bezeichnen wir dann das Element der Normale innerhalb der Schicht mit dn und setzen

$$\int \mathfrak{u}' dk = do \int \mathfrak{u}' dn = \mathfrak{u}^0 do,$$

so erhalten wir

$$\int \left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right) dn = \frac{4\pi \mathfrak{u}^0}{v};$$

da ferner bei Einführung zweier Richtungen s_1 und s_2 normal zu n

$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial n}\cos(n, y) + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial s_1}\cos(s_1, y) + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial s_2}\cos(s_2, y),$$
$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial n}\cos(n, z) + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial s_1}\cos(s_1, z) + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial s_2}\cos(s_2, z)$$

ist, und da $\partial \mathfrak{C}/\partial s_1$, wie $\partial \mathfrak{C}/\partial s_2$, auch bei unendlich kleiner Dicke der Schicht endlich bleibt, so ergiebt sich bei Zufügung der Formeln für $\mathfrak{v}^0$ und $\mathfrak{w}^0$ das System:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4\pi \mathfrak{u}^0}{v} &= (\bar{\mathfrak{C}}_h \cos(n_h, y) - \bar{\mathfrak{B}}_h \cos(n_h, z)) + (\bar{\mathfrak{C}}_k \cos(n_k, y) - \bar{\mathfrak{B}}_k \cos(n_k, z)),\\
\frac{4\pi \mathfrak{v}^0}{v} &= (\bar{\mathfrak{A}}_h \cos(n_h, z) - \bar{\mathfrak{C}}_h \cos(n_h, x)) + (\bar{\mathfrak{A}}_k \cos(n_k, z) - \bar{\mathfrak{C}}_k \cos(n_k, x)),\\
\frac{4\pi \mathfrak{w}^0}{v} &= (\bar{\mathfrak{B}}_h \cos(n_h, x) - \bar{\mathfrak{A}}_h \cos(n_h, y)) + (\bar{\mathfrak{B}}_k \cos(n_k, x) - \bar{\mathfrak{A}}_k \cos(n_k, y)),
\end{aligned}\right\} \quad 145)$$

worin n_h und n_k die inneren Normalen bezeichnen.

Legt man die Z-Axe in die von (h) nach (k) positiv gerechnete Normale, so nehmen diese Formeln die einfachere Gestalt an

145') $\frac{4\pi\mathfrak{u}^0}{v} = (\overline{\mathfrak{B}}_h - \overline{\mathfrak{B}}_k), \quad \frac{4\pi\mathfrak{v}^0}{v} = -(\overline{\mathfrak{A}}_h - \overline{\mathfrak{A}}_k), \quad \frac{4\pi\mathfrak{w}^0}{v} = 0.$

Es zeigt sich also, daß im allgemeinen neben der räumlichen Strömung i' noch eine in den Zwischengrenzen verlaufende i^0 existiert, die mit der ersteren derartig in Wechselwirkung steht, daß erst beide zusammen die stationäre Bewegung in den Zwischengrenzen herstellen.

In der That würde dort die Betrachtung der räumlichen Strömung allein auf einen nicht stationären Zustand führen. Denn wenn man die Z-Axe in die Normale der Zwischengrenze an der betrachteten Stelle legt, so wird $\mathfrak{w}'$ zur Normalkomponente der Strömung, und da die Tangentialkomponenten der magnetischen Polarisation, d. h. hier $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, beim Durchgang durch eine Unstetigkeitsfläche springen, so ist der Wert von $\mathfrak{w}'$ auf beiden Seiten der Fläche verschieden.

Die oberflächliche Strömung i^0 kommt natürlich auch in den Formeln (143') und (143'') zur Geltung, und zwar lassen sich erstere allgemein, letztere für alle in endlicher Entfernung von der betreffenden Grenzfläche liegenden Punkte einfach dadurch erweitern, daß man die oben angegebenen Glieder auf das Innere der Körper bezieht und ihnen gleichgebildete für die Oberfläche zufügt. So erhält man statt (143')

145'') $$\mathfrak{U} = \frac{1}{v}\left(\int \frac{\mathfrak{u}_1' \, dk_1}{r} + \int \frac{\mathfrak{u}_1^0 \, do}{r}\right)$$

u. s. f., statt (143'')

145''') $$\mathfrak{A} = \frac{1}{v}\left[\int\left(\mathfrak{v}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) dk_1 + \int\left(\mathfrak{v}_1^0 \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1^0 \frac{\partial \overline{\frac{1}{r}}}{\partial y_1}\right) do_1\right]$$

u. s. f., worin die Integrale im allgemeinen außer über das System Σ auch über die Volumina krystallinischer und inhomogener und über die Oberflächen aller äußeren Körper zu erstrecken sind. —

Die obigen Resultate über $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{u}^0, \mathfrak{v}^0, \mathfrak{w}^0$ lassen sich in einer bemerkenswerten Weise umgestalten, wenn man nach (124') die magnetischen Polarisationen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ durch die Kräfte A, B, C und die Momente α, β, γ ausdrückt. Dann ergiebt sich sogleich aus (143)

146) $$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{u}'}{v} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right), \\ \frac{\mathfrak{v}'}{v} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right), \\ \frac{\mathfrak{w}'}{v} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right), \end{aligned}\right.$$

worin nach (124″) bedeutet

$$\alpha = \mathfrak{k}_{11} A + \mathfrak{k}_{12} B + \mathfrak{k}_{13} C,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Aus diesen Formeln ist zu schließen, daß die freie Strömung i′ einen Anteil enthält, der ganz wesentlich von der Magnetisierbarkeit der Körper abhängt und mit derselben, d. h. mit α, β, γ verschwindet; man kann ihn, wenn man will, als eine sekundäre Wirkung der magnetischen Kräfte betrachten, die ihrerseits nach S. 207 auf den elektrischen Kräften X, Y, Z im System Σ beruhen und durch die influenzierten Momente rückwärts modifiziert werden.

Um die Formeln (145) umzuformen, geht man passend von der speziellen Form (145′) derselben aus; bedenkt man, daß die Tangentialkomponenten der magnetischen Kraft stetig durch die Grenze gehen, so erhält man speziell zunächst

$$\frac{\mathfrak{u}^0}{v} = (\beta_h - \beta_k), \quad \frac{\mathfrak{v}^0}{v} = -(\alpha_h - \alpha_k), \quad \mathfrak{w}^0 = 0, \tag{146′}$$

und demnach allgemein

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{u}^0}{v} &= \left[\bar{\gamma}_h \cos(n_h, y) - \bar{\beta}_h \cos(n_h, z)\right] + \left[\bar{\gamma}_k \cos(n_k, y) - \bar{\beta}_k \cos(n_k, z)\right],\\
\frac{\mathfrak{v}^0}{v} &= \left[\bar{\alpha}_h \cos(n_h, z) - \bar{\gamma}_h \cos(n_h, x)\right] + \left[\bar{\alpha}_k \cos(n_k, z) - \bar{\gamma}_k \cos(n_k, x)\right],\\
\frac{\mathfrak{w}^0}{v} &= \left[\bar{\beta}_h \cos(n_h, x) - \bar{\alpha}_h \cos(n_h, y)\right] + \left[\bar{\beta}_k \cos(n_k, x) - \bar{\alpha}_k \cos(n_k, y)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{146″}$$

Dies zeigt, daß die Flächenströme sich ganz auf den von den Momenten abhängigen Teil reduzieren und demnach bei fehlender Magnetisierbarkeit selbst völlig verschwinden. —

Die eben ausgeführte Umformung der Strömungskomponenten zerlegt auch die durch (145‴) dargestellten Polarisationen in je zwei Teile, deren einer von der Magnetisierbarkeit des Systemes Σ unabhängig ist, deren anderer dagegen mit derselben variiert, eventuell auch verschwindet.

Ähnliche Verhältnisse, wie sie hier hervortreten, haben wir in den vorigen Kapiteln vorgefunden bei Aufstellung der allgemeinen Ausdrücke für die Kräfte und die Polarisationen eines Systemes, welches wahre Elektricität oder wahren Magnetismus enthält, und wir haben daher wahre Ladungen — die von den Elektrisierungs- und Magnetisierungszahlen des Systemes unabhängig waren — von den scheinbaren, influenzierten oder gebundenen — die mit jenen Zahlen verschwanden — unterschieden und die Summe beider als freie Ladungen bezeichnet.

Es ist daher konsequent, auch die oben zunächst erhaltenen Komponenten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, wie schon S. 212 gesagt, als freie Stromdichten zu bezeichnen und sie gemäß den Formeln

$$146''')\qquad \mathfrak{u}' = \mathfrak{u} + \mathfrak{u}'', \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'', \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w} + \mathfrak{w}''$$

in wahre und influenzierte oder scheinbare zu zerlegen.

Die wahre elektrische Strömung verläuft ausschließlich räumlich und verhält sich hierin durchaus wie die Bewegung einer gewöhnlichen inkompressibeln Flüssigkeit. Ihre Komponenten sind gegeben durch

$$147)\quad \mathfrak{u} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{v} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{w} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right),$$

die resultierende Strömung $\mathfrak{i}$ hat also eine Dichte, welche mit der Wirbelstärke der magnetischen Kraft proportional ist, und eine Richtung, welche mit derjenigen von deren Wirbelaxe zusammenfällt.

Die Formeln (147) für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ entsprechen durchaus dem System (143) für $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$; die wahren Stromdichten hängen also von den magnetischen Kräften ebenso ab, wie die freien von den magnetischen Polarisationen. Verglichen mit den Formeln (141) ergiebt sich sonach, daß die Beziehungen bei den Strömungen gerade umgekehrt stattfinden, wie bei den Dichten magnetischer Ladungen.

Aus den Definitionen (147) von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ folgt, daß innerhalb Σ die Bedingung gilt

$$147')\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0,$$

an Zwischengrenzen die andere

$$147'')\qquad \bar{\mathfrak{u}}_h + \bar{\mathfrak{u}}_k = 0,$$

und an der äußeren Begrenzung die dritte

$$147''')\qquad \bar{\mathfrak{u}} = 0.$$

Die Richtigkeit der letzten beiden Formeln erkennt man leicht, wenn man wieder die Z-Axe in die Normale auf der Grenzfläche an der betrachteten Stelle legt; dann ist $\mathfrak{w}$ die Normalkomponente, und da A und B stetig durch die Grenze gehen, so hat dieselbe zu beiden Seiten den gleichen Wert; überdies verschwindet $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ im Raum außerhalb Σ, weil dort die magnetische Kraft eine Potentialfunktion besitzt.

Beiläufig werde bemerkt, daß die wahre elektrische Strömung nach den für sie charakteristischen Gleichungen (147) u. f. sich vollständig in Stromfäden der Bd. I, S. 266 betrachteten Art zerlegen läßt, die ihre Gestalt mit der Zeit nicht ändern, und für deren

jeden das Produkt aus Querschnitt und Stromdichte an allen Stellen den gleichen Wert hat. —

Die scheinbare oder influenzierte Strömung verläuft zum Teil räumlich, zum Teil flächenhaft. Die räumlichen Komponenten lauten

$$\mathfrak{u}'' = v\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{v}'' = v\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{w}'' = v\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right); \qquad 148)$$

ihre Resultante i" ist also der Wirbelstärke des magnetischen Momentes proportional und fällt in die Richtung von deren Wirbelaxe.

Die flächenhaften Komponenten, die sich auf eine Grenze zwischen zwei Körpern (h) und (k) beziehen, lassen sich je in zwei Teile zerlegen, die je nur von den Konstanten des einen Teiles abhängen; setzen wir $\mathfrak{u}^o = \mathfrak{u}_h^o + \mathfrak{u}_k^o, \ldots$ so gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_h^o &= v\left[\overline{\gamma}_h \cos(n_h, y) - \overline{\beta}_h \cos(n_h, z)\right], \\ \mathfrak{v}_h^o &= v\left[\overline{\alpha}_h \cos(n_h, z) - \overline{\gamma}_h \cos(n_h, x)\right], \\ \mathfrak{w}_h^o &= v\left[\overline{\beta}_h \cos(n_h, x) - \overline{\alpha}_h \cos(n_h, y)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad 148')$$

Die Resultante $\mathfrak{i}_h^o$ verläuft also in der Grenzfläche o_{hk} normal zu der Richtung der lokalen magnetischen Axe λ_h; ihre Größe ist gleich $v\,\overline{\mu}_h \sin(\lambda_h, n_h)$.

Die Komponenten u", v", w" erfüllen die Bedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}''}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}''}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}''}{\partial z} = 0, \qquad 148'')$$

aber nicht auch die den Formeln (147'') und (147''') entsprechenden einfachen Grenzbedingungen. An Stelle von (147'') tritt hier

$$\int (\overline{\mathfrak{n}_h''} + \overline{\mathfrak{n}_k''})\, do_{hk} + \int \mathfrak{n}^o ds = 0, \qquad 148''')$$

wobei das erste Integral über ein Stück der Zwischengrenze o_{hk} und das zweite über dessen Randkurve s zu erstrecken ist; $\mathfrak{n}^o$ ist parallel der äußeren, in o_{hk} liegenden Normale auf s genommen.

Für die äußere Begrenzung o von Σ ergiebt dies

$$\int \overline{\mathfrak{n}''}\, do + \int \mathfrak{n}^o\, ds = 0. - \qquad 148'''')$$

Da die Magnetisierungszahlen bei allen bekannten Körpern mit Ausnahme der drei starkmagnetischen Metalle Eisen, Kobalt, Nickel außerordentlich klein sind, so ist in praxi, wenn man jene Körper ausschließt, die freie von der wahren elektrischen Strömung nur unmerklich verschieden. Da überdies die Behandlung der letzteren sich erheblich einfacher gestaltet, als die der ersteren, so werden wir im folgenden uns vielfach mit Körpern beschäftigen, deren

Magnetisierbarkeit gleich Null gesetzt werden kann, bei denen also allein die wahre Strömung in Betracht kommt. Hier nehmen die Grundformeln (143) bis (143″) die folgende Gestalt an:[53])

$$149)\quad \mathfrak{u} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right),\quad \mathfrak{v} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right),\quad \mathfrak{w} = \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right),$$

$$149')\quad U = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{u}_1\, d k_1}{r},\qquad V = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{v}_1\, d k_1}{r},\qquad W = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{w}_1\, d k_1}{r},$$

$$149'')\quad \begin{cases} A = \dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z} = \dfrac{1}{v}\displaystyle\int\left(\mathfrak{v}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) d k_1, \\[2ex] B = \dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{1}{v}\displaystyle\int\left(\mathfrak{w}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} - \mathfrak{u}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1, \\[2ex] C = \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{v}\displaystyle\int\left(\mathfrak{u}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{v}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right) d k_1. \end{cases}$$

Die Funktionen U, V, W nennt man die Vektorpotentiale der wahren, wie $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ diejenigen der freien elektrischen Strömung.

Beiläufig möge bemerkt werden, daß in einem homogenen isotropen Körper der Zusammenhang zwischen den Komponenten der wahren und der freien Strömung, die auf denselben magnetischen Kräften beruhen, sehr einfach ist. Da in einem solchen nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{m} A$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{m} B$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{m} C$ ist, so wird auch $\mathfrak{u}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{w}$.

Bei den obigen Entwickelungen ist die Anwesenheit permanenter Magnete und damit wahrer Magnetismen ausdrücklich ausgeschlossen worden. Wir können sie aber leicht zulassen, ohne die Gestalt der erhaltenen allgemeinen Formeln zu verändern, wenn wir die Hypothese einführen, daß die wahren Magnete Analoga bilden zu den oben betrachteten Leitersystemen Σ, daß sie also in Bezug auf äußere Punkte sich verhalten, als wenn sie wahre Magnetismen enthielten, und demgemäß auf jene ein Potential ausüben, — daß aber in ihrem Innern die magnetischen Kräfte Wirbel besitzen, denen gleich, die oben zur Einführung der elektrischen Ströme Veranlassung gegeben haben.

Eine solche Annahme ist zulässig, weil eine Beobachtung im Innern eines permanenten Magneten unmöglich ist, ein angebrachter Hohlraum eben einen äußeren Raum darstellt. Wir werden auf ihre Verfolgung weiter unten zurückkommen.

§ 23. Leitersysteme, welche kein elektrisches Gleichgewicht gestatten. Die allgemeinen Gesetze der in ihnen wirkenden elektrischen Kräfte und ihre Beziehungen zu den ebenda stattfindenden magnetischen.

Wir wenden uns nunmehr zur Ableitung der Gesetze für die elektrischen Kräfte, welche von den im vorigen Paragraphen betrachteten Leitersystemen ausgehen. Da die Beobachtung an solchen mit Sicherheit wahre elektrische Ladungen nachgewiesen hat, die infolge des Zusammenfügens der zuvor unelektrischen Teile zu einem Ganzen entstehen, so ist offenbar die einfachste Annahme, die man der Entwickelung zu Grunde legen kann, die, daß die elektrischen Kräfte durchaus elektrostatischen Charakter besitzen, also eine Potentialfunktion φ' haben. Da die Folgerungen aus dieser Annahme der Erfahrung entsprechen, so sind wir hier der Komplikationen enthoben, welche das analoge Problem der Ableitung der magnetischen Kräfte eben dadurch erfuhr, daß wegen der Abwesenheit wahrer Magnetismen die Existenz einer magnetischen Potentialfunktion für den ganzen Raum ausgeschlossen war.

Um Näheres über die elektrische Potentialfunktion φ' zu erfahren, müssen wir Beobachtungsresultate heranziehen. Hier liegt die Schwierigkeit vor, daß unmittelbare Beobachtungen über das Verhalten der elektrischen Kräfte im Innern des Leitersystemes unmöglich, wir also an dessen Oberfläche gebunden sind und aus den dort wahrgenommenen Erscheinungen auf das Innere schließen müssen. Diese im allgemeinen ungenügende Methode gestattet jedoch in einem Falle sichere Schlüsse, nämlich in dem Falle eines fadenförmigen Leiters von unendlich kleinem Querschnitt, den wir als lineären bezeichnen; denn hier ist jedes innere Raumelement zugleich an der Oberfläche gelegen. Die an solchen Leitern insbesondere durch R. Kohlrausch[54]) erhaltenen Resultate liefern unter Zuhilfenahme der oben aufgestellten Annahme die Mittel zur Lösung unserer Aufgabe.

Wir betrachten somit weiterhin ein Leitersystem Σ, welches gebildet ist aus zu einem Ring verbundenen Stücken homogener, cylindrischer, lineärer, zunächst nicht magnetisierbarer Leiter, deren Querschnitt klein ist gegen ihre Länge und die deshalb wie lineäre behandelt werden können. Man stellt einen solchen Leiterkreis in der einfachsten Form durch Hintereinanderlöten eines Systemes von Drähten dar, deren Lötstellen verschiedene Temperaturen besitzen; man erhält ihn aber auch durch Aneinanderreihen von Metalldrähten und Röhren, welche mit leitenden Flüssigkeiten gefüllt sind.

Verbindet man eine beliebige Stelle eines solchen Ringes durch einen sehr feinen und langen Hilfsdraht mit dem homogenen Konduktor eines Elektrometers, so übt weder der Draht, noch der Konduktor, gleichviel, wie geformt und angeordnet sie sein mögen, magnetische Kräfte aus; auf ihnen ist also elektrostatisches Gleichgewicht vorhanden und demgemäß die elektrische Potentialfunktion, die dort φ'_k heißen möge, konstant.

Rückt man nun den Hilfsdraht von Stelle zu Stelle, so findet sich die Potentialfunktion φ'_k, die am Elektrometer bestimmbar ist, von wechselnder Größe, und zwar ist festgestellt, daß ihre Änderung längs des Ringes, d. h. $\partial \varphi'_k / \partial s$, konstant ist, solange man auf einem homogenen, gleichtemperierten Stücke gleicher Dicke verharrt; daß auf cylindrischen Stücken von gleicher Substanz, aber verschiedenen Querschnitten $q \partial \varphi'_k / \partial s$ konstant ist, und daß endlich für cylindrische Stücke von verschiedener Substanz die Werte $q \partial \varphi'_k / \partial s$ konstante, nur von den betreffenden Substanzen abhängige Zahlenverhältnisse besitzen. Dies alles kann man dahin zusammenfassen, daß für die Teile eines lineären einfachen Leiterkreises das Produkt

$$\mathfrak{l}\, q \frac{\partial \varphi'_k}{\partial s},$$

worin $\mathfrak{l}$ eine der Substanz des Teiles individuelle Konstante bezeichnet, sich von gleicher Größe findet.

Vergleicht man die Werte von φ'_k, die man erhält, wenn man den Hilfsdraht zu beiden Seiten einer Grenze zwischen zwei homogenen Teilen des Kreises, und zwar in deren unmittelbarer Nähe anlegt, so ergeben dieselben sich im allgemeinen verschieden; φ'_k springt also bei dem Überschreiten der Zwischengrenze, und der Betrag dieses Sprunges ist laut der Beobachtung derselbe, wie in dem Falle, daß der Kreis irgendwo unterbrochen ist, d. h. wie in dem Falle des elektrischen Gleichgewichtes auf demselben Leitersystem. Infolgedessen springt φ'_k in einer Zwischengrenze dann nicht, wenn das Material des Hilfsdrahtes und der beiden benachbarten Teile des Leiters zusammen dem Volta'schen Gesetz folgen; denn dies würde, wie eine einfache Überlegung zeigt, im Falle elektrischen Gleichgewichtes ebenfalls nicht geschehen.

Wir schließen hieraus, daß der Wert der Potentialfunktion φ', der auf dem lineären Leiter selbst herrscht und wegen dessen unendlich kleiner Dicke als auf dem Querschnitt konstant angesehen werden darf, bei gestörtem elektrischen Gleichgewicht sich von demjenigen φ'_k des Hilfsdrahtes um denselben Betrag unterscheidet, wie bei hergestelltem; daß also auch längs eines homogenen

Stückes (h) die Differenz $\varphi'_h - \varphi'_k$ gleich der früher mit P_{hk} bezeichneten, nur der Kombination der Substanzen von (h) und (k) — unter (k) den Konduktor verstanden — individuellen Konstante sein muß.

Da diese Konstante bei einer Differentiation von φ' nach s verschwindet, so erhalten wir als Resultat der oben beschriebenen Beobachtung, daß für alle homogenen Teile eines einfachen linearen Leiterkreises das Produkt

$$\mathfrak{l}\, q \frac{\partial \varphi'}{\partial s}$$

denselben Wert besitzt, und daß beim Passieren der Grenze zwischen zwei Teilen (h) und (i) φ' um den konstanten Betrag P_{hi} springt, den wir auf S. 15 als die elektromotorische Kraft der Kombination (h, i) bezeichneten. —

Mit diesen elektrischen Eigenschaften des linearen Leiterkreises verbinden wir nun noch eine magnetische. Um dieselbe einzuführen, geben wir den Gleichungen (149″) für die Kräfte A, B, C vorerst die dem vorliegenden speziellen Fall entsprechende Form. Wir haben, da $d k_1 = q_1 d s_1$ ist, zunächst ohne weiteres für die X-Komponente der magnetischen Kraft

$$A = \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{v}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) q_1 d s_1, \tag{150}$$

worin das Integral über die Axenkurve des Leiterringes zu erstrecken ist. Nun verläuft aber in einem linearen Leiter die wahre Strömung $\mathfrak{i}$ parallel dessen Axe s, es ist also

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{i}\cos(s, x), \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{i}\cos(s, y), \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{i}\cos(s, z); \tag{150'}$$

ferner ist des stationären Zustandes wegen die durch jeden Querschnitt q_1 fließende Strömung gleich, d. h., es ist

$$\mathfrak{i}_1 q_1 = I_1, \tag{150''}$$

worin die Konstante I_1 als die Stromstärke des linearen Leiters bezeichnet wird und in demselben Sinne positiv zu rechnen ist, wie s; daher erhalten wir aus (150) unter Zufügung der analogen Formeln für B und C

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{I_1}{v}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} d y_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} d z_1\right), \quad B = \frac{I_1}{v}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d z_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} d x_1\right), \\ C &= \frac{I_1}{v}\int\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} d x_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d y_1\right). \end{aligned}\right\} \tag{150'''}$$

Diese Formeln, die nach ihrer Ableitung nur für Punkte gelten,

die sich in endlicher Entfernung von dem linearen Leiter befinden, sind nun mit der Beobachtung zu vergleichen, die nach den im vorigen Kapitel erörterten allgemeinen Methoden ausgeführt werden kann.

Das Resultat dieser Vergleichung ist ein doppeltes. Es bestätigt einerseits die Richtigkeit der Überlegungen, die uns zu dem System (150‴) geführt haben, insofern die relativen Werte von A, B, C, wie sie sich durch eine Beobachtung bei ungeänderter Zusammensetzung des Leitersystems, aber bei verschiedener Anordnung des Versuches erhalten lassen, durch jene Formeln dargestellt werden. Andererseits zeigt es, daß die absoluten Werte der A, B, C bei gleicher Konfiguration, aber anderer Zusammensetzung des Leiterkreises abhängen von der für den Leiterkreis charakteristischen Konstanten $\mathfrak{l}\, q\, \partial \varphi' / \partial s$, nämlich ihr proportional sind.

Dies führt darauf, daß I_1 mit $\mathfrak{l}_1 q_1 \partial \varphi' / \partial s_1$ proportional sein muß, und wir dürfen, indem wir berücksichtigen, daß in $\mathfrak{l}$ bereits eine willkürliche Konstante enthalten ist, unter Weglassung der Indices 1 schreiben

151) $$I = -\mathfrak{l}\, q \frac{\partial \varphi'}{\partial s},$$

wobei die Wahl des negativen Vorzeichens sogleich begründet werden wird.

Nun ist φ' auf dem unendlich kleinen Querschnitt des linearen Leiters konstant, mithin ebensowohl der Wert der Potentialfunktion an der Oberfläche, wie im Innern; daher stellt $-\partial \varphi' / \partial s$ die Komponente der elektrischen Kraft nach der Richtung von s im Innern des linearen Leiters dar, die wir mit S bezeichnen wollen. Das letzte Resultat ergiebt uns daher

151′) $$I = \mathfrak{l}\, q\, S, \quad \mathfrak{i} = \mathfrak{l}\, S.$$

Setzen wir jetzt ausdrücklich fest, daß der Ring aus isotropen Körpern besteht und stetig gekrümmt ist, so läßt sich behaupten, daß die Richtung der resultierenden elektrischen Kraft K mit s zusammenfallen muß; denn da nach der Annahme die elektrischen Kräfte die Folge einer Ladung des linearen Leiters sind, so überwiegen wegen des bekannten Verhaltens von Kurvenpotentialen die unendlich nahen Elemente so weit die Wirkung der ferneren, daß sie für die Richtung der Kraft allein maßgebend sind; in ihnen ist aber die Richtung der Axe s die einzige ausgezeichnete.

Wir können demnach schreiben

151″) $$\mathfrak{i} = \mathfrak{l}\, K \text{ und } \mathfrak{i} \,//\, K,$$

oder symmetrisch [55])

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}X,\quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l}Y,\quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}Z. \qquad 151''')$$

Diese Resultate können wir aber von dem isotropen linearen Leiter sogleich auf einen isotropen Leiter von beliebiger Gestalt übertragen; denn einerseits ist der Ursprung der elektrischen Kraft offenbar belanglos, andererseits kann man nach dem S. 21 Gesagten einen Raum, der von einer wahren Strömung erfüllt ist, vollständig in geschlossene Stromfäden auflösen, die dann als lineäre Leiter betrachtet werden dürfen.

Zieht man also noch die Werte (149) von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ heran, so ist durch (151''') der Zusammenhang zwischen den elektrischen und den magnetischen Kräften innerhalb eines isotropen Systemes Σ vollkommen dargelegt. —

Die Erweiterung dieser Betrachtungen auf einen homogenen Krystall geschieht in der schon wiederholt angewandten Weise durch Vergleichung der Formeln (151''') mit den in § 12 des zweiten Teiles für die Strömung eines imponderabeln Fluidums abgeleiteten. Denn die Gleichungen (151''') gestatten die Strömung $\mathfrak{i}$ als eine von jener Art zu betrachten, die durch die elektrische Kraft K in einem isotropen Körper von der spezifischen Leitfähigkeit $\mathfrak{l}$ bewirkt wird, und die wir eben deshalb, ohne damit zunächst eine speziellere Vorstellung zu verbinden, schon oben eine elektrische oder galvanische Strömung genannt haben.

Demgemäß wird die gesuchte Erweiterung sogleich in der Form dargeboten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{l}_{11} X + \mathfrak{l}_{12} Y + \mathfrak{l}_{13} Z, \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{l}_{21} X + \mathfrak{l}_{22} Y + \mathfrak{l}_{23} Z, \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{l}_{31} X + \mathfrak{l}_{32} Y + \mathfrak{l}_{33} Z, \end{aligned}\right\} \qquad 152)$$

wobei die $\mathfrak{l}_{hk}$ die elektrischen Leitfähigkeitskonstanten des betrachteten Krystalles darstellen. Auf die Bestimmung des nach S. 220 in den $\mathfrak{l}_{hk}$ enthaltenen willkürlichen Faktors gehen wir weiter unten ein.

Die Formeln (152) gestatten nach der Ableitung ohne weiteres die Übertragung auf inhomogene Medien, wenn die Inhomogenität nur in einer stetigen Veränderlichkeit der Konstanten $\mathfrak{l}_{hk}$ mit dem Ort besteht. Indessen wird im allgemeinen die von Ort zu Ort wechselnde Substanz des Stromleiters noch eine andere Wirkung üben, die eine genauere Besprechung verlangt; bei dieser kann nun aber von der Veränderlichkeit der $\mathfrak{l}_{hk}$ abgesehen werden.

Wie nämlich zwei benachbarte verschiedenartige Teile eines

lineären Leiterkreises auch während der Strömung auf derjenigen Potentialdifferenz verharren, welche sie im Zustande des elektrischen Gleichgewichtes besitzen, so muß auch eine mit dem Ort stetig wechselnde Substanz auf den Verlauf der elektrischen Potentialfunktion eine direkte Wirkung üben. Diese Wirkung läßt sich aus dem Verhalten bei unstetiger Änderung erschließen, da eine stetige Änderung als eine Folge unendlich vieler und unendlich kleiner sprungweiser angesehen werden kann.

Denkt man sich also bei dem oben vorausgesetzten lineären Leiter unstetige Änderungen der Substanz, und demgemäß Potentialsprünge von dem Betrage $\delta_0\varphi'$ in Abständen δs stattfindend, so wird die ganze Änderung $\delta\varphi'$ von φ' innerhalb δs sich zusammensetzen aus dem auf dem homogenen Teil stattfindenden $\delta_1\varphi'$ und dem Sprung $\delta_0\varphi'$, sodaß wird

$$\delta\varphi' = \delta_0\varphi' + \delta_1\varphi'.$$

Dabei gilt auf dem homogenen Teil von der Länge δs

$$\delta_1\varphi' = -\frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{l}}\,\delta s,$$

und somit

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{l}\left(\frac{\delta\varphi' - \delta_0\varphi'}{\delta s}\right);$$

hierin bezeichnet $-\delta\varphi'/\delta s = -\partial\varphi'/\partial s$ die wirklich wirksame Kraft S, $-\delta_0\varphi'/\delta s$ ist die negative Summe der auf die Längeneinheit reduzierten Potentialsprünge, welche gleichfalls mit einer elektrischen Kraft S^0 äquivalent ist. Wir erhalten sonach für einen lineären inhomogenen Leiter

152′) $$\mathfrak{i} = \mathfrak{l}(S - S^0),$$

für einen körperlichen isotropen

152″) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}(X - X^0), \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l}(Y - Y^0), \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}(Z - Z^0),$$

für einen körperlichen krystallinischen [56])

152‴) $$\begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{l}_{11}(X - X^0) + \mathfrak{l}_{12}(Y - Y^0) + \mathfrak{l}_{13}(Z - Z^0), \\ \mathfrak{v} = \mathfrak{l}_{21}(X - X^0) + \mathfrak{l}_{22}(Y - Y^0) + \mathfrak{l}_{23}(Z - Z^0), \\ \mathfrak{w} = \mathfrak{l}_{31}(X - X^0) + \mathfrak{l}_{32}(Y - Y^0) + \mathfrak{l}_{33}(Z - Z^0); \end{cases}$$

die Verbindung dieser Formeln, in denen X^0, Y^0, Z^0 als gegebene Funktionen des Ortes innerhalb des Leitersystemes zu betrachten sind, mit den allgemeinen Formeln (149‴), enthält die Lösung des im Eingang dieses Kapitels gestellten Problems im denkbar allgemeinsten Falle eines nicht magnetisierbaren Systemes. —

Handelt es sich um ein magnetisierbares Leitersystem, so bietet sich zunächst die prinzipielle Frage, ob die vorstehend erhaltenen

Resultate sich auf die wahre oder auf die freie elektrische Strömung beziehen. In Bezug hierauf werden wir später zeigen, daß die von einem stromdurchflossenen isotropen linearen Leiter ausgehende magnetische Wirkung — singuläre Fälle ausgeschlossen, auf die wir hier nicht eingehen — von dessen Magnetisierbarkeit unabhängig ist, daß somit die oben beschriebenen Beobachtungen uns über die scheinbare elektrische Strömung gar nichts ergeben. Wir dürfen daher die erhaltenen Gesetze, solange wir zu keinen Widersprüchen gelangen, auf die wahren elektrischen Ströme anwenden, und werden demgemäß weiterhin verfahren.

§ 24. Allgemeines über elektrische Ströme. Dimensionen und Einheiten ihrer Stärke und Dichte.

Die in dem vorigen Paragraphen auftretenden, mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bezeichneten Funktionen sind von uns als die Komponenten einer stationären Strömung gedeutet worden, einmal, weil sie Vektorkomponenten sind, und sodann, weil sie in allen inneren Punkten des Leitersystemes Σ nach (147′) die Bedingung erfüllen

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}=0, \tag{153}$$

die für eine Zwischengrenze oder die äußere Oberfläche des Systemes die spezielleren Formen (147″) und (147‴) liefert.

Aus genau denselben Gründen waren S. 62 die elektrischen und S. 183 die magnetischen Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vorübergehend mit Strömungskomponenten verglichen worden. Dennoch hat diese Vergleichung in dem uns jetzt vorliegenden Falle eine tiefere Bedeutung und erweist sich wesentlich fruchtbarer, als in den früheren.

Dies wird besonders durch gewisse Beobachtungsresultate klargestellt, zu deren Besprechung wir uns jetzt wenden wollen.

Sind zwei identische Konduktoren (1) und (2) mit entgegengesetzt gleichen wahren Ladungen $\pm E$ versehen, also auf entgegengesetzte Potentiale $\pm P$ geladen, so wird bei ihrer Verbindung durch einen langen feinen Draht in letzterem ein irgendwie verlaufendes Potentialgefälle entstehen; nach kurzer Zeit haben sich die beiderseitigen Potentiale ausgeglichen, die Potentialfunktion hat auf dem ganzen System den Wert Null. Diesen Vorgang kann man in konsequenter Ausbildung der Vorstellung, die im I. Kapitel zu dem Begriff der elektrischen Ladungen geführt hat, dahin aussprechen, daß die mit dem Potentialgefälle entstandene elektrische

Kraft eine Bewegung der Ladungen hervorruft, die so lange andauert, bis die Potentialfunktion konstant, die elektrische Kraft also gleich Null geworden ist. Man sagt, daß in diesem Falle die elektrische Kraft elektromotorisch wirkt.

Die erwähnte Bewegung hat in dem vorausgesetzten Falle das Resultat, daß die Ladung des Konduktors an jeder Stelle gleich Null wird; über ihren Verlauf im einzelnen ist uns indessen nichts bekannt, und wir sind bezüglich des Bildes, das wir uns davon machen wollen, zunächst vollkommen frei. Wir können uns die ganze positive Ladung vom positiven zum negativen, oder die ganze negative vom negativen zum positiven Konduktor wandern denken; wir können auch annehmen, daß die halbe positive Ladung den ersteren, die halbe negative Ladung den letzteren Weg geht. Überhaupt ist für das Resultat die Bewegung einer positiven Ladung in der einen Richtung äquivalent mit derjenigen der gleich großen negativen in der entgegengesetzten Richtung.

Das obige Experiment gewinnt an Bedeutung durch die sichere Beobachtung, daß der Verbindungsdraht der geladenen Konduktoren während der Ausgleichung der Potentiale magnetische Kräfte von denselben Eigenschaften ausübt, wie die im vorigen Paragraphen vorausgesetzten lineären Leiter, von denen wir aussagten, daß in ihnen ein elektrischer Strom fließe.

Es zeigt sich hierdurch, daß die Bewegung einer wahren Ladung einem wahren elektrischen Strom gleichwertig ist, und wir dürfen annehmen, daß, wenn sich diese Bewegung so regeln ließe, daß durch jeden Querschnitt des Verbindungsdrahtes in positiver Richtung und in gleichen Zeiten dt gleiche positive Ladungen de gingen, dieser Vorgang einem Strom von einer mit de/dt proportionalen konstanten Stärke I äquivalent wäre; demgemäß können wir schreiben

$$153') \qquad I = k\frac{de}{dt} = -k\frac{d(E_1 - E_2)}{2\,dt},$$

wobei das Gleichheitszeichen nur die Äquivalenz der beiden Vorgänge ausdrücken soll, k eine Konstante und E_1 resp. E_2 die momentane Ladung des Konduktors (1) resp. (2) bezeichnet, zwischen denen der Strom von (1) nach (2) verläuft. Eine Ladung des Drahtes kann hierbei außer Betracht bleiben.

Es liegt nahe, diese Äquivalenz nach anderen Seiten hin auszudehnen. Speziell erscheint es als eine direkte Umkehrung und Übertragung der vorstehenden Betrachtungen, zu behaupten, daß infolge des Vorganges, den wir als elektrischen Strom bezeichnen,

im Stromleiter jederzeit Ladungsänderungen auftreten müssen, falls die wahre Strömung i nicht stationär ist, und es entspricht genau der letzten Formel, für die Änderung der wahren elektrischen Dichte ϱ in einem räumlichen Leiter durch Erweiterung von (153) den Ansatz zu machen

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} + k \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 . \qquad 153'')$$

Wir kommen auf diese Überlegung weiter unten zurück. —

Außer der vorstehend erörterten Erfahrungsthatsache ist noch eine Reihe höchst merkwürdiger Experimente zu erwähnen, welche die Auffassung der im vorigen Paragraphen eingeführten wahren elektrischen Strömung als eines Transportes von wahrer elektrischer Ladung von einer ganz anderen Seite nahe legen, Experimente, welche zeigen, daß die Bewegung eines Konduktors oder eines Dielektricums samt der an ihm haftenden wahren Ladung magnetische Kräfte hervorzurufen imstande ist. Sie sind zuerst von Rowland angestellt und darauf mehrfach wiederholt worden.[57])

Diese Rowland'schen Beobachtungen benutzten als Konduktor einen Stanniolring, der auf einer um ihr Centrum in ihrer Ebene drehbaren kreisförmigen Glasplatte aufgelegt und durch radiale Schnitte in schmale Streifen zerlegt war, um die Ladung, wenn sie anders, wie eine materielle Flüssigkeit, die Neigung haben sollte, an ihrem Ort im Raume zu verharren, zu zwingen, an der Rotation Teil zu nehmen. Eine magnetische Wirkung des geladenen und rotierenden Ringes ist durch das Experiment völlig sichergestellt, wenngleich eine genaue Messung ihrer Größe bisher nicht befriedigend gelungen ist.

Immerhin ist zu betonen, daß diese Experimente, so sehr sie die Vorstellung nahe legen, daß ein wahrer elektrischer Strom in der Bewegung wahrer elektrostatischer Ladungen bestehe, keineswegs diese Erklärung zwingend fordern. Der schon S. 4 vorgenommene Vergleich zwischen der Elektrisierung und der Erwärmung eines Körpers zeigt, wie ein physikalischer Vorgang sich in mehrfacher Beziehung widerspruchslos und anschaulich als eine Flüssigkeitsströmung auffassen läßt, während durch ganz schlagende Experimente — dort durch die mechanische Erzeugung von Wärme — nachgewiesen werden kann, daß ein solches Fluidum nicht existiert. Es ist in der That auch der Nachweis erbracht worden, daß der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Erscheinungen sich auf Grund einer allgemeinen Theorie herstellen läßt, welche von der Vorstellung elektrischer Ladungen und ihrer Bewegung gänzlich

unabhängig ist, und wir wollen demgemäß die Bewegung einer Ladung weiterhin zwar als äquivalent, aber nicht als identisch mit einem elektrischen Strom betrachten. Jedenfalls rechtfertigen aber die vorstehend besprochenen Beobachtungen, daß wir die althergebrachten, an die anschauliche Vorstellung einer Strömung anknüpfenden Namen weiterführen und mit den Hilfsgrößen, auf die sie sich beziehen, operieren.

Dabei bietet sich naturgemäß zunächst die Aufgabe, die Dimensionen und Einheiten jener Strömungsgrößen festzusetzen und die Möglichkeit ihrer quantitativen experimentellen Bestimmung zu erörtern. Hierzu müssen wir an die Betrachtungen anknüpfen, durch welche jene Hilfsgrößen oben in die Theorie eingeführt worden sind. —

Blicken wir auf dieselben zurück, so bemerken wir, daß die wahren Strömungskomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ einerseits mit den magnetischen Kräften A, B, C durch die Formeln (149) bis (149″), andererseits mit den elektrischen Kräften X, Y, Z durch die Formeln (152) bis (152‴) in Verbindung gebracht sind.

Beide Formelsysteme enthalten einen willkürlichen konstanten Faktor; in (149) ist er ausdrücklich durch $1/v$ bezeichnet, in (152) ist er nicht besonders geschrieben, sondern steckt, wie S. 223 ausgesprochen, in den Leitfähigkeitskonstanten $\mathfrak{l}_{hk}$, von denen bisher jederzeit nur die Verhältnisse benutzt sind.

Verfügen wir über eine dieser beiden Konstanten, so ist damit Dimension und Einheit für die elektrische Strömung festgesetzt durch diejenigen der Kräfte, mit welchen sie die betreffende Konstante durch die Formeln verbindet. Da weitere Größen, deren Einheiten noch willkürlich sind, in den Formeln nicht auftreten, so ergiebt sich, daß dann die andere der erwähnten beiden Konstanten nach Dimension und Einheit durch die Formeln, in denen sie enthalten ist, bestimmt ist, daß aber ihr universeller Zahlenwert nur durch Messung gefunden werden kann.

Eine naheliegende Verfügung, die früher getroffenen parallel geht, ist die, für die magnetischen Komponenten die Verfügungen des II. Kapitels beizubehalten, dabei aber v einer absoluten Zahl und zwar speziell der Einheit gleich zu setzen.[58]) Die Dimension, welche hierdurch für die Stromdichte $\mathfrak{i}$, wie für deren Komponenten geliefert wird, geht aus (149) hervor, wenn man berücksichtigt, daß R als auf den magnetischen Einheitspol bezogen, die Dimension einer Kraft dividiert durch eine magnetische Masse hat, daß also nach (109′)

154) $$[R] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-1}$$

ist; hieraus ergiebt sich sogleich

$$[\mathfrak{i}_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2} l^{-3/2} t^{-1}, \qquad 154')$$

während für die Stromstärke folgt

$$[I_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-1}. \qquad 154'')$$

In diesem sogenannten elektromagnetischen System, welches durch den Index $\varepsilon\mu$ angedeutet werden mag, ist also das Quadrat einer Stromstärke eine Kraft, $[I_{\varepsilon\mu}^2]$ nämlich gleich $m l t^{-2}$. Die Stromstärke, die sich nach dieser Verfügung und bei Benutzung der absoluten Einheiten cm, g, sec gleich 1/10 ergiebt, führt in der Technik, wo dies System ausschließlich benutzt wird, den Namen ein Ampère; wir werden weiter unten Mittel finden, sie durch ihre elektromagnetische Wirkung anschaulich zu charakterisieren.

Bezüglich der elektrischen Kräfte behält jenes technisch wichtige System die früher im I. Kapitel getroffenen Festsetzungen nicht bei, da dieselben in der Anwendung elektrostatische Messungen fordern würden, die im allgemeinen größere Schwierigkeiten bieten, als die magnetischen und elektromagnetischen; es entnimmt die fundamentalen Definitionen den Gesetzen der Induktion, auf die wir im nächsten Kapitel eingehen werden, wo sich dann auch die Bestimmung der $\mathfrak{l}_{hk}$ ergiebt.

Hierdurch wird dann eine Änderung der Dimensionen aller elektrostatischen Größen bewirkt, die vorher den magnetischen durchaus parallel gingen.

Das elektromagnetische Maßsystem leidet also an einer Unsymmetrie, die seinen wissenschaftlichen Wert herabdrückt; es besitzt aber große praktische Vorzüge, da zu Fundamentalbestimmungen innerhalb seines Rahmens nur relativ leicht und genau ausführbare Messungen erfordert werden. —

Ein zweites, dem ersten direkt entsprechendes Maßsystem wäre dadurch zu gewinnen, daß man über den willkürlichen Faktor verfügt, den die Gleichungen (152) enthalten, welche die Strömungskomponenten mit den elektrischen Kraftkomponenten verbinden, während man für letztere die Festsetzungen des I. Kapitels beibehält. Dies würde dadurch geschehen, daß man die Dimensionen der Leitfähigkeitskonstanten überhaupt und außerdem den Zahlenwert einer von ihnen, am besten die Leitfähigkeit einer isotropen, jederzeit in derselben Reinheit leicht herstellbaren Substanz, z. B. des Quecksilbers, festsetzte.

Man erkennt leicht, daß eine solche Verfügung, welche eine gewisse Verwandtschaft mit der SIEMENS'schen Festsetzung einer

Widerstandseinheit besitzt, prinzipiell noch ungünstiger ist, als die frühere, die $v = 1$ wählt, da sie eine Substanz vor allen übrigen bevorzugt; sie hat daher keine dauernde Annahme gefunden. —

Endlich kommt noch ein drittes Maßsystem in Betracht, welches für alle in den Kapiteln I und II auftretenden elektrischen und magnetischen Größen, insbesondere für die Kräfte K und R, die früheren Bestimmungen beibehält und im übrigen auf dem Gedanken ruht, daß die Bewegung einer elektrischen Ladung durch einen linearen Leiter, wie sie oben auseinandergesetzt ist, einer elektrischen Strömung äquivalent ist; dasselbe ist dadurch charakterisiert, daß in der Formel (153′) die Proportionalitätskonstante $k = 1$, also

155) $$I = \frac{de}{dt}$$

gesetzt ist, wobei, wie gesagt, e in den früheren elektrostatischen Einheiten gemessen wird.[59])

Dieses Maßsystem, welches man das elektrostatisch-magnetische nennen könnte, empfiehlt sich durch seine Symmetrie, wie durch die einfache Verbindung, die es zwischen elektrischen Gleichgewichts- und Strömungsvorgängen herstellt; es knüpft hierbei allerdings an eine spezielle Erfahrungsthatsache an, setzt aber damit keineswegs eine spezielle und zweifelhafte Vorstellung über den Mechanismus der elektrischen Strömung voraus. Wegen seiner besonderen Bequemlichkeit bei allgemeinen theoretischen Entwickelungen wollen wir es weiterhin unter dem kurzen Namen des wissenschaftlichen Maßsystemes ausschließlich benutzen, wenn wir gleich noch einmal auf seinen Zusammenhang mit dem technisch so wichtigen elektromagnetischen System eingehen müssen, das, wie schon oben bemerkt, hier noch nicht vollständig entwickelt werden konnte.

Eine Beziehung zwischen den beiden Maßsystemen können wir allerdings bereits hier aufstellen. Da nämlich in den die wahren Strömungen definierenden Formeln (149) bei Anwendung des elektromagnetischen Systemes der Faktor v gleich Eins gesetzt war, so ergiebt sich sogleich

155′) $$\mathfrak{i} = v\,\mathfrak{i}_{\varepsilon\mu}, \quad I = v\,I_{\varepsilon\mu},$$

wobei, wie immer, die Buchstaben ohne den Index $\varepsilon\mu$ in wissenschaftlichen Einheiten ausgedrückt zu denken sind.

Die Dimensionen einer Stromstärke I und einer Stromdichte $\mathfrak{i}$ ergeben sich im wissenschaftlichen Maßsystem aus der Dimension (5′) der elektrischen Ladung nach (155), wie folgt:

$$[I] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-2}, \quad [\mathfrak{i}] = m^{1/2} l^{-1/2} t^{-2}. \qquad 155'')$$

Die Konstante v erhält eine Dimension, die man aus den Grundformeln (149) ableiten kann, wenn man die in (154) gegebene Dimension von R mit dem Resultat (155″) für $\mathfrak{i}$ verbindet; es gilt nämlich

$$[v] = l t^{-1}, \qquad 155''')$$

die Konstante v ist in unserem Maßsystem also eine Geschwindigkeit.

Über ihre numerische Bestimmung, wie über die Methoden zur Messung von Stromstärken werden wir in einem folgenden Paragraphen handeln.

Für die Konstanten der Leitungsfähigkeit folgt aus den Fundamentalformeln (152), da die Dimension der elektrischen Kraft K gleich derjenigen der magnetischen R ist,

$$[\mathfrak{l}_{hk}] = t^{-1}; \qquad 155'''')$$

ihre Zahlwerte sind durch Messung zu bestimmen. —

§ 25. Das Biot-Savart'sche Elementargesetz. Die Wirkung eines linearen Stromlaufes auf einen Magnetpol und die eines endlichen Magneten auf ein Stromelement.

Nachdem durch den vorigen Abschnitt über die Konstanten und die Einheiten unserer Grundformeln Klarheit geschafft ist, gehen wir zu ihrer Diskussion und Anwendung über und beschäftigen uns hier speziell mit dem Gesetz der magnetischen Wirkung wahrer elektrischer Ströme, welches die Formeln (149″) aussprechen.

Eine sehr naheliegende Interpretation dieser Formeln geht dahin, die Elemente der die drei Komponenten A, B, C definierenden Integrale als die Anteile zu betrachten, welche das einzelne Volumenelement zur Gesamtwirkung beiträgt, also ein Elementargesetz der elektromagnetischen Wirkung einzuführen, welches lautet

$$\left.\begin{aligned} d'A &= \frac{1}{v}\Big(\mathfrak{v}_1 (z - z_1) - \mathfrak{w}_1 (y - y_1)\Big)\frac{d k_1}{r^3}, \\ d'B &= \frac{1}{v}\Big(\mathfrak{w}_1 (x - x_1) - \mathfrak{u}_1 (z - z_1)\Big)\frac{d k_1}{r^3}, \\ d'C &= \frac{1}{v}\Big(\mathfrak{u}_1 (y - y_1) - \mathfrak{v}_1 (x - x_1)\Big)\frac{d k_1}{r^3}. \end{aligned}\right\} \qquad 156)$$

Diese Zerlegung des Integrales ist als mathematische Operation jederzeit zulässig, da die Formeln (149″) bei Berechnung der Wirkung auf den Einheitspol in Wirklichkeit stets nur auf das ganze Leitersystem angewandt vorkommen, und ein isoliertes stromdurch-

flossenes Volumenelement nicht möglich ist; sie hat aber zunächst keine allgemeine physikalische Bedeutung.

Das durch (156) gegebene Elementargesetz spricht aus, daß die resultierende Wirkung $d'R$ normal steht auf der Richtung der Strömung $\mathfrak{i}_1$, sowie auf der Richtung der Verbindungslinie r zwischen $d k_1$ und dem Einheitspol, und daß sie eine Größe besitzt, gegeben durch

156′) $$d'R = \frac{\mathfrak{i}_1 \, d k_1}{v \, r^2} \sin (\mathfrak{i}, r).$$

Diese Formel führt den Namen des BIOT- und SAVART'schen Gesetzes und ist von LAPLACE aus Beobachtungen der genannten Physiker deduziert.[60])

Der Sinn der Richtung von $d'R$ wird durch die bekannte AMPÈRE'sche Regel dahin angegeben, daß eine mit $\mathfrak{i}_1$ vorwärts schwimmende Figur, welche den Einheitspol anblickt, die Richtung von $d'R$ mit ausgestrecktem linken Arm markiert; diese Regel läßt sich leicht aus den vorstehenden Formeln ableiten.

Über die Analogie der Formeln (149″) und (156) mit denjenigen, welche die Geschwindigkeitskomponenten innerhalb einer unendlichen inkompressibeln Flüssigkeit mit deren Wirbelkomponenten verbinden, ist Bd. I, S. 284 gesprochen worden.

Die Übereinstimmung ist eine rein analytische und beruht darauf, daß hier, wie dort, Vektorkomponenten nach den allgemeinen Grundsätzen in § 23 des I. Teiles durch Aggregate von Differentialquotienten ausgedrückt sind. —

Von viel größerer Bedeutung ist eine andere Analogie, welche die Vergleichung der Formeln (150‴) für die von einem lineären Leiterring im leeren Raum ausgeübten Komponenten mit den Gesetzen der Wirkung einer magnetischen Doppelfläche ergiebt, die in (110⁗) enthalten sind. Beide Formelsysteme stimmen bis auf die konstanten Faktoren vollständig überein, wenn die Axenkurve des lineären Leiters die Randkurve der Doppelfläche bildet, und auch diese Faktoren werden identisch, wenn zwischen dem Einheitsmoment ν_1 der Doppelfläche und der Stromstärke I_1 die Beziehung besteht

156″) $$\nu_1 = \frac{I_1}{v}.$$

Für die richtige Anwendung dieser Formel ist zu berücksichtigen, daß ν_1 auf diejenige Normale der Doppelfläche bezogen ist, welche von der Axenkurve s_1 in positivem Sinne umlaufen wird.

Die Relation (156″) ist von um so größerer Bedeutung, als sich zeigen wird, daß sie im allgemeinen auch dann noch gilt, wenn sich

der lineäre Leiter nicht im leeren Raume, sondern in einer unendlichen, homogenen, magnetisierbaren Flüssigkeit befindet. —

Nach dem S. 210 Gesagten besitzt die magnetische Kraft R im Außenraum von Σ jederzeit eine Potentialfunktion, und Gleiches gilt hiernach bei einem lineären Leiter für alle Punkte, die ihm nicht unendlich nahe kommen. Den Wert der Potentialfunktion eines lineären Stromlaufes können wir sogleich angeben, denn sie ist gleich derjenigen der ihm äquivalenten magnetischen Doppelfläche; durch Übertragung der Formel (110″) erhalten wir somit ohne weiteres

$$\psi = \frac{I_1}{v}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1}\, d o_1, \quad = \frac{I_1}{v}\cdot \omega_1 . \tag{157}$$

Hierin bezeichnet n_1 die Normale auf der Doppelfläche o_1, positiv in dem Sinne gerechnet, welcher von der positiven Richtung s_1 positiv umlaufen wird; ω_1 ist die Öffnung des von dem Einheitspol nach dem Stromlauf konstruierten Kegels, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem innerhalb desselben die Doppelfläche dem Einheitspole die positive oder negative Normale zuwendet.

Die vorstehenden Betrachtungen gelten zunächst nur für einfache lineäre Leiterkreise, sogenannte unverzweigte Leiter; sie lassen sich ohne Schwierigkeit auf verzweigte erweitern, da diese, wie später gezeigt werden wird, jederzeit als die Superposition mehrerer unverzweigter betrachtet werden können.

Indessen ist zu beachten, daß die Übereinstimmung zwischen den Potentialfunktionen eines lineären Stromlaufes und einer magnetischen Doppelfläche nicht ganz vollständig ist. Gehen wir nämlich von einem der einen Seite der Doppelfläche sehr nahen Punkte aus, umkreisen die Randkurve und schreiten bis zu dem der Ausgangsstelle auf der anderen Seite gegenüberliegenden Punkte fort, so ist hier nach Bd. I, S. 173, der Wert der Potentialfunktion um $\pm 4\pi\nu_1$ von dem Ausgangswert verschieden; beim Durchdringen der Doppelfläche, die man sich hierbei wie S. 162 passend als den Grenzfall einer magnetischen Schale von endlicher Dicke denkt, geht dieser Unterschied allmählich verloren, sodaß im Ausgangspunkt der Ausgangswert wieder erreicht wird. Die Potentialfunktion der Doppelfläche ist also einwertig, wie dies nach der Grunddefinition der Potentialfunktion eines Magneten nicht anders sein kann.

Anders bei dem lineären elektrischen Stromkreis. Auch hier ändert sich ψ bei einer Umkreisung der Randkurve, und zwar um den korrespondierenden Betrag $\pm 4\pi I_1/v$; aber da faktisch eine

magnetische Doppelfläche nicht vorhanden ist, so wird diese Änderung durch keine Ursache aufgehoben; die Potentialfunktion des linearen Stromkreises ist mehrwertig, bei jedem Umlauf des Leiters um $4\pi I_1/v$ wachsend, während ihre Differentialquotienten, wie nach ihrer physikalischen Bedeutung als Kraftkomponenten und deren Änderungen zu erwarten, einwertig sind.

Die Mehrwertigkeit von ψ bedingt eine Erscheinung von sehr großer prinzipieller Bedeutung. Die Arbeit, welche an dem Einheitspol bei einer unendlich kleinen Verschiebung durch die von dem Leiter ausgehenden Kräfte geleistet wird, ist bestimmt durch

$$157') \qquad \delta' \alpha_i = -\delta_I \psi,$$

wobei die Variation von ψ nach den Resultaten des II. Kapitels bei konstantem magnetischen Verhalten des Leitersystemes, und somit bei konstant gehaltenem Strom I, auszuführen ist; die Arbeit äußerer, diese magnetischen kompensierender Kräfte bei der gleichen Bewegung lautet daher

$$157'') \qquad \delta' \alpha_a = +\delta_I \psi.$$

Für einen Kreisprozeß, welcher den Stromlauf einmal umschließt, erhält man demgemäß

$$157''') \qquad (\alpha_a) = \oint d_I \psi = \pm \frac{4\pi I_1}{v},$$

wo das Vorzeichen von der Umkreisungsrichtung abhängt. Der Kreisprozeß erfordert also positive oder negative äußere Arbeit; nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie kann diese aber in der Bewegung des Poles nicht aufgehen, sondern muß am Schluß derselben als in anderer Form erhalten nachgewiesen werden können. Wir werden uns weiter unten ausführlich mit dieser Frage beschäftigen. —

Weiter machen wir darauf aufmerksam, daß die für ψ in (157) erhaltene Form eines Integrales über eine beliebige, durch den linearen Stromlauf begrenzte Fläche eine wichtige Zerlegung der Potentialfunktion des Stromlaufes an die Hand giebt. Zerlegen wir nämlich die Fläche o_1 in beliebige Stücke $o_1^{(h)}$, so können wir die Formel (157) schreiben

$$157'''') \qquad \psi = \frac{I_1}{v} \sum_h \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d o_1^{(h)}.$$

Jedes Glied der Summe stellt nun aber die Potentialfunktion eines ein Flächenstück $o_1^{(h)}$ umlaufenden Stromes I_1 dar, und hieraus

folgt, daß man einen lineären Stromlauf s_1 hinsichtlich seiner elektromagnetischen Wirkung jederzeit ersetzen kann durch ein System von Strömen gleicher Stärke, welche die Teile, seien sie nun endlich oder unendlich klein, einer durch s_1 begrenzten Fläche sämtlich in gleichem Sinne umlaufen. Wir bezeichnen dies Resultat kurz als den Satz von der Äquivalenz eines lineären Stromkreises mit seinen Elementarströmen.

Die Formel (157) läßt sich benutzen, um die Einheit der Stromstärke in einem beliebigen Maßsystem anschaulich durch ihre Wirkung zu charakterisieren.

Wir nehmen an, dieselbe umflösse eine ebene Fläche F_1, und auf der positiven Normalen n_1 eines ihrer Punkte, z. B. ihres Schwerpunktes, befände sich in sehr großer Entfernung r der Einheitspol; dann ist $\omega_1 = F_1/r^2$, und die parallel n_1 gerichtete magnetische Kraft R hat den Wert

$$R = + \frac{2 F_1 I_1}{v r^3}.$$

Setzt man hierin I_1 gleich Eins, so erhält man einen einfachen anschaulichen Wert für R, der das Gewünschte leistet; bei Benutzung des elektromagnetischen Maßsystemes ist $v = 1$. —

Die Berechnung der Kegelöffnung ω_1 liefert überhaupt im allgemeinen die einfachsten Werte, wenn der lineäre Stromkreis, auf den sie sich bezieht, eben ist.

Legen wir in seine Ebene die XY-Ebene und durch den Einheitspol die Z-Axe, zerlegen wir dann die positiv umlaufen gedachte Fläche F_1 durch Polarkoordinaten e_1 und ϑ_1 in Elemente dF_1, so wird

$$\omega_1 = \int \frac{dF_1}{r^2} \cos(r, z) = z \iint \frac{e_1\, de_1\, d\vartheta_1}{r^3}, \qquad 158)$$

wobei $r^2 = e_1^2 + z^2$ ist.

Wegen $r\,dr = e_1 de_1$ erhält man hieraus sogleich

$$\omega_1 = - z \int \left| \frac{1}{r} \right| d\vartheta_1,$$

wo für r die Grenzen einzusetzen sind. Umschlingt der Stromlauf einmal den Koordinatenanfang, der durch die Lage des Einheitspoles vorgeschrieben ist, so sind die Grenzen für r resp. z und $\bar{r}$, wobei $\bar{r}$ die Entfernung des Einheitspoles von dem in der Richtung ϑ_1 liegenden Stromelement bezeichnet; hier gilt dann

$$\omega_1 = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{z}{\bar{r}}\right) d\vartheta_1 = 2\pi - z \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta_1}{\bar{r}}. \qquad 158')$$

Für einen Kreisstrom vom Radius a_1 um den Koordinatenanfang als Centrum ist $\bar{r}^2 = a_1^2 + z^2$, also konstant, und

158'') $$\omega_1 = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\bar{r}}\right), \text{ also } \psi = \frac{2\pi I_1}{v}\left(1 - \frac{z}{\bar{r}}\right).$$

Die Kraft, welche der Strom auf den auf seiner Axe liegenden Einheitspol ausübt, ist nach Symmetrie jener Axe parallel, ihre Größe ist

158''') $$Z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi I_1}{v}\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{z^2}{\bar{r}^3}\right) = \frac{2\pi I_1}{v\bar{r}}\sin^2\chi,$$

worin $z/\bar{r} = \cos\chi$ gesetzt ist; für den im Kreiscentrum liegenden Pol ergiebt dies

$$Z = \frac{2\pi I_1}{v a_1},$$

woraus gleichfalls eine anschauliche Deutung der Stromeinheit abzuleiten ist.

Für einen unendlichen geradlinigen Strom, den man in die Y-Axe legen und durch einen in der XY-Ebene liegenden unendlichen Halbkreis geschlossen denken kann, erhält man aus (158')

158'''') $$\omega_1 = 2(\pi - \vartheta),\ \psi = \frac{2I_1}{v}(\pi - \vartheta),$$

worin ϑ den Winkel zwischen dem senkrechten Abstand des Einheitspoles von dem geradlinigen Strom und der XY-Ebene bezeichnet.

Liegt der Pol der umlaufenen Fläche F_1 so nahe, daß z neben $\bar{e}_1$ verschwindend klein ist, so kann man in (158') $\bar{r}$ mit $\bar{e}$ vertauschen und erhält

$$\omega_1 = 2\pi - z\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_1}{\bar{e}}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} = -z\int_0^{2\pi}\frac{\cos\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\bar{e}^2},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial y} = -z\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1}{\bar{e}^2},\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial z} = -\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta_1}{\bar{e}},$$

woraus man ablesen kann, von welcher Ordnung unendlich klein der Anteil unendlich ferner Stromelemente am Potential und besonders an den magnetischen Komponenten wird. —

Aus praktischen Gründen, deren Auseinandersetzung uns später beschäftigen wird, benutzt man bei der großen Mehrzahl aller Beobachtungen über elektromagnetische Wirkungen Stromleiter, welche aus einem körperlichen und einem — nahezu — linearen Teile zu-

sammengesetzt sind. Der körperliche Teil ist aus verschiedenen Substanzen — Metallen und Flüssigkeiten, die zusammen das VOLTA'sche Gesetz nicht befolgen, — gebildet, der lineäre, der an zwei Stellen sich an ihn anschließt, ist meist ein homogener Metalldraht; ersteren nennt man die galvanische Kette, letzteren die Schließung. Stellt man die Kette in bedeutender Entfernung vom Beobachtungsort auf und führt die Schließung in zwei parallelen, einander äußerst nahen Leitungen nach einer Stelle (0) an demselben hin, läßt sie sich dagegen von (0) aus beliebig verzweigen, so zeigt die obige Formel (157), daß man die Kette und die Zuleitung nach der Stelle (0) hin bei der Berechnung der von dem Leitersystem geübten magnetischen Wirkung ganz außer Acht lassen und allein das von (0) ausgehende Stück des lineären Leiters als wirksam ansehen kann. Denn denkt man sich das ganze Leitersystem in Stromfäden aufgelöst, so zerfallen die von den einzelnen Fäden umlaufenen Flächen je in zwei gesonderte — d. h. nur durch die unwirksame Doppelleitung verbundene — Teile, von denen der eine, in der Kette verlaufende, wegen deren vorausgesetzter großer Entfernung nur eine verschwindende Kegelöffnung liefert, sodaß also nur die im Beobachtungsraum liegende eine Wirkung giebt.

Dies zeigt, wie man nahezu geschlossene homogene lineäre Leiter herstellen kann, in denen doch eine elektrische Strömung kreist.

Die elektromagnetische Wirkung eines lineären Leiters von gegebener Länge wird in vielen Fällen dadurch gesteigert, daß man ihn zu einer Rolle windet; eine solche ist dann angenähert als ein System von parallelen ebenen Stromläufen zu betrachten und die dem ganzen Leiter entsprechende Kegelöffnung gleich der Summe der nach den einzelnen Windungen hin konstruierten Kegelöffnungen zu setzen. Der Stromlauf wird dann am vorteilhaftesten angeordnet und aufgestellt sein, wenn das Gefälle dieser Summe am Beobachtungsort einen möglichst großen Wert besitzt. —

Während wir uns in diesem Paragraphen bisher allein mit der Wirkung des elektrischen Stromes auf einen Magnetpol beschäftigt haben, wollen wir zum Schluß noch Einiges über die umgekehrte Wirkung beibringen. Deren Komponenten kann man aus den Formeln (149'') für die auf den Einheitspol ausgeübte Wirkung folgern, wenn man Wirkung und Gegenwirkung als gleich annimmt und demgemäß dort nur die Vorzeichen der rechts stehenden Integrale umkehrt.

Bezeichnet man dann die von dem Einheitspol auf das System Σ ausgeübten magnetischen Komponenten durch Ξ_1, H_1, Z_1, so gilt ersichtlich

$$159)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \Xi_1 = \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{w}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{v}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right) d k_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Die auf S. 231 ausgeführte Zerlegung dieser Integrale in Summen von Elementarwirkungen gewinnt hier eine physikalische Bedeutung, denn in allen den Fällen, wo das Stromsystem nicht als Ganzes, sondern in einzelnen Teilen beweglich gemacht ist, handelt es sich um die Bestimmung der Komponenten und Momente, welche jene Teile erfahren, und diese ist nur auf Grund eines Elementargesetzes ausführbar. Eine bekannte experimentelle Anordnung, welche hierher gehört, ist die, daß ein Stück eines linearen Leiterkreises mit einem Ende an einer Axe, um diese drehbar, befestigt ist und mit dem anderen auf einer mit Quecksilber gefüllten Rinne ruht, welche, wie auch die Drehungsaxe, einen Teil des Leiterkreises Σ bildet. Nähert man diesem beweglichen Teil das eine Ende eines langen homogen magnetisierten Stabes, so stellt man Verhältnisse her, die ungefähr den oben vorausgesetzten entsprechen, also eine experimentelle Prüfung der Frage zu gestatten scheinen, ob die Kraft, welche der bewegliche Teil des Leiters erfährt, wirklich in Übereinstimmung mit der Erfahrung aus der letzten Formel dadurch erhalten wird, daß man die Integration rechts statt über das ganze System Σ nur über seinen beweglichen Teil erstreckt.

Indessen komplizieren sich die Verhältnisse in der Praxis dadurch, daß, wie wir später zeigen werden, die in den Formeln (159) enthaltenen magnetischen Kräfte nicht die einzigen sind, welche der bewegliche Teil von Σ erfährt, daß vielmehr auch die festen Teile von Σ Wirkungen ausüben, die sich zu jenen summieren und schwer der Berechnung zu unterwerfen sind. Ferner ist die Beweglichkeit eines beiderseitig in leitender Verbindung mit anderen Körpern gehaltenen Leiterstückes nur eine unvollkommene, und infolge hiervon sind Messungen über die Stärke der erlittenen Wirkung jederzeit ungenau. Immerhin sind Widersprüche zwischen den, wie oben, berechneten und den beobachteten Werten nicht sicher nachgewiesen, es ist also von dieser Seite ein Bedenken gegen die besprochene Zerlegung der Formeln (159) nicht zu erheben. —

Wir kommen der Wirklichkeit näher, wenn wir die Wirkung statt nur von einem Pol von einem endlichen Magneten ausgeübt denken. Die hierzu nötige Erweiterung unserer Formeln gelingt ohne alle Rechnung, indem wir benutzen, daß $-\partial(1/r)/\partial x_1, \dots$ die Komponenten bezeichnen, die von dem Einheitspol an der Stelle

x, y, z auf einen zweiten in dk_1 gedachten ausgeübt werden, und die Formeln (159) über die von allen Teilen des Magneten ausgehenden Wirkungen summieren. Wir erhalten so, falls A, B, C die Komponenten der Feldstärke R des Magneten bezeichnen, für die Gesamtkomponenten Ξ, H, Z, welche das Leitersystem Σ, resp. ein Teil desselben erfährt, die Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l}\Xi = \frac{1}{v}\int (C\mathfrak{v}_1 - B\mathfrak{w}_1)\, dk_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad 159')$$

Hat der Magnet die Gestalt und den Charakter eines Rotationskörpers, und fällt seine Axe mit der Drehungsaxe des beweglich gedachten Leiterstückes zusammen, so wird letzteres bei einer Bewegung seine relative Lage zu dem Magneten nicht ändern, die wirkende Kraft also ihren Wert ungeändert beibehalten. Infolgedessen ist die bei einer vollen Umdrehung seitens der Wechselwirkung geleistete Arbeit auch nicht gleich Null, ebenso die zu einer Umdrehung ohne Beschleunigung nötige äußere Arbeit. Der Vorgang bildet eine Art Umkehrung des auf S. 233 besprochenen, und es wird für ihn ebenso, wie für jenen, weiter unten der Verbleib der anscheinend verlorenen Arbeit nachzuweisen sein. —

Bezieht man die Formeln (159') auf die Volumeneinheit, indem man von der oben besprochenen Zerlegung Gebrauch macht, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l}\Xi' = \frac{1}{v}(C\mathfrak{v}_1 - B\mathfrak{w}_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \qquad 159'')$$

Diese Komponenten haben eine Resultierende K', welche normal steht auf der Ebene durch $\mathfrak{i}_1$ und R und eine Größe besitzt

$$K' = \frac{1}{v} R\,\mathfrak{i}_1 \sin(R, \mathfrak{i}_1). \qquad 159''')$$

Die obige Zerlegung, die sich, wie oben gesagt, durch die Beobachtung bis zu einem gewissen Grade rechtfertigen läßt, kann auf theoretischem Wege in eigentümlicher Weise begründet werden.

In § 21 sind aus dem Ausdruck für die magnetische Energie Ψ eines Systemes allgemeine Formeln für die innerhalb desselben wirkenden magnetischen Kräfte abgeleitet worden, welche die Eigentümlichkeit hatten, auf Druckkräfte oder Spannungen zurückführbar zu sein. Für die Komponenten $A_x, \ldots A_y$ dieser Spannungen in einem nicht magnetisierbaren Medium, z. B. dem leeren Raum, folgt aus den dort erhaltenen Endformeln (135') durch Vertauschung von $\mathfrak{m}$ mit Eins

$$-A_x = \frac{1}{8\pi}(A^2 - B^2 - C^2), \quad -A_y = \frac{1}{4\pi} AB, \quad -A_z = \frac{1}{4\pi} AC$$

u. s. f. Nach dem auf S. 208 Gesagten dürfen wir mit dem früheren Wert der Energie auch diese Ausdrücke für die inneren Spannungen auf das Gebiet der elektromagnetischen Erscheinungen übertragen.

Bilden wir aus ihnen nach (134'') die auf die Volumeneinheit des Systemes wirkenden Komponenten Ξ', H', Z', so erhalten wir leicht

159'''') $$\Xi' = \frac{1}{4\pi}\left[A\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\right]$$

u. s. f. In diesen Formeln ist der Faktor von A gleich Null, wenn, wie wir hier vorausgesetzt haben, wahre Magnetismen nicht vorhanden sind, denn im leeren Raum sind wahre und freie Ladungen identisch; benutzen wir für die Faktoren von C und B die Formeln (149), so erhalten wir

$$\Xi' = \frac{1}{v}(C\mathfrak{v} - B\mathfrak{w})$$

u. s. f. in vollkommener Übereinstimmung mit (159''). Hierdurch wird das aufgestellte Elementargesetz der Wirkung eines magnetischen Systemes auf das Element eines stromführenden Leiters überaus wahrscheinlich gemacht; indessen ist nicht unberücksichtigt zu lassen, daß in dem Fall, daß es sich statt des leeren Raumes um das Innere eines magnetisierbaren Körpers handelt, diese Begründung anscheinend versagt. Wir kommen auf diesen Punkt weiter unten zurück.

§ 26. Wechselwirkung zwischen linearen Stromläufen und endlichen Magneten.

Da die Wirkung eines Stromsystemes auf einen magnetischen Einheitspol, sowie letzterer außerhalb des Stromleiters liegt, ein Potential besitzt, so gilt gleiches auch bezüglich der Wirkung auf einen endlichen Magneten, wenn derselbe in keinem Teil vom Strom durchflossen wird.

Bezeichnen wir das Potential auf den Einheitspol oder die Potentialfunktion des Stromsystemes, wie oben, mit ψ, und verstehen wir unter α, β, γ resp. μ die spezifischen Momente des Magneten, unter λ die lokale magnetische Axe, so folgt für das auf ihn ausgeübte Potential Ψ_{10} nach (109'') die Gleichung

160) $$\Psi_{10} = \int\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dk = \int \mu\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,dk.$$

Dabei bezeichnet — wie auch ferner stets — der Index 1 eine Größe als dem S t r o m s y s t e m, der Index 0 oder fehlender Index eine Größe als dem M a g n e t e n zugehörig.

Führt man die Komponenten A, B, C der magnetischen Feldstärke R des Stromsystemes an der Stelle von dk ein, so kann man (160) auch schreiben

$$\Psi_{10} = -\int(\alpha A + \beta B + \gamma C)\,dk. \tag{160'}$$

Ist der Magnet sehr klein gegen seine Entfernung vom Stromlauf, und bezeichnet M sein Gesamtmoment, Λ die Richtung seiner Axe, so ergiebt der letztere Ausdruck, analog zu (109''''),

$$\Psi_{10} = \mathsf{M}\frac{\partial \psi}{\partial \Lambda}. \tag{160''}$$

In Bezug auf diese Formeln mag im Anschluß an das früher Gesagte nochmals daran erinnert werden, daß, auch wenn die magnetischen und elektrischen Qualitäten der wechselwirkenden Körper sich als von ihrer relativen Lage oder Bewegung abhängig erweisen sollten — wie dies z. B. sicher stattfindet, wenn der Magnet kein permanenter, sondern ein durch den Strom selbst influenzierter ist — doch die Komponenten und Drehungsmomente, welche der Magnet resp. das Stromsystem erfährt, aus diesen Potentialen jederzeit so bestimmt werden, daß man die Änderungen berechnet, welche dieselben bei Parallelverschiebungen nach der Richtung der Komponenten und bei Drehungen um die Richtung der Axen der Momente erleiden, während diese Qualitäten konstant erhalten werden. Wir drücken dies in früherer Weise aus, indem wir die Arbeit $\delta' A_i$ der Wechselwirkung schreiben

$$\delta' A_i = -\delta_{IM}\Psi_{10}. - \tag{160'''}$$

Den praktisch weitaus wichtigsten Fall elektromagnetischer Wechselwirkung bieten die zwischen einem lineären geschlossenen Leiter s_1, etwa der S. 237 besprochenen Art, und einem endlichen Magneten stattfindenden Kräfte. Bildet der lineäre Leiter einen einfachen Ring, so ist in ihm die Stromstärke I_1 überall die gleiche, es gilt für ψ die Formel (157), und das Potential der Wechselwirkung (160) nimmt die Form an

$$\Psi_{10} = \frac{I_1}{v}\int\left(\alpha\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + \gamma\frac{\partial \omega_1}{\partial z}\right)dk, \tag{160''''}$$

in der ω_1 die Öffnung des von dem Volumenelement dk nach dem Stromlauf s_1 konstruierten Kegels bezeichnet.

Während die Berechnung von ω_1 bei geeignet gewählter Form des Leiters verhältnismäßig leicht ist — ein Kreis oder ein System paralleler Kreise, wie dieses angenähert durch eine Rolle gegeben wird, ist theoretisch am bequemsten und praktisch am genauesten

herstellbar —, bietet, wie schon S. 163 gesagt ist, die Ermittelung der Konstitution des Magneten, d. h. der Werte α, β, γ, große Schwierigkeiten.

Eine häufig sich bietende Aufgabe ist die, aus der Größe der von einem linearen Stromlauf auf einen Magneten ausgeübten Wirkung auf die vorhandene Stromstärke zu schließen, dieselbe also mit Hilfe ihrer elektromagnetischen Wirkung zu messen. Zur bequemen Ausführung dieser Beobachtungen sind eigene Apparate konstruiert, bestehend aus einem fest aufgestellten linearen Leiter und einem um eine — meist vertikale — Axe drehbaren Magneten, welche allgemein als Galvanometer bezeichnet werden; die gestellte Aufgabe geht dann auf die Theorie dieser Meßinstrumente hinaus. Zu ihrer Lösung hat man drei verschiedene Wege eingeschlagen, die sich insbesondere durch die Art unterscheiden, wie sie die oben erörterte Schwierigkeit umgehen.

Der erste Weg besteht darin, den Stromlauf so groß und den Magneten so klein und so aufgestellt zu wählen, daß man seine Dimensionen als verschwindend neben der Entfernung vom Stromlauf betrachten kann. Dann gewinnt die spezielle Formel (160″) Anwendbarkeit und lautet in unserem Fall eines linearen Leiters

$$\Psi_{10} = \frac{I_1 \mathsf{M}}{v} \frac{\partial \omega_1}{\partial \Lambda}. \tag{161}$$

Wir wollen uns den Stromlauf nun als eben und vertikal in dem zur XZ-Ebene gewählten magnetischen Meridian aufgestellt denken, den Magneten aber mit einem seiner Punkte, z. B. mit seinem Schwerpunkt in die Ebene des Stromes gebracht und um eine vertikale Axe drehbar befestigt annehmen; seine magnetische Axe Λ liege horizontal und schließe mit dem magnetischen Meridian den Winkel χ ein, die Stromstärke werde in einem solchen Sinne positiv gerechnet, daß die $+Y$-Axe mit der positiven Normale der vom Strom umflossenen Fläche zusammenfällt.

Da ω_1 bei einem Fortschreiten in der Ebene des Stromlaufes sich nicht ändert, so ist

$$\Psi_{10} = \frac{I_1 \mathsf{M}}{v} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \sin \chi, \tag{161′}$$

wobei der Wert von $\partial \omega_1 / \partial y$ im Schwerpunkt des Magneten zu nehmen ist.

Für das Drehungsmoment, welches der Strom ausübt, erhält man hiernach

$$N_I = -\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \chi} = -\frac{I_1 \mathsf{M}}{v} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \cos \chi; \tag{161″}$$

der Erdmagnetismus giebt nach (103″)

$$N_M = -H\mathsf{M}\sin\chi,$$

worin H die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Kraft bezeichnet. Sonach befindet sich die Magnetnadel im Gleichgewicht, wenn die Bedingung

$$\frac{I_1}{v}\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\cos\chi + H\sin\chi = 0$$

erfüllt ist, die M nicht enthält; kennt man H und die Gestalt des lineären Stromes, und somit $\partial\omega_1/\partial y$, so ergiebt sich I_1 durch die Formel

$$I_1 = -\frac{Hv}{\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}}\operatorname{tg}\chi, \tag{162}$$

die im Falle, daß der Stromlauf einen Kreis vom Radius r_1 bildet, und der kleine Magnet in seinem Centrum liegt, die Gestalt annimmt:

$$I_1 = -\frac{Hr_1 v}{2\pi}\operatorname{tg}\chi.$$

Da bei Einführung der elektromagnetischen Stromeinheit $v = 1$ ist, so gestattet diese Formel eine relativ einfache Bestimmung von I_1 in diesen absoluten Einheiten.

Das vorbeschriebene Instrument, welches von W. Weber angegeben ist, führt den Namen der Tangentenbussole, weil die Stromstärke bei demselben durch die Tangente des Ablenkungswinkels gemessen wird. [61])

Die Tangentenbussole ist nach Seite der Theorie, wie der Praxis, von hervorragender Einfachheit, sie hat aber den Übelstand, wie das auch die letzte Formel deutlich zeigt, um so unempfindlicher zu werden, je mehr bei ihrer Konstruktion die Voraussetzungen der obigen Theorie erfüllt sind; denn die verschwindende Kleinheit des Magneten gegenüber der Größe des Stromlaufes wird in praxi stets dazu führen, dem letzteren beträchtliche Dimensionen zu geben, also r_1 groß zu wählen. Mit wachsendem r_1 nimmt aber bei gleichbleibendem I_1 die Ablenkung χ ab, — ganz abgesehen davon, daß, wie später zu zeigen, die Länge des angewandten lineären Leiters außerdem schwächend auf den Strom einwirkt. Größere Empfindlichkeit ist demgemäß das Hauptziel der beiden folgenden Methoden.

Der zweite Weg erstrebt die Vermeidung der oben erörterten theoretischen Schwierigkeit und zugleich die Erreichung einer gesteigerten Genauigkeit dadurch, daß der gegebene lineäre Leiter derartig um den endlich gedachten Magnet geführt wird, daß in

der Ausdehnung des letzteren das magnetische Feld des Stromes als **konstant** betrachtet werden kann. Dies Ziel, dem oben durch Verkleinerung des Magneten nachgestrebt ist, läßt sich bei beliebigen Dimensionen desselben durch gewisse Anordnungen des lineären Stromleiters erreichen, auf die wir in § 27 eingehen werden.

Wählt man die Anordnung des Leiters so, daß die Kraftlinien des elektromagnetischen Feldes normal zu denen des Erdmagnetismus und zur Drehungsaxe, also bei der oben eingeführten Orientierung des Koordinatensystemes parallel der Y-Axe verlaufen, so wird das seitens des Stromes I_1 auf den Magneten ausgeübte Moment

$$N_I = I_1 h_1 \mathsf{M} \cos\chi ,$$

worin h_1 eine theoretisch bestimmbare Konstante, $I_1 h_1$ die Stärke des elektromagnetischen Feldes bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet hier

$$I_1 h_1 \cos\chi - H \sin\chi = 0 ,$$

woraus folgt

162′) $$I_1 = \frac{H}{h_1} \operatorname{tg}\chi ,$$

eine Formel, die, wie (162′), von den Qualitäten des Magneten unabhängig ist und ein nach den erörterten Grundsätzen konstruiertes Instrument als eine **vollkommenere Tangentenbussole** erscheinen läßt.

Der **dritte** Weg, um die Schwierigkeit zu umgehen, welche die Unbekanntschaft mit der Konstitution des Magneten bewirkt, zielt darauf hin, bei allen Beobachtungen Stromlauf und Magnet in derselben relativen Lage zu erhalten. Dies läßt sich z. B. erreichen, indem man den Stromlauf um dieselbe Axe drehbar befestigt, wie den Magneten, und ihn demselben in jede Gleichgewichtslage nachführt.

In der Bedingung für das Gleichgewicht des Magneten unter gleichzeitiger Einwirkung von Strom und Erdmagnetismus

$$\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \chi} + H \mathsf{M} \sin\chi = 0$$

ist dann das erste Glied von χ unabhängig; in Rücksicht auf (160″) können wir dafür setzen $I_1 Q/v$, wo Q eine **Konstante** bezeichnet, deren Wert indessen theoretisch nur bestimmbar ist, wenn die Konstitution des Magneten gegeben ist, und erhalten so

162″) $$I_1 = -\frac{H \mathsf{M} v}{Q} \sin\chi .$$

Beobachtet man unmittelbar hintereinander die zwei verschiedenen, durch dasselbe Leitersystem geführten Strömen entsprechenden

Ruhelagen des Magneten, so kann man H, M, Q als ungeändert ansehen, und es finden sich die Stromstärken den Sinus der Ablenkungswinkel proportional.

Ein nach dem auseinandergesetzten Prinzip konstruiertes Meßinstrument, welches ersichtlich im allgemeinen keine absoluten Messungen, sondern nur Vergleichungen von Stromstärken gestattet, heißt Sinusbussole. Ihm nahe verwandt ist eine Anordnung, bei welcher der Leiter fest steht, und der bewegliche Magnet durch ein meßbares Drehungsmoment in der Position erhalten wird, die er vor Einwirkung des Stromes besaß. —

Die obigen Beispiele behandeln Drehungsmomente, die permanente Magnete von Stromläufen erfahren. Wir fügen hieran ein Problem von prinzipieller Wichtigkeit, welches sich auf die umgekehrte Wirkung bezieht. Der Magnet sei die Erde, der Stromlauf sei eben und um eine vertikale Axe drehbar befestigt.

In diesem Fall, wie in ähnlichen, ist es vorteilhaft, den Stromlauf durch die ihm äquivalente magnetische Doppelfläche zu ersetzen und die Formel (109‴) für das Potential der Wechselwirkung zweier Magnete in Anwendung zu bringen, die wir schreiben

$$\Psi_{10} = -\int (\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1)\, d k_1 ;$$

es bezeichnen hier $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die spezifischen Momente des mit dem Stromlauf (1) äquivalenten Magneten, A_1, B_1, C_1 die von dem Magneten (0) ausgehenden Komponenten an der Stelle von $d k_1$. Auf eine Doppelfläche (1) vom Moment ν_1 der Flächeneinheit angewandt liefert dies allgemein

$$\Psi_{10} = -\int \nu_1 R_1 \cos (n_1, R_1)\, d o_1 ,$$

worin R_1 die resultierende magnetische Kraft und n_1 die positive Normale auf $d o_1$ bezeichnet.

In unserem Falle ist R_1, die erdmagnetische Feldstärke, nach Richtung und Größe auf der ganzen Doppelfläche konstant; da der Stromlauf als eben vorausgesetzt ist, können wir auch die Doppelfläche F_1 als eben, also n_1 von konstanter Richtung wählen. Nach (156″) ist noch $\nu_1 = I_1 / v$, und wir erhalten

$$\Psi_{10} = -\frac{I_1 F_1 H}{v} \cos \chi_1 , \qquad 162''')$$

wobei F_1 die von I_1 umlaufene Fläche, H die Horizontalkomponente von R_1, und χ_1 den Winkel zwischen H und n_1 bezeichnet.

Hieraus folgt für das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf den Stromlauf ausübt, die Formel

$$N_M = -\frac{I_1 F_1 H}{v} \sin \chi_1;$$

sie zeigt, daß der Strom im stabilen Gleichgewicht ist, wenn seine positive Normale nach Norden weist.

Wirkt außer dem erdmagnetischen noch ein mechanisches Drehungsmoment N von bekannter Größe, wie es z. B. durch die Bd. I, S. 112 erwähnte bifilare Aufhängung geliefert wird, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn

162'''') $$N = \frac{I_1 F_1 H}{v} \sin \chi_1$$

ist. Die Beobachtung von χ_1 gestattet also bei bekanntem F_1, N und H gleichfalls I_1 in absolutem Maße zu bestimmen.

Außerdem bietet aber die Kombination der beiden Beobachtungsmethoden, welche zu den Formeln (162) resp. (162') und (162'''') geführt haben, ein Mittel, um gleichzeitig I_1 und H gesondert zu finden.

In der That, passiert derselbe Strom hintereinander die Tangentenbussole und den beweglich aufgehängten Leiter, so giebt die Beobachtung an ersterer den Quotienten I_1/H, die an letzterem das Produkt $I_1 H$, und man kann daher auch die beiden Größen einzeln finden. Hierin liegt ein besonderes Interesse der zuletzt beschriebenen Anordnung. [62]) —

Die vorstehend behandelten Messungsmethoden setzen lineäre Ströme voraus, die eine erhebliche Zeit in konstanter Stärke erhalten werden können; sie versagen, wenn es sich um veränderliche und nur kurze Zeit andauernde handelt. Da solche indessen eine sehr große praktische Bedeutung besitzen, so wollen wir schließlich noch auf eine wichtige Methode eingehen, welche bis zu einem gewissen Grade deren Beobachtung gestattet, vorausgesetzt, daß die Veränderlichkeit keine derartige ist, daß die allgemeinen Formeln aus § 22 und 23 ihre Anwendbarkeit verlieren. Daß letzteres unter gewissen Umständen eintritt, werden wir im nächsten Kapitel zeigen.

Wir setzen einen Magneten voraus, der um eine vertikale Axe drehbar befestigt ist und sich unter der Wirkung des Erdmagnetismus in seiner stabilen Gleichgewichtslage befindet. In seiner Nähe sei ein lineärer Leiter — z. B. eine Drahtrolle — aufgestellt, der nunmehr von der Zeit $t = 0$ an von einem kurzandauernden und variablen Strom durchflossen wird; I_1 bezeichne wieder dessen Stärke und sei jetzt also eine unbekannte Funktion der Zeit, die schon für sehr kleine t wieder verschwindet.

Bezeichnet $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Magneten, χ seinen Ablenkungswinkel aus der Ruhelage, N das ganze auf ihn ausgeübte Drehungsmoment, so ist für ihn die Bewegungsgleichung gültig

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\chi}{dt^2} = N. \tag{163)}$$

Ist $\mathfrak{M}$ beträchtlich und die Dauer t_1 des Stromes sehr kurz, so wird während seines Bestehens der Magnet die Ruhelage nicht merklich verlassen, das Drehungsmoment des Erdmagnetismus wird also während dieser ersten Periode seiner Bewegung vernachlässigt werden können. Demgemäß gilt für $0 < t < t_1$ die Gleichung

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\chi}{dt^2} = -\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \chi}, \tag{163')}$$

wobei Ψ_{10} die frühere Bedeutung hat. Hierin können wir, wie oben, schreiben

$$\frac{\partial \Psi_{10}}{\partial \chi} = \frac{I_1}{v} Q,$$

worin Q eine Funktion der relativen Lage von Magnet und Stromlauf bezeichnet. Da während der ersten Periode der Magnet seine Position nur unmerklich ändert, so dürfen wir während derselben Q als konstant betrachten und erhalten aus Formel (163') durch Integration über die Dauer t_1 und bei Berücksichtigung des Umstandes, daß der Magnet zur Zeit $t = 0$ ruhte,

$$\mathfrak{M}\left(\frac{d\chi}{dt}\right)_{t_1} = -\frac{Q}{v}\int_0^{t_1} I_1\,dt, \tag{163'')}$$

wofür wir kürzer schreiben

$$\mathfrak{M}\chi' = -\frac{J_1 Q}{v}. \tag{163''')}$$

Die Geschwindigkeit des Magneten am Ende der ersten Periode t_1 ist also dem Zeitintegral J_1 der Stromstärke — der sogenannten Integralstromstärke — proportional.

Während der folgenden Zeit — der zweiten Periode des Vorganges — wirkt nach dem Gesagten nur der Erdmagnetismus, gilt also die Gleichung

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\chi}{dt^2} = -H\mathsf{M}\sin\chi, \tag{163'''')}$$

die zusammen mit der Bedingung, daß am Anfang dieser Periode $d\chi/dt = \chi'$ ist, die Bewegung des Magneten vollständig bestimmt.

Durch die Beobachtung dieser ferneren Bewegung, insbesondere durch die Messung der erreichten größten Elongationen, kann man

auf χ' zurückschließen, und dessen Kenntnis vermittelt nach der Formel (163‴) den Wert des Zeitintegrales J_1, falls die Konstanten $\mathfrak{M}$ und Q des Apparates bekannt sind. Bei Benutzung des elektromagnetischen Maßsystemes ist v gleich Eins.

Diese Versuchsanordnung gestattet noch eine andere, sehr wichtige Anwendung: sie erlaubt nämlich, wenn J_1 bekannt ist, aus beobachtetem χ' auf die Größe von v zu schließen, über dessen Bedeutung S. 228 u. f. gesprochen worden ist.

Wird nämlich der variable und kurz andauernde Strom I_1 durch die Entladung eines Konduktors nach der Erde geliefert, und benutzt man die in (155) aufgestellte Beziehung

$$I_1 = \frac{de}{dt},$$

so ist das Zeitintegral

$$J_1 = \int_0^{t_1} I_1\, dt = \int de = E$$

die ganze elektrostatisch gemessene Ladung, welche während $0 < t < t_1$ den linearen Leiter passiert, also eine Größe, die nach dem S. 226 Bemerkten der anfänglichen Ladung des Konduktors gleich ist und nach den im I. Kapitel entwickelten Methoden bestimmt werden kann. Die Formel (163‴) lautet hier also

$$\mathfrak{M}\chi' = -\frac{QE}{v}$$

und gestattet die Bestimmung von v, welches nach (155‴) die Dimension einer Geschwindigkeit hat.

Beobachtungen nach der soeben skizzierten Methode sind von W. Weber und R. Kohlrausch angestellt worden.[63] Sie besitzen eine epochemachende Bedeutung, nicht nur, weil durch sie zum ersten Male eine fundamentale Konstante, welche die quantitative Verbindung zwischen elektrostatischen und elektromagnetischen Erscheinungen herstellt, aufgefunden worden ist, sondern besonders, weil der erhaltene Wert von v, der sehr nahe der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum gleich ist, den Anstoß zu der elektromagnetischen Theorie des Lichtes gegeben hat, auf welche weiter unten eingegangen werden wird.

Spätere Beobachtungen nach anderen Methoden, zu deren Theorien uns hier die Mittel noch fehlen, haben jenen Zahlenwert noch genauer zu bestimmen erlaubt und jene merkwürdige Übereinstimmung bestätigt. —

§ 27. Folgerungen aus der Äquivalenz linearer Stromläufe und magnetischer Doppelflächen. Ausdehnung der Betrachtungen auf flächenhafte und räumliche Ströme.

In § 25 ist nachgewiesen worden, daß für Pole, welche sich in endlicher Entfernung von ihm befinden, ein linearer Strom I_1 äquivalent ist mit einer magnetischen Doppelfläche, deren Randkurve der Stromleiter s_1 bildet, deren Gestaltung aber im übrigen willkürlich ist, ausgenommen, daß sie nicht den Einheitspol enthalten darf, und deren Einheitsmoment ν_1 nach der Richtung der von I_1 positiv umlaufenen Normale gegeben ist durch

$$\nu_1 = \frac{I_1}{v}.$$

Wir wollen von diesem Satz einige Anwendungen machen auf den Fall komplizierterer linearer Stromläufe, und zwar besonders auf solche, die durch Aufwickelung linearer Leiter zu einer sogenannten Rolle entstehen. Eine Rolle wollen wir dabei im allgemeineren Sinne des Wortes als ein beliebiges System von Windungen auffassen, die schraubenartig verlaufen, derart, daß sie für jeden Pol, der sich in einer gegen die Schraubenhöhe großen Entfernung von dem Leiter befindet, durch ein System getrennter und geschlossener paralleler Stromläufe ersetzt werden können.

Bilden diese Stromläufe auf einem beliebig gestalteten Kern nur eine, diesen völlig bedeckende Schicht, verlaufen sie eben und besitzen ihre Ebenen konstante gegenseitige Abstände, so ist das ganze System bezüglich seiner Wirkung auf äußere Pole mit einem homogenen Magneten äquivalent, dessen Begrenzung mit der des Kernes zusammenfällt, dessen Axe in der positiven Normalen der Stromebenen liegt und dessen spezifisches Moment μ_1, wie eine einfache Überlegung zeigt, gegeben ist durch

$$\mu_1 = \nu_1 \zeta_1 = \frac{I_1 \zeta_1}{v}, \qquad 164)$$

worin ζ_1 die Anzahl der Stromebenen auf der Längeneinheit ihrer Normalen bezeichnet.

Hat der Kern die Gestalt eines geraden Cylinders, und liegen die Stromebenen normal zu seiner Axe, die wir zur Z-Axe wählen wollen, so ist hiernach die Rolle in Bezug auf äußere Punkte auch äquivalent mit einer magnetischen Belegung der beiden Grundflächen des Cylinders, von denen die positive die magnetische Flächendichte $I_1 \zeta_1 / v$, die negative diejenige $- I_1 \zeta_1 / v$ besitzt.

Hat der Kern die Gestalt einer Kugel vom Radius r_1, so ist die Rolle in Bezug auf äußere Punkte äquivalent mit einem Doppelpunkte im Kugelcentrum von dem Moment $\mathsf{M}_1 = 4\pi I_1 \zeta_1 r_1^3 / 3v$.

Liegt der Einheitspol im Innern der Rolle, — natürlich in angemessener Entfernung von den Windungen, — so ist das bisherige Verfahren nicht anwendbar, weil jedenfalls eine Doppelfläche durch den Pol gehen könnte. Wir konstruieren daher um den Einheitspol und um eine durch ihn gelegte und der Z-Richtung parallele Axe einen gegen seine Länge unendlich dünnen Kreiscylinder vom Radius a_1 und betrachten denselben als eine zweite Begrenzung des Kernes. Dazu ist erforderlich, daß wir auf ihm im gleichen normalen Abstand ebene Stromläufe anbringen, wie auf der äußeren Oberfläche des Kernes, ihre Stromrichtung aber der äußeren entgegengesetzt wählen. Der so modifizierte Kern kann nun, da der Pol relativ zu ihm im Außenraume liegt, wie früher durch einen homogenen Magneten ersetzt werden.

Indessen ist das soeben eingeführte Stromsystem auf dem Kreiscylinder nicht in dem ursprünglich gegebenen enthalten, und es muß demnach seine Wirkung direkt berechnet und wieder in Abzug gebracht werden, — oder es muß, was dasselbe ist, die Potentialfunktion des gleichsinnig mit der äußeren Begrenzung umflossenen Kreiscylinders derjenigen des Magneten zuaddiert werden.

Wir geben dem Pol die Koordinate z, einem beliebigen Kreisstrom des Cylinders die Koordinate z_1 und erhalten dann unter Anwendung des Resultates (158'') für einen Kreisstrom die Potentialfunktion des ganzen Cylinders

$$\psi_c = \frac{2\pi I_1 \zeta_1}{v} \int \left(1 - \frac{z - z_1}{\sqrt{a_1^2 + (z - z_1)^2}}\right) dz_1,$$

wobei die Integration vom negativen Endquerschnitt $z_1 = c_1$ bis zum positiven $z_1 = c_2$ zu erstrecken ist. Man erhält so

$$\psi_c = \frac{2\pi I_1 \zeta_1}{v} \left((c_2 - c_1) + \sqrt{a_1^2 + (z - c_2)^2} - \sqrt{a_1^2 + (z - c_1)^2}\right),$$

und bei Rücksicht darauf, daß a_1 klein neben $(c_2 - z)$, wie neben $(z - c_1)$ ist, und die Wurzeln positiv genommen werden müssen, bis auf eine irrelevante additive Konstante

164') $$\psi_c = -\frac{4\pi}{v} I_1 \zeta_1 z = -4\pi \mu_1 z;$$

hieraus folgt für die auf den inneren Pol seitens des Stromcylinders ausgeübten Komponenten

$$A_c = 0, \quad B_c = 0, \quad C_c = \frac{4\pi}{v} I_1 \zeta_1 = 4\pi \mu_1. \qquad 164'')$$

Statt der Stromstärke I_1 und der Windungszahl ζ_1 kann man in diesen Resultaten auch die Dichte $\mathfrak{i}_1^0$ der Flächenströmung

$$\mathfrak{i}_1^0 = I_1 \zeta_1,$$

d. h. die durch die Länge Eins parallel der Axe gehende Strommenge einführen.

Nun ist die Potentialfunktion ψ_m des vollen magnetischen Kernes nach Bd. II, S. 170 nur unendlich wenig von der des modifizierten verschieden; ferner geben die Differentialquotienten von ψ_m nach den Koordinaten die Komponenten A_m, B_m, C_m, welche der Pol in dem angenommenen Hohlraum seitens des magnetisch gedachten Kernes erfährt; somit erhalten wir für die effektive Potentialfunktion ψ auf einen inneren Pol

$$\psi = \psi_m + \psi_c = \frac{I_1 \zeta_1}{v} \left(\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \lambda_1} d k_1 - 4\pi z \right), \qquad 164''')$$

für die effektiven Komponenten

$$A = A_m, \quad B = B_m, \quad C = C_m + \frac{4\pi I_1 \zeta_1}{v}. — \qquad 164'''')$$

Hat die Rolle speziell die Form eines geraden Cylinders, dessen Länge groß gegen seinen Querschnitt ist, so wird A_m, B_m, C_m für Punkte in hinlänglichem Abstand von den beiden Endquerschnitten unendlich klein, also

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \frac{4\pi I_1 \zeta_1}{v};$$

die auf den inneren Pol ausgeübte Kraft ist also unter den vorausgesetzten Umständen konstant und nach dem positiven Ende des Cylinders hin gerichtet, gleich als wenn dort, statt einer positiven, eine negative magnetische Ladung läge. Nähern wir uns mehr und mehr dem positiven Endquerschnitt, so wird die Wirkung der nach S. 249 dort befindlichen positiven Ladung immer merklicher, und für dem Ende sehr nahe innere Punkte beträgt ihr Anteil an der Z-Komponente $C_m = -2\pi I_1 \zeta_1 / v$; denn es gilt die Beziehung (141') mit dem speziellen Wert $\mathfrak{m} = 1$, und nach Symmetrie müssen hier die Normalkomponenten C_m zu beiden Seiten des Endquerschnittes einander entgegengesetzt gleich sein. Sonach wird in der Grenzfläche selbst

$$C = \frac{2\pi I_1 \zeta_1}{v},$$

ein Wert, der sich dem im äußeren Raum herrschenden stetig anschließt.

Diese Darlegung stellt eine wesentliche Verschiedenheit zwischen dem Verhalten eines permanenten homogenen Magneten von cylindrischer Form und dem einer Rolle von gleicher Gestalt klar. Zwar auf äußere Punkte wirken beide durchaus gleich, wenn die Beziehung (164) erfüllt ist; die longitudinale Kraftkomponente des Magneten wechselt aber beim Durchgang durch die Endquerschnitte ihr Vorzeichen und nähert sich in der Nähe der Mitte des Cylinders umsomehr dem Wert Null, je länger der Cylinder im Verhältnis zu seinem Querschnitt ist, — während bei der Rolle dieselbe Komponente stetig durch die Endquerschnitte geht und bei sehr großer Länge nach der Mitte zu den konstanten Wert $4\pi I_1 \zeta_1 / v$ erreicht.

Hiermit hängt zusammen, daß beim Durchgang durch die Mantelfläche des Magneten die longitudinale Kraftkomponente stetig ist, während sie beim Durchgang durch die Windungslage der Rolle springt. —

Die vorstehenden Überlegungen gestatten auch die Anwendung auf die Theorie der sogenannten Solenoide, d. h. die von Windungssystemen, welche über einen beliebig, aber stetig gekrümmten fadenförmigen Kern so gewickelt sind, daß die einzelnen, senkrecht zur Fadenaxe stehenden Windungen gegen die Fadenlänge unendlich klein, aber gegen ihre gegenseitigen Abstände selbst wieder unendlich groß sind. Ist der Querschnitt q_1 und die Windungszahl ζ_1 pro Längeneinheit konstant, so kann man jedes Linienelement des Solenoides als eine Rolle der eben betrachteten Art ansehen; hieraus folgt, daß die magnetische Wirkung des Solenoides auf äußere Punkte, die sich in endlicher Entfernung von den beiden Endquerschnitten befinden, dieselbe ist, wie die zweier Pole von der Stärke $\pm I_1 \zeta_1 q_1 / v$ in seinen Endquerschnitten; für innere Punkte tritt hierzu eine parallel der Axe des Solenoides gerichtete Kraft vom Betrage $4\pi I_1 \zeta_1 / v$.

Ist das Solenoid geschlossen, so ist seine Wirkung auf äußere Punkte streng gleich Null; für innere Punkte reduziert sie sich auf eine parallel der positiven Axenrichtung s liegende Kraft R von der Größe $4\pi I_1 \zeta_1 / v$, der also eine Potentialfunktion

$$\psi_i = -\frac{4\pi}{v} I_1 \zeta_1 s_1$$

entspricht, wobei s_1 von einem beliebigen Anfangspunkt aus gerechnet wird. ψ_i ist unendlich vieldeutig. —

Aus den Resultaten von S. 163, resp. der Gleichung (173″) in Bd. I, S. 170, geht hervor, daß eine homogen auf das spezifische Moment μ_1 magnetisierte Kugel auf innere Punkte eine Kraft übt, die der magnetischen Axe Z parallel gerechnet eine Größe

$$C_m = -\frac{4\pi\mu_1}{3}$$

besitzt. Hieraus folgt, daß, falls der von Windungen der oben festgesetzten Art umgebene Kern Kugelgestalt hat, die auf innere Punkte ausgeübte elektromagnetische Wirkung gleichfalls konstant ist und

$$C = +\frac{8\pi I_1 \zeta_1}{3v}$$

ergiebt. Ähnliches gilt, wie beiläufig bemerkt werden möge, wenn der Kern die Gestalt eines Ellipsoides hat, ein Fall, welcher den des unendlich langen Cylinders und den der Kugel als spezielle umfaßt.

Die vorstehenden Resultate geben uns ein praktisch wichtiges Mittel an die Hand, homogene magnetische Felder von erheblicher Größe herzustellen; es genügt dazu, ein Ellipsoid mit ebenen Windungen zu umgeben, — am besten normal zu einer Axe desselben gelegt, — deren Ebenen konstante Abstände voneinander besitzen; führt man durch sie einen elektrischen Strom, so entsteht im Innern des Ellipsoides eine magnetische Kraft, die nach Größe und Richtung konstant ist, so lange man sich den Windungen nicht allzusehr nähert. Felder dieser Art sind auf S. 244 vorausgesetzt und werden zu den dort erörterten Zwecken faktisch benutzt. —

Wir haben der Untersuchung bisher ausschließlich lineäre Ströme unterworfen, wir wollen nunmehr aber auch flächenhafte und räumliche in Betracht ziehen. Auch auf sie ist die im Vorstehenden benutzte Methode anwendbar, da sich jeder räumliche oder flächenhafte stationäre Strom in ein System lineärer auflösen läßt; aber sie ist hier nur dann vorteilhaft, wenn die Gestalten der den einzelnen lineären Strömen zu substituierenden Doppelflächen durch die Umstände des Problemes vorgeschrieben sind.

Ein solcher Fall liegt vor, wenn das System Σ die Gestalt einer sehr dünnen, stetig gekrümmten Platte hat. Wählt man zwei Variable p_1 und p_2 so, daß die Gleichungen $p_1 = \text{Const.}$ und $p_2 = \text{Const.}$ zusammen mit der Gleichung $f = 0$ der Plattenfläche zwei Systeme einander überall orthogonal schneidender Kurven darstellen, und bezeichnet man mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die ihnen parallel genommenen Komponenten der flächenhaften Strömung in der Platte, bezogen

auf die auf der Platte markierte Längeneinheit, so nimmt die Bedingung des stationären Zustandes die Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial s_1} + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial s_2} = 0$$

an, wobei $d s_1$ und $d s_2$ die $d p_1$ und $d p_2$ entsprechenden Linienelemente sind. Setzt man, um ihr zu genügen,

$$\mathfrak{a} = + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial s_2}, \quad \mathfrak{b} = - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial s_1},$$

so heißt nach Bd. I, S. 276, $\mathfrak{S}$ die Strömungsfunktion, und die Formel $\mathfrak{S} =$ Const. giebt mit $f = 0$ zusammen die Strömungslinien an;

$$\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2} = \mathfrak{j} = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial p},$$

worin p die nach größeren Werten $\mathfrak{S}$ gerichtete Normale bezeichnet, bestimmt die flächenhafte Stromdichte $\mathfrak{j}$; dabei ist $\mathfrak{j}$ in der Richtung positiv gerechnet, welche den Bereich größerer $\mathfrak{S}$ positiv umkreist, vorausgesetzt, daß die positive Normale n auf der Fläche mit den Linienelementen $d s_1$ und $d s_2$ zusammen ein direktes Koordinatensystem s_1, s_2, n bildet.

Zwei um $\delta \mathfrak{S}$ verschiedene Werte von $\mathfrak{S}$ geben hiernach die Begrenzung eines Stromfadens, dessen Stromstärke δI den Wert hat

$$\delta I = \delta \mathfrak{S}.$$

Der Stromfaden muß im Endlichen oder Unendlichen geschlossen sein und ist demnach ersetzbar durch eine Doppelfläche mit dem Moment

$$\delta \nu = \frac{\delta \mathfrak{S}}{v},$$

die wir passend so legen, daß sie in denjenigen Teil der Platte fällt, auf welchem $\mathfrak{S}$ einen größeren Wert hat, als in dem betrachteten Stromfaden.

Führen wir diese Operation für alle Stromfäden aus, so erhalten wir an Stelle der stromdurchflossenen Platte eine nicht homogene Doppelfläche vom Moment

165) $$\nu = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_0}{v},$$

worin $\mathfrak{S}_0$ eine Konstante bezeichnet. $\mathfrak{S}_0$ bleibt unbestimmt und ist in der That nach den bekannten Eigenschaften homogener Doppelflächen ohne Einfluß auf die ausgeübte Wirkung, falls die Fläche $f = 0$ geschlossen ist. Ist die Fläche nicht geschlossen, so bestimmt sich $\mathfrak{S}_0$ durch das Verhalten des Randes der Platte,

welcher eine Stromkurve sein muß; fließt in der Randkurve ein linearer Strom von der Stärke $\overline{\mathfrak{J}}$, so muß der Randwert $\overline{\nu}$ lauten

$$\overline{\nu} = \frac{\overline{\mathfrak{J}}}{v}, \tag{165'}$$

er muß also verschwinden, wenn der Randstrom fehlt. Für $\mathfrak{S}_0$ erhält man hieraus die Formel

$$\mathfrak{S}_0 = \overline{\mathfrak{J}} - \overline{\mathfrak{S}},$$

wobei $\overline{\mathfrak{S}}$ den konstanten Randwert von $\mathfrak{S}$ bezeichnet.

Die Potentialfunktion ψ der so gebildeten Doppelfläche lautet, wenn wir wieder für das Stromsystem den Index $_1$ einführen,

$$\psi = \int \nu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d o_1 .$$

ψ springt nach Bd. I, S. 174, beim Durchgang durch die Platte von der negativen zur positiven Seite um $4\pi\nu_1$; seine Differentialquotienten nach der Normale n_1 und nach den Kurven konstanter Werte ν_1 — d. h. die von ihr ausgehenden magnetischen Kraftkomponenten nach jenen Richtungen — bleiben stetig; die Differentialquotienten nach der zu jenen beiden Richtungen normalen n' springen dagegen, da aus

$$\overline{\psi_+} - \overline{\psi_-} = 4\pi\nu_1$$

folgt

$$\overline{\frac{\partial \psi_+}{\partial n'}} - \overline{\frac{\partial \psi_-}{\partial n'}} = 4\pi \frac{\partial \nu_1}{\partial n'} . -$$

Für eine ebene Platte, deren positive Normale mit der $+Z$-Axe zusammenfällt, ist spezieller

$$\psi = \int \nu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} d o_1 ,$$

oder, wenn man die Z-Koordinate des angezogenen Poles einführt,

$$\psi = -\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\nu_1 d o_1}{r} = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}, \tag{165''}$$

wobei $\mathfrak{P}$ eine neue Bezeichnung ist und die Potentialfunktion einer einfachen Flächenbelegung von der Dichte ν_1 bedeutet. Zugleich ergiebt sich hier

$$\overline{\psi_+} = +2\pi\nu_1 , \quad \overline{\psi_-} = -2\pi\nu_1 . \tag{165'''}$$

Außerhalb der Platte sind die Komponenten der magnetischen Kraft gegeben durch

$$166)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = +\dfrac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial z}, \quad B = -\dfrac{\partial \psi}{\partial y} = +\dfrac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y \partial z}, \\ C = -\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = +\dfrac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Auf die Oberfläche angewandt können wir in die ersten beiden dieser Formeln die Werte (165‴) einsetzen und schreiben

$$166')\quad \begin{cases} \overline{A}_+ = -2\pi \overline{\dfrac{\partial r_1}{\partial x}}, \quad \overline{B}_+ = -2\pi \overline{\dfrac{\partial r_1}{\partial y}}, \\ \overline{A}_- = +2\pi \overline{\dfrac{\partial r_1}{\partial x}}, \quad \overline{B}_- = +2\pi \overline{\dfrac{\partial r_1}{\partial y}}, \end{cases}$$

während gilt:

$$\overline{C}_+ = \overline{C}_- = \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial z^2}.$$

In der Platte gehen A, B, C stetig von dem einen dieser Werte zum anderen über, besitzen daselbst aber — da in Wirklichkeit keine magnetische, sondern eine Stromverteilung vorhanden ist — keine Potentialfunktion.

Die obigen Resultate gestatten nun auch die Ableitung der Vektorpotentiale U, V, W, die der betrachteten Platte entsprechen.

Ersetzen wir A, B, C durch die in (149″) gegebenen Ausdrücke

$$A = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad C = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y},$$

so genügt man den Gleichungen (166) durch die Werte

$$166'')\quad U = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}, \quad W = 0,$$

in denen je ein additiver Differentialquotient derselben Funktion nach x, y, resp. z unbestimmt bleibt und bleiben darf, da er auf die Werte von A, B, C nicht influiert.

Von diesen hervorragend einfachen Ausdrücken werden wir weiter unten Gebrauch machen.

Beiläufig sei bemerkt, daß in dem Falle einer ebenen Platte und bei Identifikation von s_1 mit x, von s_2 mit y die oben eingeführten Größen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nicht mit den Strömungskomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ identisch werden, sondern nach ihrer Definition mit $\mathfrak{u}h$, $\mathfrak{v}h$, falls h die Dicke der Platte bezeichnet. Es gilt dann also

$$166''')\quad \mathfrak{u}h = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}h = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}, \quad \mathfrak{w} = 0,$$

und da nach (165) bis (165‴)

$$\overline{\psi}_+ = 2\pi v_1 = \frac{2\pi}{v}(\mathfrak{S}+\mathfrak{S}_0) = -\frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}_+}{\partial z}$$

ist, auch

$$\mathfrak{u}h = \frac{v}{2\pi}\frac{\partial \overline{\psi}_+}{\partial y} = -\frac{v}{2\pi}\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{P}}_+}{\partial y\,\partial z},\quad \mathfrak{v}h = -\frac{v}{2\pi}\frac{\partial \overline{\psi}_+}{\partial x} = +\frac{v}{2\pi}\frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{P}}_+}{\partial x\,\partial z}. \qquad 166'''')$$

Zu einem speziellen magnetischen System, welches in Bezug auf äußere Punkte einem beliebigen räumlichen Stromsystem Σ äquivalent ist, gelangen wir, indem wir an die Formeln (149′) für die Komponenten der magnetischen Wirkung des letzteren anknüpfen. Für die X-Komponente geben dieselben z. B., wenn wir die Werte der Strömungskomponenten aus (149) einsetzen,

$$A = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial z_1} - \frac{\partial C_1}{\partial x_1}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right] dk_1,$$

ein Ausdruck, den wir, wenn er sich auf einen äußeren Punkt bezieht, ohne weiteres durch teilweise Integration umformen können in

$$A = -\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \left[(\overline{A}_1\cos(n,z) - \overline{C}_1\cos(n,x))\,\overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}}\right.$$
$$\left. -(\overline{B}_1\cos(n,x) - \overline{A}_1\cos(n,y))\,\overline{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}}\right] do_1$$
$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_\Sigma \left(A_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + B_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + C_1\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) dk_1.$$

Von diesen beiden Integralen hat das zweite unmittelbar die Form der X-Komponente, welche von einer innerhalb Σ liegenden magnetischen Verteilung ausgeht; die spezifischen Momente derselben lauten

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}A,\quad \beta = \frac{1}{4\pi}B,\quad \gamma = \frac{1}{4\pi}C.$$

Das erste ist dagegen nicht als die Wirkung einer magnetischen Oberflächenbelegung zu deuten, und die Umformung giebt daher eine Lösung der Aufgabe nur dann, wenn das Oberflächenintegral verschwindet, was u. a. dann geschieht, wenn die resultierende magnetische Kraft R normal zu der Oberfläche von Σ steht.

Auf andere, mit räumlichen Stromsystemen äquivalente magnetische Verteilungen gehen wir weiter unten ein. —

Bisher haben wir ausschließlich gegebene wahre, also rein räumliche Stromsysteme betrachtet und die mit ihnen äquivalenten

magnetischen Verteilungen aufgesucht; indessen hat auch das umgekehrte Problem, die mit einem gegebenen Magneten äquivalenten Ströme aufzusuchen, ein großes, sowohl theoretisches, als praktisches Interesse.

Seine Lösung geschieht leicht, wenn wir die in § 22 entwickelten allgemeinen Formeln auf den Fall anwenden, daß ausschließlich scheinbare Ströme vorhanden sind. In diesem Falle ist nämlich mit den wahren Strömungskomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nach (149) überall

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 0;$$

die magnetische Kraft hat also überall eine Potentialfunktion, und muß sich daher auch ganz allgemein auf eine magnetische Verteilung als Ursache zurückführen lassen.

Die Grundformeln des Problems sind dann die Ausdrücke (148) und (148') für die Komponenten der räumlichen und der flächenhaften scheinbaren Strömung, welche lauten [64])

$$167)\quad \mathfrak{u}'' = v\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right),\quad \mathfrak{v}'' = v\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right),\quad \mathfrak{w}'' = v\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right),$$

und

$$167')\quad \begin{cases} \mathfrak{u}^0 = v\left[\bar{\gamma}\cos(n,y) - \bar{\beta}\cos(n,z)\right],\quad \mathfrak{v}^0 = v\left[\bar{\alpha}\cos(n,z) - \bar{\gamma}\cos(n,x)\right], \\ \qquad\qquad \mathfrak{w}^0 = v\left[\bar{\beta}\cos(n,x) - \bar{\alpha}\cos(n,y)\right], \end{cases}$$

sowie die Ausdrücke für die magnetischen Polarisationen, die wir nach (145''') schreiben

$$167'')\qquad \mathfrak{A} = \frac{1}{v}\left[\int\left(\mathfrak{v}_1'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1'' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) d k_1 + \int\left(\mathfrak{v}_1^0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{w}_1^0 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) d o_1\right]$$

u. s. f.

Setzen wir die durch die Formeln (167) und (167') gegebenen Werte in das letzte System ein, so können wir, falls wir den Einheitspol außerhalb des Magneten, etwa in einer homogenen Flüssigkeit von der Permeabilität $\mathfrak{m}$ liegend annehmen, das Raumintegral durch eine teilweise Integration umformen und erhalten dann leicht

$$167''')\qquad \mathfrak{m} A = -\frac{\partial \psi_m}{\partial x},\quad \mathfrak{m} B = -\frac{\partial \psi_m}{\partial y},\quad \mathfrak{m} C = -\frac{\partial \psi_m}{\partial z},$$

worin

$$167'''')\qquad \psi_m = \int\left(\alpha_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \beta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} + \gamma_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) d k_1.$$

Es sind also A, B, C wirklich die von dem Magneten mit den spezifischen Momenten α_1, β_1, γ_1 ausgehenden Kraftkomponenten, und es stellen demgemäß die Gleichungen (167) und (167′) die Komponenten der räumlichen und der flächenhaften Strömungen dar, die mit ihm für äußere Punkte äquivalent sind.

Hiermit ist dann die oben gestellte Aufgabe vollständig gelöst. Ungleich der umgekehrten, früher behandelten, ist sie stets völlig bestimmt; es giebt sonach jederzeit ein, und nur ein Stromsystem, das mit einer gegebenen magnetischen Verteilung äquivalent ist.

Wir wollen als einziges Beispiel für die Anwendung der obigen Gleichungen einen unendlich langen, mit seiner Axe in die Z-Axe fallenden Kreiscylinder betrachten, der cirkular, und zwar speziell so magnetisiert ist, daß das spezifische Moment μ allenthalben nur von $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängt.

Dann ist

$$\alpha = -\frac{\mu y}{a}, \quad \beta = +\frac{\mu x}{a}, \quad \gamma = 0,$$

und man erhält aus (167) und (167′)

$$\mathfrak{u}'' = \mathfrak{v}'' = 0, \quad \mathfrak{w}'' = \frac{v}{a}\left(\mu + a\frac{\partial \mu}{\partial a}\right),$$

$$\mathfrak{u}^o = \mathfrak{v}^o = 0, \quad \mathfrak{w}^o = -v\bar{\mu}.$$

Hieraus folgt die ganze Stromstärke parallel der Cylinderaxe

$$I = \int \mathfrak{w}'' \, dq + \int \mathfrak{w}^o \, ds = 0. —$$

Die Gleichungen (167) und (167′) gestatten, wenn man sie ohne Rücksicht auf ihre Ableitung betrachtet, auch die Anwendung auf die Umkehrung des oben besprochenen Problems, nämlich auf die Bestimmung der magnetischen Verteilung, die in Bezug auf einen äußeren Pol mit einem innerhalb und auf der Oberfläche von Σ verlaufenden Stromsystem äquivalent ist.

Indessen ist dabei zu berücksichtigen, daß jene Formeln den Strömungen gewisse Bedingungen auferlegen, die erfüllt sein müssen, damit die Lösung der Aufgabe überhaupt möglich sei. Man erhält dieselben, indem man aus jenen Gleichungen α, β, γ eliminiert, in der Form

$$\int \mathfrak{u}'' \, dk + \int \mathfrak{u}^o \, do = 0, \quad \int \mathfrak{v}'' \, dk + \int \mathfrak{v}^o \, do = 0.$$

$$\int \mathfrak{w}'' \, dk + \int \mathfrak{w}^o \, do = 0.$$

Will man also speziell nur räumliche Ströme innerhalb Σ zulassen, die dann als wahre gedeutet werden können, so muß

$$\int \mathfrak{u}\, d k = \int \mathfrak{v}\, d k = \int \mathfrak{w}\, d k = 0$$

sein.

Ferner können die obigen Formeln nur dann zum Ziele führen, wenn die Potentialfunktion der gegebenen Strömung im Raume außerhalb Σ einwertig ist, da gleiches von der Potentialfunktion einer innerhalb Σ gelegenen magnetischen Verteilung gilt. Ersteres hat aber mitunter nicht statt, wenn der Raum Σ mehrfach zusammenhängend ist. In diesem Falle muß man dann dem gegebenen System eine Anzahl lineärer Ströme hinzufügen, deren jeder mit einer Doppelfläche äquivalent ist, und sie so wählen, daß ihre Potentialfunktion die Mehrwertigkeit der ursprünglichen kompensiert.

Ist der stromerfüllte Raum Σ ein Rotationskörper um die Z-Axe, und verlaufen die Ströme in Kreisbahnen um dieselbe Axe, so ist

$$\mathfrak{u} = -\frac{\mathrm{i}\, y}{a}, \quad \mathfrak{v} = +\frac{\mathrm{i}\, x}{a}, \quad \mathfrak{w} = 0$$

und i eine Funktion von $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ und z.

Setzt man diese Werte in (167) ein, so erhält man

$$-\frac{\mathrm{i}\, y}{a} = v\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right), \quad +\frac{\mathrm{i}\, x}{a} = v\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right), \quad 0 = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y};$$

dieses System besitzt eine partikuläre Lösung

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = f(z) - \frac{1}{v}\int_0^a \mathrm{i}\, d a,$$

worin $f(z)$ eine willkürliche Funktion von z ist. Zu ihrer Bestimmung sind die Oberflächenbedingungen heranzuziehen, welche bei verschwindenden Flächenströmen sich jetzt auf

$$\bar{\gamma} = 0$$

reduzieren, also auf

$$f(z_o) = \frac{1}{v}\left(\int \mathrm{i}\, d a\right)_o,$$

wenn durch den Index o bezeichnet wird, daß der Wert an der Oberfläche zu nehmen ist.

Ist i konstant, so giebt dies

$$f(z_o) = \frac{1}{v}\,\mathrm{i}\, a_o .$$

Da γ eine einwertige Funktion von z sein muß, so gilt gleiches von f; die Lösung versagt also in allen Fällen, wo die Oberfläche

derartig gestaltet ist, daß einem z_0 mehrere a_0 entsprechen, wie z. B. wenn der Rotationskörper die Gestalt eines Ringes hat. —

Wir haben die bisherigen Untersuchungen über die Vertauschbarkeit von Magneten und Stromsystemen ausschließlich auf Punkte außerhalb des Magneten bezogen. Dies ist in der That der wichtigste Fall und bei permanenten Magneten, in deren Innerem die magnetischen Kräfte nach ihrer Definition keine influenzierende Wirkung äußern, der einzige faktisch in Betracht kommende.

Will man die Überlegungen auf innere Punkte ausdehnen, so ist zunächst zu bemerken, daß, wenn man die Wirksamkeit permanenter Magnete, wie früher, auf das Vorhandensein wahrer Magnetismen zurückführt, diese von der Betrachtung überhaupt auszuschließen sind. Denn die Grundlage der Formeln (167″) bildet, wie aus den Entwickelungen des § 22 erhellt, die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z}=0;$$

sie setzen also voraus, daß in dem Punkte, auf den sie angewandt werden, wahrer Magnetismus nicht liegt. Wir müssen also entweder die Betrachtung auf bloß influenzierte Magnete beschränken, oder wir müssen die Ursache der Wirkung permanenter Magnete auf andere Umstände zurückführen, als bisher; auf letzteres soll am Schluß dieses Paragraphen eingegangen werden.

Nehmen wir aber an, die obige Bedingung sei erfüllt, so kommt für unser Problem weiter in Betracht, daß die Kraftkomponenten A, B, C definiert sind mit Hilfe eines cylindrischen feinen Hohlraumes, dessen Längsrichtung mit der lokalen magnetischen Axe zusammenfällt, und der den Einheitspol umschließt. Die Oberfläche dieses Hohlraumes ist bei der Anwendung der obigen Resultate der Begrenzung des Magneten zuzuzählen und ergiebt sich nach den Formeln (167′) gleichfalls mit Flächenströmen bedeckt, welche die Cylinderaxe umkreisen und die Dichtigkeit $i^o = \nu\mu$ besitzen, falls μ das spezifische Moment an der betrachteten Stelle bedeutet.

Dieses Resultat bedingt eine bemerkenswerte Verschiedenheit zwischen der Lösung des gestellten Problemes für äußere und für innere Punkte. Für alle äußeren Punkte ist der Magnet mit demselben Stromsystem äquivalent, für jeden inneren mit einem anderen.

Man kann diese Differenz aufheben, wenn man die magnetische Kraft innerhalb eines Magneten, die wegen der Unmöglichkeit, in einem solchen zu beobachten, nur eine Rechnungsgröße darstellt, anders wie bisher definiert, nämlich dadurch, daß man den Einheitspol

nicht in einen fadenförmigen Hohlraum einschließt, sondern in einen dosen- oder spaltförmigen, dessen Grundflächen normal zur lokalen magnetischen Axe liegen. Ein solcher Hohlraum trägt dann nach Formel (101‴) auf seiner positiven Grundfläche die äquivalente magnetische Dichte $\sigma_+ = -\mu$, auf der negativen die Dichte $\sigma_- = +\mu$, und die Wirkung dieser Belegungen auf den Pol ist eine parallel λ gerichtete Kraft von der Größe $4\pi\mu$; die Komponenten A, B, Γ, welche der Pol in diesem Hohlraum erfährt, sind also nicht durch die Formeln (121), sondern durch die Beziehungen

$$A = 4\pi\alpha - \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad B = 4\pi\beta - \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \Gamma = 4\pi\gamma - \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

gegeben. Wir bemerken beiläufig, daß bei dieser Definition in der Oberfläche eines Magneten die normalen Kraftkomponenten stetig sind, die tangentialen aber springen.

Wenden wir nunmehr wieder die Formeln (167) und (167′) zur Bestimmung des äquivalenten Stromsystemes an, so ergiebt sich für die Grundflächen des Hohlraumes keine Flächenströmung $\mathfrak{i}^0$; die in der unendlich niedrigen Randfläche auftretenden sind als von höherer Ordnung ohne Wirkung. Bei der neuen Definition der magnetischen Kraft für innere Punkte ist sonach der Magnet in jeder Hinsicht durch dasselbe Stromsystem ersetzbar. Hierauf kann man eine spezielle Theorie der magnetischen Erscheinungen bauen, indem man die Hypothese einführt, daß jene nicht auf einem eigenen Agens beruhen, sondern ausschließlich Wirkungen elektrischer Ströme unter bestimmten eigenartigen Umständen darstellen.[66]) Eine solche Auffassung ist nach dem oben Gefundenen unbedingt zulässig und weder eines Beweises, noch einer Widerlegung mit Hilfe elektromagnetischer Vorgänge fähig, da sie ja nur eine spezielle Interpretation allgemeiner Formeln darstellt.

Man kann sie ohne weiteres auch auf permanente Magnete ausdehnen, da, wie mehrfach betont, über deren Verhalten in Bezug auf innere Punkte nichts bekannt ist, und über dasselbe eine willkürliche Annahme eingeführt werden darf; damit ist dann die Existenz wahrer Magnetismen überhaupt ausgeschlossen.

Die erörterte Auffassung empfiehlt sich dadurch, daß sie mehrere Erscheinungen unter einem Gesichtspunkt zusammenfaßt; indessen leistet sie dies nicht so vollständig, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte, da die durch die Beziehungen (167) und (167′) den Magnetismen substituierten Ströme Eigenschaften zeigen,

die den früher betrachteten wahren Strömen fremd sind. Es kommt hier nicht so sehr ihre zum Teil flächenhafte Natur in Betracht, die allerdings den wahren Strömen stets abgeht, als besonders der Umstand, daß sie ohne Arbeitsaufwand von selbst konstant fortbestehen, während die wahren Ströme dies, wie wir später sehen werden, nicht vermögen. Wir sind daher jedenfalls gezwungen, den oben eingeführten äquivalenten Strömen eine andere Natur beizulegen, wie den wahren.

Im letzten Paragraphen dieses Kapitels werden wir jedoch Mittel gewinnen, die hierin liegende Schwierigkeit zu mindern, indem wir eine Art von Strömen kennen und untersuchen lernen werden, die jene fragliche Eigenschaft mit den äquivalenten Strömen gemeinsam hat.

Schließlich sei bemerkt, daß wir die im vorstehenden gegebene zweite Definition der magnetischen Kraft nur ihres allgemeinen Interesses wegen erwähnt haben, weiterhin aber immer die frühere benutzen werden.

§ 28. Ausdehnung der allgemeinen Theorie auf magnetisierbare Leiter. Ein stromdurchflossener Cylinder; lineäre Leiter. Das allgemeine Elementargesetz der Wirkung auf ein Stromelement.

Wir haben uns bisher fast ausschließlich mit der Wirkung von wahren elektrischen Strömen innerhalb eines nicht magnetisierbaren Systemes beschäftigt, und nur beiläufig den Fall erwähnt, daß ein oder mehrere lineäre Stromläufe sich innerhalb einer homogenen unendlichen magnetischen Flüssigkeit befänden. Indessen sind unsere in § 22 entwickelten Formeln so allgemeine, daß sie auch die Gesetze der magnetischen Kräfte umfassen, die in einem ganz beliebigen System durch eine vorgeschriebene wahre Strömung erregt werden. Nur das Vorhandensein permanenter Magnete, deren Wirkungsweise im II. Kapitel ausführlich erörtert ist, war ausgeschlossen; doch kann man auch diese Beschränkung aufheben, ohne die Formeln zu komplizieren, wenn man nach den Resultaten des vorigen Abschnittes die permanenten Magnete durch die ihnen äquivalenten Stromsysteme ersetzt, was namentlich, wo es sich um ihre Wirkung auf äußere Punkte handelt, keine Schwierigkeiten bietet. —

Die analytische Aufgabe, um die es sich bei dem vorstehend umgrenzten Problem handelt, ist die folgende.

Wir gehen aus von den Formeln (145''') für die magnetischen Polarisationen an einer beliebigen Stelle des körperlichen Systemes,

und schreiben sie, indem wir die Integrale über alle Volumina und alle Zwischengrenzen durch Summen über die einzelnen ersetzen,

$$168)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A} = \frac{1}{v}\sum\Bigg[&\int\left(\mathfrak{v}_h'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_h} - \mathfrak{w}_h'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_h}\right)dk_h \\ &+\int\left(\mathfrak{v}_h^o\frac{\partial\overline{\frac{1}{r}}}{\partial z_h} - \mathfrak{w}_h^o\frac{\partial\overline{\frac{1}{r}}}{\partial y_h}\right)do_h\Bigg], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Weiter denken wir gesetzt nach (146‴)

$$168')\qquad \mathfrak{u}' = \mathfrak{u} + \mathfrak{u}'', \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v} + \mathfrak{v}'', \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{w} + \mathfrak{w}'',$$

worin $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, die wahren Stromkomponenten, vorgeschriebene Funktionen des Ortes darstellen, die aber nur innerhalb des Leitersystemes Σ von Null verschieden sind.

Für $\mathfrak{u}''$, .. und $\mathfrak{u}^o$, .. gelten nach (148) und (148′) die Formeln

$$168'')\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{u}'' &= v\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right), \dots \\ \mathfrak{u}^o &= v\left(\overline{\gamma}\cos(n, y) - \overline{\beta}\cos(n, z)\right), \dots \end{aligned}\right.$$

worin n die innere Normale auf dem betreffenden Oberflächenstück bezeichnet, und $\mathfrak{u}_h^o + \mathfrak{u}_k^o$, .. erst zusammen die ganze in der Zwischengrenze o_{hk} stattfindende Strömung angeben.

Setzt man in den Formeln (168) links nach (123)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{m}_{11}A + \mathfrak{m}_{12}B + \mathfrak{m}_{13}C, \dots$$

und rechts nach Einführung der Werte (168′) und (168″) gemäß (124″)

$$\alpha = \mathfrak{k}_{11}A + \mathfrak{k}_{12}B + \mathfrak{k}_{13}C, \dots$$

wobei die $\mathfrak{m}_{hk}$ und $\mathfrak{k}_{hk}$ in der Regel als von $R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ unabhängig gelten sollen, so enthalten die Formeln rechts und links von Unbekannten nur noch A, B, C: sie sind also die Hauptgleichungen, denen durch eine geeignete Wahl dieser Größen zu genügen ist. Die Nebenbedingungen gehen dahin, daß die Tangentialkomponenten der magnetischen Kraft stetig durch die Zwischengrenzen des körperlichen Systemes gehen, und daß die magnetische Kraft selbst im Unendlichen unendlich klein wird, wie die Wirkung ganz im Endlichen befindlicher wahrer Magnetismen, falls die wahren Ströme ganz im Endlichen liegen.

Beiläufig sei nochmals darauf hingewiesen, daß nach den Formeln (168″) die scheinbaren räumlichen Strömungen außerhalb des

Systemes Σ nur in Teilen entstehen, die entweder inhomogen oder anisotrop sind; denn, da außerhalb Σ die magnetischen Kräfte ein Potential haben, so verschwinden $\mathfrak{u}''$, $\mathfrak{v}''$, $\mathfrak{w}''$ überall, wo sich α, β, γ von A, B, C nur durch denselben konstanten Faktor unterscheiden.

Ferner werde bemerkt, daß innerhalb isotroper, homogener Teile, seien sie nun außerhalb oder innerhalb des Systemes Σ, die Beziehung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0 \qquad 168''')$$

erfüllt ist; denn hier unterscheiden sich α, β, γ nur durch denselben konstanten Faktor von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, und wahre Magnetismen sind nach Annahme nicht vorhanden.

Endlich ergiebt sich, daß, wenn der ganze Raum von einem magnetisch homogenen isotropen Medium erfüllt ist, und in ihm eine vorgeschriebene wahre Strömung stattfindet, die von ihr ausgehende magnetische Kraft von der Magnetisierbarkeit des Mediums unabhängig ist.

In der That sind die freien Strömungen nach (143) unter den angenommenen Umständen auch gegeben durch

$$\mathfrak{u}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{w}' = \mathfrak{m}\,\mathfrak{w},$$

die Polarisationen durch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{m} A, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{m} B, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{m} C;$$

setzt man diese Werte in die Formeln (168) ein, so fällt $\mathfrak{m}$ völlig heraus, und die Ausdrücke für A, B, C werden dieselben, wie im leeren Raum. —

Haben ausschließlich die vom Strom nicht durchflossenen Teile des körperlichen Systemes die Eigenschaft der Magnetisierbarkeit, so reduziert sich das Problem auf das in § 19 behandelte und läßt sich auf dieselben Formeln zurückführen. Denn in diesem Falle haben die von dem wahren Stromsystem ausgehenden magnetischen Kräfte innerhalb aller magnetisierbaren Körper eine Potentialfunktion, die, weil sie von den influenzierten Magnetismen unabhängig ist, genau dieselbe Rolle spielt, wie früher diejenige vorhandener permanenter Magnete.

Da die Magnetisierbarkeit aller anderen Körper neben derjenigen der drei sogenannten stark magnetischen Metalle nahezu verschwindend ist, so kann man, wenn das System Teile aus einer dieser Substanzen enthält, die Magnetisierbarkeit aller anderen vernachlässigen. Demgemäß fällt z. B. die Theorie der praktisch so wichtigen Elektro-

magnete faktisch aus dem Bereich der hier zu behandelnden Aufgaben heraus und ist vollständig mit Hilfe der im II. Kapitel entwickelten Hilfsmittel zu erledigen; wegen der großen Stärke der durch Ströme herstellbaren magnetischen Felder kommen dabei übrigens die S. 168 erörterten Schwierigkeiten in hohem Maße zur Geltung.

Die Erscheinungen, für welche die neuen theoretischen Hilfsmittel notwendig sind, treten hiernach nahe ausschließlich dann ein, wenn ein Körper von Eisen, Nickel oder Kobalt vom Strom durchflossen wird. Wir werden daher die Betrachtung in keiner wesentlichen Hinsicht beschränken, wenn wir sie weiterhin nur auf isotrope Körper richten und die magnetisierenden Kräfte hinreichend schwach voraussetzen, um den einfachen Ansatz (124) zu benutzen. —

Für ein System, welches nur homogene, isotrope Körper enthält, kann man das Problem mit Vorteil direkt auf die Aufsuchung der Potentialfunktion ψ'' der scheinbaren Strömungen, oder, was dasselbe ist, der durch die wahren Ströme influenzierten Magnetismen zuspitzen.

Wegen der Gültigkeit der Beziehung (168‴) ist ψ'' die Potentialfunktion nur einer flächenhaften magnetischen Verteilung, die sich mit der Dichte σ_{hk} in den Zwischengrenzen o_{hk} der einzelnen homogenen Teile des Systemes befindet; es wird also

169) $$\psi'' = \int \frac{\sigma_{hk}\, d\, o_{hk}}{r},$$

worin die Integration über alle Zwischengrenzen erstreckt ist.

Dabei gilt für σ_{hk} die Formel

169′) $$-\sigma_{hk} = \bar{\mu}_h \cos(n_h, \lambda_h) + \bar{\mu}_k \cos(n_k, \lambda_k),$$

in welcher die n die inneren Normalen und die λ die lokalen magnetischen Axen bezeichnen, die magnetischen Momente μ aber durch die Beziehungen (124) für ihre Komponenten definiert sind.

Die in denselben auftretenden magnetischen Kraftkomponenten A, B, C rühren zum Teil von den wahren Strömen her, und diese Beträge A_j, B_j, C_j drücken sich nach (149″) durch die Vektorpotentiale U, V, W aus, wie folgt

169″) $$A_j = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad B_j = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad C_j = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y};$$

die anderen Teile folgen aus der Potentialfunktion ψ'' der influenzierten Magnetismen. Sonach nimmt das System (124) hier die spezielle Gestalt an

169‴) $$\alpha = \mathfrak{k}\left(A_j - \frac{\partial \psi''}{\partial x}\right), \quad \beta = \mathfrak{k}\left(B_j - \frac{\partial \psi''}{\partial y}\right), \quad \gamma = \mathfrak{k}\left(C_j - \frac{\partial \psi''}{\partial z}\right).$$

Setzt man in (169) den Wert (169′) von σ_{hk} und in das Resultat die Werte der nach (169‴) bestimmten Momente μ, so ergiebt dies

$$\psi'' = -\int (\mathfrak{k}_h \overline{N}_h + \mathfrak{k}_k \overline{N}_k) \frac{d\,o_{hk}}{r}, \tag{170}$$

worin die N die Komponenten der gesamten magnetischen Kraft nach den betreffenden inneren Normalen bezeichnen.

Berücksichtigt man die erste Formel (121″), nach welcher in der Grenze o_{hk} bei verschwindender wahrer Ladung

$$\mathfrak{m}_h \overline{N}_h + \mathfrak{m}_k \overline{N}_k = 0$$

ist, während nach (118′) gilt

$$\mathfrak{k}_h = \frac{\mathfrak{m}_h - 1}{4\pi},$$

so kann man aus (170) eines der beiden N eliminieren. Es wird nämlich

$$\mathfrak{k}_h \overline{N}_h + \mathfrak{k}_k \overline{N}_k = \frac{\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_k}{4\pi\,\mathfrak{m}_k} \overline{N}_h = \frac{\mathfrak{m}_k - \mathfrak{m}_h}{4\pi\,\mathfrak{m}_h} \overline{N}_k,$$

und hiernach auch

$$\psi'' = -\int \frac{\mathfrak{m}_h - \mathfrak{m}_k}{4\pi\,\mathfrak{m}_k} \overline{N}_h \frac{d\,o_{hk}}{r}. \tag{170′}$$

Sind nur zwei Räume (h) und (k) vorhanden, und enthält der Raum (k) die wahre Strömung, was wir andeuten, indem wir die Indices k und h mit i und a vertauschen, so hat in dem Raum (a) auch die Wirkung des wahren Stromes eine Potentialfunktion ψ; es ist also dort

$$(A_j)_a = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_a, \quad (B_j)_a = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_a, \quad (C_j)_a = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_a,$$

und daher, wenn wieder die effektive Potentialfunktion oder die Potentialfunktion der freien Ströme

$$\psi + \psi'' = \psi'$$

eingeführt wird,

$$\psi'' = +\frac{\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i}{4\pi\,\mathfrak{m}_i} \int \left(\frac{\overline{\partial \psi'}}{\partial n}\right)_a \frac{d\,o}{r}. \tag{170″}$$

Beiläufig mag hierzu bemerkt werden, daß in allen Fällen, wo das Integral

$$\int \left(\frac{\overline{\partial \psi}}{\partial n}\right)_a \frac{d\,o}{r},$$

das nur die Potentialfunktion ψ der wahren Strömung enthält, verschwindet, der Bedingung (170″) durch die Annahme

$$\psi'' = 0$$

genügt werden kann. Dies findet unter anderem dann statt, wenn in jedem Flächenelement do der Zwischengrenze $\partial\psi/\partial n$ für sich verschwindet, d. h. wenn die Potentialflächen $\psi =$ Const. die Zwischengrenze überall normal schneiden. —

Als spezielles Beispiel für die allgemeine Aufgabe betrachten wir einen unendlich langen Cylinder von beliebigem Querschnitt, der von einer Strömung von der konstanten Dichte i parallel seiner Axe durchflossen wird und sich in einer nach außen unbegrenzten homogenen magnetisierbaren Flüssigkeit befindet. Der Strom muß im Unendlichen auf irgend eine Weise geschlossen sein, z. B. durch einen den oben genannten Vollcylinder umschließenden Hohlcylinder; aber nach den auf S. 236 erhaltenen Resultaten giebt der dort liegende Teil der Schließung keinen Anteil zu dem Werte, den N in dem Integral (170′) im Endlichen besitzt, und letzterer muß demgemäß auch längs der Axe des Cylinders konstant sein.

Hieraus folgt, daß, wie Bd. I, S. 195 gezeigt, in unserem Falle die NEWTON'sche Potentialfunktion (170) resp. (170″) durch eine Integration über die Länge des Cylinders in die logarithmische übergeführt werden kann, und man erhält

$$170''')\quad \psi'' = C' + \int (\mathfrak{k}_i \overline{N}_i + \mathfrak{k}_a \overline{N}_a)\, l(\overline{a^2})\, dp = C' - \frac{\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i}{4\pi\,\mathfrak{m}_i}\int \left(\frac{\overline{\partial\psi'}}{\partial n}\right)_a l(\overline{a^2})\, dp,$$

worin dp das an der Stelle x_1, y_1, z_1 befindliche Element der Peripherie p des Cylinders bezeichnet, $a^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ ist, und C' eine Konstante bedeutet.

Zugleich ergiebt sich auch

$$170'''')\qquad U = 0,\ V = 0,\ W = \frac{1}{v}\int \frac{\mathfrak{i}_1\, dk_1}{r} = C'' - \frac{1}{v}\int \mathfrak{i}_1\, l(a^2)\, dq_1,$$

worin C'' eine andere Konstante bezeichnet.

Ist der Querschnitt des Cylinders ein Kreis vom Radius a_1, und denken wir den Strom durch einen koncentrischen Hohlcylinder von dem sehr großen Radius a_2 geschlossen, dann erhält man, wenn die Stromstärke $\pi a_1^2\, \mathfrak{i} = I$ gesetzt wird, unter Benutzung der Resultate aus Bd. I, S. 197,

$$171)\qquad \begin{cases} W_i = \dfrac{\pi\,\mathfrak{i}}{v}(a_1^2 - a^2) - \dfrac{I}{v}\, l\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^2, \\[2ex] W_a = -\dfrac{\pi\,\mathfrak{i}}{v}\, a_1^2\, l\left(\dfrac{a}{a_2}\right)^2 = -\dfrac{I}{v}\, l\left(\dfrac{a}{a_2}\right)^2. \end{cases}$$

Der letzte Wert von W_a gilt übrigens auch, wenn i in beliebiger Weise von a abhängig ist.

Hierbei ist unter a die Entfernung von der Axe des Cylinders verstanden. Weiter ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} (A_j)_i &= -\frac{2\pi \mathrm{i}\, y}{v}, \quad (B_j)_i = +\frac{2\pi \mathrm{i}\, x}{v}, \quad (C_j)_i = 0, \\ \text{also}\quad (R_j)_i &= \frac{2\pi \mathrm{i}\, a}{v}; \\ (A_j)_a &= -\frac{2\pi \mathrm{i}\, y a_1^2}{v a^2}, \quad (B_j)_a = +\frac{2\pi \mathrm{i}\, x a_1^2}{v a^2}, \quad (C_j)_a = 0, \\ \text{also}\quad (R_j)_a &= \frac{2\pi \mathrm{i}\, a_1^2}{v a} = \frac{2 I}{v a}, \end{aligned}\right\} \qquad 171')$$

und hieraus folgt, daß die vom Strom herrührende magnetische Kraft keinen Anteil zu den Komponenten N_a und N_i in (171) giebt, also ψ'' gleich Null gesetzt werden kann.

Wir erhalten somit im Innern des Cylinders

$$\alpha_i = -\frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_i\, y}{v}, \quad \beta_i = +\frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_i\, x}{v}, \quad \gamma_i = 0,$$

also

$$\mu_i = \frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_i\, a}{v};$$

im Außenraum

$$\left.\begin{aligned} \alpha_a &= -\frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_a\, a_1^2\, y}{v a^2}, \quad \beta_a = +\frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_a\, a_1^2\, x}{v a^2}, \quad \gamma_a = 0, \\ \text{also}\quad \mu_a &= \frac{2\pi \mathrm{i}\, \mathfrak{k}_a\, a_1^2}{v a}. \end{aligned}\right\} \qquad 171'')$$

Für die äquivalenten Stromdichten erhält man aus (167) und (167'), indem man i', i'', i^0, wie i, auf die Z-Richtung bezieht,

$$\mathfrak{u}_i'' = \mathfrak{v}_i'' = 0, \quad \mathfrak{w}_i'' = \mathrm{i}'' = 4\pi \mathfrak{k}_i\, \mathrm{i} = (\mathfrak{m}_i - 1)\, \mathrm{i},$$

$$\mathfrak{u}_a'' = \mathfrak{v}_a'' = \mathfrak{w}_a'' = 0,$$

$$\mathfrak{u}^0 = \mathfrak{v}^0 = 0, \quad \mathfrak{w}^0 = \mathrm{i}_1^0 = 2\pi \mathrm{i}\, a_1 (\mathfrak{k}_a - \mathfrak{k}_i) = \tfrac{1}{2} \mathrm{i}\, a_1 (\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i).$$

Hieraus folgt für die freie Strömung eine räumliche Dichte

$$\mathrm{i}' = \mathrm{i}\, \mathfrak{m}_i; \qquad 172)$$

während für die Dichte der Oberflächenströmung gültig bleibt

$$\mathrm{i}_1^0 = \tfrac{1}{2} \mathrm{i}\, a_1 (\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i) = \frac{I}{2\pi a_1} (\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i). \qquad 172')$$

Auch an dem Hohlcylinder vom Radius a_2 entsteht eine scheinbare Flächenströmung; dieselbe besitzt, wenn der Hohlcylinder unmagnetisierbar ist, die auf die Z-Richtung bezogene Dichte

$$\mathrm{i}_2^0 = -\frac{\mathrm{i}\, a_1^2}{2\, a_2} (\mathfrak{m}_a - 1) = -\frac{I}{2\pi a_2} (\mathfrak{m}_a - 1); \qquad 172'')$$

sie ist also verschwindend, während die ganze oberflächliche Stromstärke endlich ist.

Die ganze freie Stromstärke, die in und auf dem Vollcylinder verläuft, ist also gleich $I\mathfrak{m}_a$, die in und auf dem Hohlcylinder in entgegengesetzter Richtung verlaufende ist ebenfalls gleich $I\mathfrak{m}_a$; die magnetische Konstante $\mathfrak{m}_i$ kommt in diesen Werten nicht vor.

Das Vektorpotential $\mathfrak{W}$ der freien Strömung ist durch die Formeln gegeben

$$172''') \quad \begin{cases} \mathfrak{W}_i = \frac{\pi \mathfrak{i} \mathfrak{m}_i}{v}(a_1^2 - a^2) - \frac{I}{v}\mathfrak{m}_a l\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2, \\ \mathfrak{W}_a = -\frac{I}{v}\mathfrak{m}_a l\left(\frac{a}{a_2}\right)^2. \end{cases}$$

Auch diese letztere Formel gilt noch, wenn $\mathfrak{i}$ eine beliebige Funktion von a ist.

Die Polarisationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgen hieraus gemäß (142) zu

$$172'''') \quad \begin{cases} \mathfrak{A}_i = -\frac{2\pi}{v}\mathfrak{i}\mathfrak{m}_i y, \ \mathfrak{B}_i = +\frac{2\pi}{v}\mathfrak{i}\mathfrak{m}_i x, \ \mathfrak{C}_i = 0, \\ \mathfrak{A}_a = -\frac{2I\mathfrak{m}_a y}{v a^2}, \ \mathfrak{B}_a = +\frac{2I\mathfrak{m}_a x}{v a^2}, \ \mathfrak{C}_a = 0; \end{cases}$$

wie notwendig, unterscheiden sich die ersteren nur durch den Faktor $\mathfrak{m}_i$, die letzteren durch $\mathfrak{m}_a$ von den Ausdrücken für A, B, C in (171'). —

Aus der Formel (170'') wollen wir nunmehr noch einen allgemeinen Satz von großer Wichtigkeit ableiten.

Da die Potentialfunktion ψ' der magnetischen Kraft im äußeren Raum die Gleichung $\triangle\, \psi' = 0$ erfüllt, so gilt hier, wo sie von z unabhängig ist, auch

$$\triangle_{xy}\, \psi'_a = 0;$$

daraus folgt, daß es eine Funktion χ giebt, für welche im äußeren Raum

$$\frac{\partial \psi'_a}{\partial x} = \frac{\partial \chi_a}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi'_a}{\partial y} = -\frac{\partial \chi_a}{\partial x},$$

und somit auch

$$\frac{\partial \psi'_a}{\partial n_a} = \frac{\partial \chi_a}{\partial p}$$

ist, wobei dp das Element der die Z-Axe positiv umkreisenden Randkurve p des Cylinderquerschnittes bezeichnet.

Die Formel (170'') reduziert sich hiernach auf

$$\psi'' = C' - \frac{\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i}{4\pi\mathfrak{m}_i}\int \overline{\frac{\partial \chi_a}{\partial p}}\, l(\overline{a^2})\, dp.$$

Wir wollen sie auf Punkte anwenden, deren Entfernungen a groß sind gegen die Querdimensionen des Cylinders. Für solche Punkte ist a bei der Integration über p als konstant zu betrachten, und daher reduziert sich die obige Formel auf

$$\psi'' = C';$$

der influenzierte Magnetismus übt also unter den vorausgesetzten Umständen überhaupt keine Wirkung.

Dasselbe Resultat läßt sich nun unter einer gewissen Voraussetzung auch bei einem beliebig, aber stetig gekrümmten lineären Leiter von stetig veränderlicher Dicke für Punkte in endlicher Entfernung nachweisen. Bezeichnet man das Element der Axenkurve des Leiters wieder mit ds, das Element seiner Querschnittskurve mit dp, so kann man die Formel (170) resp. (170‴) zunächst stets schreiben

$$\psi'' = -\iint (\mathfrak{k}_i \overline{N}_i + \mathfrak{k}_a \overline{N}_a) \frac{ds\,dp}{\bar{r}} = \frac{\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i}{4\pi\mathfrak{m}_i} \iint \left(\overline{\frac{\partial \psi'}{\partial n}}\right)_a \frac{ds\,dp}{\bar{r}};$$

hierin läßt sich das Längselement ds des Leiters ebenso behandeln, wie der Cylinder in der vorigen Entwickelung, falls ihm keine anderen Elemente, als solche, die unendlich wenig verschiedenes s besitzen, unendlich nahe liegen; denn nach der Eigenschaft von Kurvenpotentialen ist dann der Anteil, den das betrachtete Längselement ds zu den N resp. zu ψ' liefert, unendlich groß gegen die Anteile der übrigen Elemente. Infolge hiervon läßt sich wieder $(\partial \psi' / \partial n)_a$ auf die Gestalt des Differentialquotienten einer einwertigen Funktion χ nach p bringen; es läßt sich ferner für Punkte in endlicher Entfernung von dem betrachteten Linienelement die Größe r bei der Integration nach p als konstant ansehen, und es verschwindet infolge hiervon der Anteil jedes Längenelementes ds an der Potentialfunktion ψ'' für sich.

Hieraus folgt das schon S. 225 benutzte Resultat, daß unter der gemachten Voraussetzung ein lineärer Stromleiter in einer unendlichen homogenen Flüssigkeit ein magnetisches Feld herstellt, dessen Natur von der Magnetisierbarkeit des Stromleiters, wie der Flüssigkeit unabhängig ist.

Dieser Satz gestattet sofort eine weitere Folgerung.

Die Potentialfunktion einer homogenen Doppelfläche von dem Momente ν_1 innerhalb einer Flüssigkeit von der Permeabilität $\mathfrak{m}$ hat den Wert

$$\psi = \frac{\nu_1}{\mathfrak{m}} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} do_1,$$

diejenige des wahren linearen Stromes von der Stärke I_1, der in der Randkurve fließt, ist dagegen unter den gleichen Verhältnissen

$$\psi = \frac{I_1}{v}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1} d o_1 .$$

Die Doppelfläche ist also innerhalb derselben Flüssigkeit dem Stromlauf äquivalent, wenn

173) $$\frac{\nu_1}{\mathfrak{m}} = \frac{I_1}{v}$$

ist; das Moment der demselben wahren Strom äquivalenten Doppelfläche ist also der Permeabilität der umgebenden Flüssigkeit proportional. Dieses Resultat giebt eine Erweiterung der oben soviel benutzten Beziehung (156″).

Der oben ausdrücklich ausgeschlossene Fall, daß Elemente eines linearen Leiters, die endlich verschiedenen s entsprechen, einander unendlich nahe liegen, bedarf in den einzelnen Problemen immer einer speziellen Untersuchung. Für die Theorie der Drahtrollen ist zu berücksichtigen, daß zwei endliche parallele Drahtstücke, deren Entfernung d von der Größenordnung ihrer Dicken ist, sich gegenseitig auf spezifische Momente von der Ordnung $1/d$ transversal magnetisieren, aber wegen des mit d^2 proportionalen Querschnittes pro Längeneinheit doch nur ein Gesamtmoment von der Ordnung d erhalten; ähnliche Momente ergiebt auch die Wirkung auf eine etwa umgebende magnetische Flüssigkeit. Im Innern der Windungssysteme einer Rolle neutralisieren sich außerdem noch die Wirkungen der benachbarten Windungen gegenseitig zum größten Teil, und es scheint, als ob die obigen Resultate auch für Rollen anwendbar blieben, solange es sich um Punkte handelt, deren Entfernungen von den Windungen unendlich groß sind gegen deren Dicke und gegenseitigen Abstand. —

Abschließend sei späterer Anwendungen wegen noch der einfache Fall eines geschlossenen Solenoides behandelt, das über einen magnetisierbaren isotropen Kern, z. B. über einen Draht aus weichem Eisen, gewunden ist. Hier liegen die Verhältnisse so einfach, daß es der Anwendung der allgemeinen Formeln gar nicht bedarf.

Auf das Innere des Kernes wirkt nach S. 252 eine konstante Kraft parallel der Solenoidaxe und von dem Betrage $4\pi I_1 \zeta_1/v$, worin I_1 die Stromstärke im Solenoid und ζ_1 die Anzahl der auf der Längeneinheit liegenden Windungen bezeichnet. Der Kern wird sonach homogen longitudinal magnetisiert, und diese Erregung giebt

weder auf innere noch auf äußere Pole eine Wirkung; ψ'' ist daher gleich Null, und es gilt nach (170''')

$$\alpha_i = \mathfrak{k}_i A, \quad \beta_i = \mathfrak{k}_i B, \quad \gamma_i = \mathfrak{k}_i C,$$

und

$$\mu_i = \mathfrak{k}_i R = \frac{4\pi\mathfrak{k}_i}{v} I_1 \zeta_1 .$$

Im äußeren Raum entsteht keine Magnetisierung.

Benutzt man die Formeln (167) und (167') für die mit einer Magnetisierung äquivalenten Ströme und nimmt an, daß überall der Krümmungsradius der Axe des Solenoides groß ist gegen seinen Querschnitt, so erkennt man, daß räumliche Ströme im Kerne nicht fließen, hingegen eine oberflächliche Strömung normal zur Axe von der Dichte

$$\mathfrak{i}^0 = 4\pi\mathfrak{k}_i I_1 \zeta_1 = (\mathfrak{m}_i - 1) I_1 \zeta_1 .$$

Da nun der wahre Solenoidstrom mit einem gleichgerichteten Oberflächenstrom von der Dichte $\mathfrak{i}_1^0 = I_1 \zeta_1$ äquivalent ist, so erkennt man, daß die freie Strömung die flächenhafte Dichte $\mathfrak{m}_i \mathfrak{i}_1^0$ besitzt oder, anders ausgedrückt, in den Solenoidwindungen mit der Stärke $I_1 \mathfrak{m}_i$ verläuft.

Diese Betrachtung gilt nach S. 252 angenähert auch dann, wenn das Solenoid nicht geschlossen, aber sehr lang gegen seine Dicke ist. Es folgt daraus, daß, während ein Solenoid ohne magnetisierbaren Kern auf äußere Punkte in hinreichender Entfernung wirkt, wie zwei magnetische Pole von der Stärke $\pm I_1 \zeta_1 q_1 / v$ in seinen Enden, eines mit magnetisierbarem Kern die Polstärke $\pm I_1 \zeta_1 q_1 \mathfrak{m}_i / v$ besitzt. —

Wir haben auf S. 240 aus den allgemeinen Formeln für die magnetischen Druckkräfte das Elementargesetz der magnetischen Kraft abgeleitet, die ein Volumenelement eines nicht magnetisierbaren Körpers im magnetischen Feld erleidet, wenn in ihm ein elektrischer Strom fließt, und haben dasselbe im Einklang mit dem Gesetz von Biot und Savart gefunden. Wir wollen jetzt die Erweiterung untersuchen, welche dieses Gesetz in einem magnetisierbaren System verlangt.

Aus den allgemeinen Werten der Maxwell'schen Spannungen $A'_x, \ldots A'_y$, die in (134''') angegeben sind, erhält man gemäß der Formel (134') leicht für die X-Komponente der auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Kraft den Ausdruck

$$\Xi' = \tfrac{1}{2}\left\{A\varrho + \mathfrak{A}\varrho' + \frac{1}{v}(C\mathfrak{v}' - B\mathfrak{w}') + \frac{1}{v}(\mathfrak{C}\mathfrak{v} - \mathfrak{B}\mathfrak{w})\right\}; \qquad 173')$$

hierin bezeichnen ϱ und ϱ' die wahre und die freie magnetische Raumdichte, $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \mathfrak{w}'$ die wahren und freien elektrischen Stromdichten. Die rechte Seite hat eine gewisse formale Ähn-

lichkeit mit den Elementarformeln (29''') und (116'''') für das Gesetz der elektrostatischen und der magnetischen Wechselwirkung, insofern das erste und zweite Glied einerseits, das dritte und vierte Glied andererseits in ähnlichen Beziehungen stehen, wie die beiden Glieder jener Formeln.

Schließt man, wie in diesem Teil zumeist, das Vorhandensein wahrer Magnetismen aus, so verschwindet wegen des Faktors ϱ das erste Glied in allen Medien, das zweite hingegen nur in homogenen isotropen. Im allgemeinen hat ϱ' wegen des verschwindenden ϱ den Wert

$$\varrho' = \varrho'' = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right),$$

worin α, β, γ die influenzierten magnetischen Momente bezeichnen.

Benutzt man dies und setzt noch für die freien Strömungskomponenten ihre Werte aus (143), für die Polarisationen ihre Werte aus (123), so erhält man

$$173'')\quad \begin{cases} \Xi' = \frac{1}{v}(C\mathfrak{v} - B\mathfrak{w}) - \frac{1}{2}(A + 4\pi\alpha)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) \\ \quad + \frac{2\pi}{v}(\gamma\mathfrak{v} - \beta\mathfrak{w}) + \frac{1}{2}\left(C\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) - B\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\right); \end{cases}$$

das erste Glied des Ausdrucks rechts ist mit der rechten Seite von (159'') und daher mit dem durch das Biot-Savart'sche Gesetz gelieferten Wert identisch, das zweite giebt also die Ergänzung an, welche die Magnetisierbarkeit des Mediums verursacht.

Für homogene isotrope Körper ist viel einfacher, da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ sich von A, B, C und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nur durch den Faktor $\mathfrak{m}$ unterscheiden, und ϱ' mit ϱ verschwindet,

$$173''')\qquad \Xi' = \frac{\mathfrak{m}}{v}(C\mathfrak{v} - B\mathfrak{w}).$$

Nun sind aber $\mathfrak{m}A$, $\mathfrak{m}B$, $\mathfrak{m}C$ die Komponenten, welche dieselbe magnetische Verteilung im leeren Raum ausüben würde, und somit steht die letzte Formel in vollkommener Übereinstimmung mit dem Resultat von S. 265.

Für die allgemeine Gleichung (173'), welche die Anwesenheit inhomogener und krystallinischer Medien zuläßt, dürfte eine solche Vergleichung größere Schwierigkeiten bieten, schon deshalb, weil es hier nicht angängig ist, die Kräfte, welche der Strom erfährt, nach dem Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion aus denjenigen abzuleiten, die nach (143'') der Einheitspol erleidet. Denn durch

den wahren Strom entstehen in den inhomogenen und krystallinischen Teilen des Systemes scheinbare Ströme, die ihrerseits ebenfalls auf den Pol wirken, und es ist nicht ohne weiteres klar, ob und wie man deren Wirkung aussondern kann.

§ 29. Die Grundformeln der Elektrodynamik. Die magnetische Energie eines aus Magneten und Strömen bestehenden Systemes.

Die im vorstehenden erörterte Äquivalenz zwischen Stromläufen und Magneten bezieht sich ausschließlich auf die auf Magnete ausgeübten Kräfte. Sind also zwei Magnete (1) und (2) gegeben, so kann man bezüglich seiner Wirkung auf (2) den Magneten (1), bezüglich seiner Wirkung auf (1) den Magneten (2) durch ein Stromsystem der oben bestimmten Art ersetzen; es ist aber damit noch nicht ausgesprochen, daß bei gleichzeitiger Vertauschung von (1) und von (2) mit den äquivalenten Stromsystemen zwischen ihnen überhaupt eine Wechselwirkung stattfindet, und daß dieselbe der zwischen den beiden Magneten bestehenden gleich ist.

Zwischen zwei Stromläufen wirkende Kräfte, welche man als elektrodynamische bezeichnet, sind nun allerdings bald nach der Auffindung der elektromagnetischen Wirkungen von Ampère entdeckt worden, und damit war die oben angedeutete erweiterte Gültigkeit der Äquivalenz zwischen Magneten und Strömen überaus wahrscheinlich geworden; den experimentellen Nachweis derselben hat F. Neumann dadurch erbracht, daß er die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen zwei Stromläufen maß und mit der aus dem Äquivalenzprinzip berechneten verglich.[66]) Durch diese Untersuchung ist der Zusammenhang zwischen den elektromagnetischen und den elektrodynamischen Wirkungen eines Stromes sicher begründet.

Wir wollen ihn nun auch analytisch ausdrücken und erreichen dies, indem wir das Potential Ψ_{12} der Wechselwirkung zwischen zwei linearen Stromkreisen (1) und (2) dem der beiden äquivalenten magnetischen Doppelflächen gleich setzen.

Nach (117) gilt, wenn wir die Doppelflächen von den Momenten ν_1 und ν_2 innerhalb einer unendlichen magnetischen Flüssigkeit von der Permeabilität m befindlich denken, für deren Potential

$$\Psi_{12} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\mathfrak{m}} \iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1 \partial n_2} d o_1 \, d o_2 ; \tag{174}$$

hierin ist sowohl ν_1 als ν_2 gemäß der Fundamentalbeziehung (173) durch die äquivalenten Stromstärken zu ersetzen, und es sind zu-

gleich, um nur auf die Stromläufe Bezügliches in der Formel zu belassen, die Integrationen über die Doppelflächen o_1 und o_2 in solche über ihre Randkurven s_1 und s_2 zu verwandeln. Diese Umformung ist Bd. I, S. 179, ausgeführt und ergiebt in unserem Falle

174') $$\Psi_{12} = -\frac{I_1 I_2 \mathfrak{m}}{v^2} \int\int \frac{\cos(s_1, s_2)}{r} ds_1 ds_2 ;$$

bei Einführung der Projektionen dx_1, dy_1, dz_1 von ds_1 und dx_2, dy_2, dz_2 von ds_2 verwandelt sich der Ausdruck in

174'') $$\Psi_{12} = -\frac{I_1 I_2 \mathfrak{m}}{v^2} \int\int \frac{dx_1 dx_2 + dy_1 dy_2 + dz_1 dz_2}{r} .$$

Dieses im Falle des leeren Raumes, wo $\mathfrak{m} = 1$ ist, von F. NEUMANN angegebene elektrodynamische Potential[67]) hat, gemäß seiner Ableitung aus dem magnetischen (117), die Eigenschaft, die negativen Kraftkomponenten nach beliebigen Richtungen und die negativen Drehungsmomente um beliebige Axen, welche einer der starr gedachten Stromläufe von dem anderen erfährt, zu liefern, wenn man es bei ungeänderten Stromstärken in der Weise differentiiert, wie es einer Verschiebung des betreffenden Stromlaufes nach der Richtung der gewünschten Kraftkomponente, resp. einer Drehung desselben um die Axe des gewünschten Momentes, entspricht.

Es ist sonach die Arbeit der Wechselwirkung bei einer beliebigen Verschiebung und Drehung beider Stromläufe

174''') $$\delta' A_i = -\delta_I \Psi_{12} ,$$

diejenige der sie kompensierenden äußeren Kräfte

174'''') $$\delta' A_a = +\delta_I \Psi_{12} ;$$

hierbei bezeichnet der rechts an δ angebrachte Index I, daß die Variation bei konstant gehaltenen Stromstärken ausgeführt werden soll.

Die Gesamtarbeit, welche erforderlich ist, um die vorausgesetzte Veränderung bei konstanten Stromstärken zu bewirken, kann dabei — ähnlich wie bei einem korrespondierenden Vorgang schon S. 6 ausgeführt ist — von $\delta' A_a$ verschieden sein, und wird es jedenfalls sein, wenn das System die Eigenschaft besitzt, daß bei den Verschiebungen und Drehungen in Wirklichkeit eine Veränderung der Stromstärken eintritt. Wir kommen auf diesen wichtigen Punkt weiter unten zurück.

Der Ausdruck für Ψ_{12} in (174''') oder (174'''') eingesetzt, stellt die bezüglichen Arbeiten auch dann noch dar, wenn die Veränderung nicht die Dislokation der starr gedachten Stromläufe darstellt,

sondern die **Deformation** der **biegsam** angenommenen. Denn jeder lineäre Stromlauf ist nach S. 235 durch Elementarströme zu ersetzen, welche eine durch seine Kurve begrenzte Oberfläche erfüllen, und jede Deformation des ganzen Stromlaufes läßt sich auf eine Dislokation der Elementarströme ohne Deformation der einzelnen zurückführen. —

Der Ausdruck (174′) für das elektrodynamische Pontential ist oben abgeleitet worden aus der Hypothese, daß lineäre geschlossene Ströme auch bezüglich ihrer Wechselwirkung mit magnetischen Doppelflächen äquivalent wären. Dieser Weg giebt zu Bedenken Veranlassung, wenn es nicht möglich ist, die magnetischen Doppelflächen so zu legen, daß alle ihre Teile sich in endlicher Entfernung von einander, resp. von dem anderen Stromlauf befinden, wie z. B. dann, wenn die zwei Stromläufe ineinander geschlungen sind; denn im Innern der Oberfläche selbst hört der Potentialwert (110″) auf, gültig zu sein. Indessen sind diese Bedenken weniger schwerwiegend, da es stets möglich ist, zu einem der beiden Stromläufe ein geeignetes Stück hinzuzufügen, das seinerseits eine Wirkung auf den anderen Strom nicht übt, aber die Verschlingung zu lösen gestattet. Dazu denken wir uns den einen Stromlauf aufgeschnitten und mit den beiden Enden einem lineären Leiter verbunden, der in zwei parallelen, unendlich nahen Bahnen nach einer Stelle des zweiten Leiters hin und dort in einer unendlich kleinen Kurve um ihn herumgeführt ist. Dieses dem einen Leiter zugefügte und von demselben Strom durchlaufende Stück übt auf den zweiten, wie leicht erkennbar, nach (174′) berechnet, keine Wirkung; der direkt gegebene ist also dem modifizierten Stromlauf äquivalent, und letzterer ist durch eine magnetische Doppelfläche ersetzbar, welche von dem anderen Stromlauf nicht durchsetzt wird. Hiernach ist die Anwendbarkeit der Gleichung (174′) auch in dem Fall wahrscheinlich, daß die Stromläufe ineinander geschlungen sind. —

Die Wechselwirkung zwischen zwei stromdurchflossenen lineären Leitern kann ebenso, wie dies S. 242 u. f. für die Wechselwirkung zwischen Stromläufen und Magneten gezeigt ist, zur **Messung von Stromstärken** verwandt werden.

Man macht zu diesem Zwecke einen Stromlauf, etwa eine Drahtrolle, die geeignet mit einer galvanischen Kette verbunden ist, um eine vertikale Axe drehbar, setzt ihn der Wirkung eines zweiten, in der Nähe aufgestellten Leitersystemes aus, und beobachtet seine Gleichgewichtslage, einmal, wenn in letzterem ein Strom fließt, einmal, wenn ein solcher fehlt. Im ersten Falle muß die Summe der

Drehungsmomente der Aufhängung, der erdmagnetischen und der elektrodynamischen Wirkung verschwinden, im zweiten Falle muß gleiches für die Summe nur der ersten beiden Momente gelten. Der Winkel zwischen den beiden Gleichgewichtslagen hängt von dem Produkt $I_1 I_2$ der in dem festen und der in dem beweglichen System fließenden Stromstärken ab; sind beide Systeme in denselben Leiterkreis geschaltet, so ist $I_1 = I_2$, und die Bestimmung führt direkt auf das Quadrat der gesuchten Größe I_1; im anderen Falle erfordert ihre Bestimmung die Kenntnis der zweiten Stromstärke I_2.

Instrumente, welche nach diesen Prinzipien angeordnet sind, nennt man Elektrodynamometer. Sie bieten den früher betrachteten Galvanometern gegenüber einen mitunter wichtigen Vorteil. Da sich in dem Falle, daß beide Leiter von demselben Strome durchflossen werden, die Kraftwirkung nicht mit der Richtung des Stromes umkehrt, so reagieren diese Apparate nämlich auf sogenannte Wechselströme, welche in sehr kleinen Zeitintervallen ihre Richtung umkehren, während die Galvanometer unter deren Einwirkung in ihrer Ruhelage verharren. Da periodische Wechselströme, deren Integralstärke $J = \int I\,dt$, über ein Vielfaches einer Periode gebildet, gleich Null ist, vielfältige praktische Anwendung finden, so gilt Gleiches auch von den Elektrodynamometern. —

Das in (174′) für lineäre Stromläufe gegebene Gesetz läßt sich leicht auf räumliche übertragen, indem man dieselben in der auf S. 221 benutzten Weise in Systeme lineärer Stromfäden zerlegt.

Man erhält so direkt

$$\Psi_{12} = -\frac{\mathfrak{m}}{v^2}\int \mathfrak{i}_1\, d q_1 \int \mathfrak{i}_2\, d q_2 \int\int \frac{d x_1\, d x_2 + d y_1\, d y_2 + d z_1\, d z_2}{r},$$

und wenn man die Volumenelemente $d q_1\, d s_1 = d k_1$, $d q_2\, d s_2 = d k_2$, sowie die Komponenten der Strömungen $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ nach den Koordinatenaxen, nämlich $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{w}_2$, einführt[68]),

$$175)\quad \begin{cases} \Psi_{12} = -\dfrac{\mathfrak{m}}{v^2}\displaystyle\int\int(\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{v}_1\,\mathfrak{v}_2 + \mathfrak{w}_1\,\mathfrak{w}_2)\frac{d k_1\, d k_2}{r}, \\ \quad\;\; = -\dfrac{\mathfrak{m}}{v}\displaystyle\int(\mathfrak{u}_2\, U_1 + \mathfrak{v}_2\, V_1 + \mathfrak{w}_2\, W_1)\, d k_2; \end{cases}$$

in der letzten Formel bedeuten die U_1, V_1, W_1 die Vektorpotentiale der wahren Strömung $\mathfrak{i}_1$.

Diese Ausdrücke verhalten sich ähnlich, wie das Newton'sche Potential zwischen zwei räumlichen Massenverteilungen; man kann daher, wie bei jenem, das Potential eines Stromsystemes auf sich selbst bilden, indem man die beiden räumlichen Integrationen über

das ganze System erstreckt und dem Integral den Faktor $\frac{1}{2}$ zufügt. Dadurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}\Psi &= -\frac{\mathfrak{m}}{2v^2}\int\int(\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}_1+\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}_1+\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}_1)\frac{dk\,dk_1}{r},\\ &= -\frac{\mathfrak{m}}{2v}\int(\mathfrak{u}\,U+\mathfrak{v}\,V+\mathfrak{w}\,W)\,dk. -\end{aligned}\right\}\qquad 175')$$

Wir haben uns bisher auf den Fall beschränkt, daß die Stromleiter nicht magnetisierbar und nur von einem unendlichen homogenen isotropen magnetisierbaren Medium umgeben sind; es bietet sich nunmehr die Frage, wie die erhaltenen Resultate zu verallgemeinern sind, wenn die Natur des körperlichen Systemes ganz beliebig gelassen wird.

Hier müssen notwendig die influenzierten Magnetismen besonders in Rechnung gezogen werden, und dies geschieht in der einfachsten Weise, wenn wir sie wie früher durch die äquivalenten Ströme ersetzen.

Handelt es sich um die Wechselwirkung zwischen zwei magnetisierbaren Stromsystemen (1) und (2), welche durch den leeren Raum getrennt sind, so erhält man durch einfache Übertragung der Schlüsse, die S. 67 und S. 187 bei den verwandten Problemen der Wechselwirkung zwischen elektrisch oder magnetisch influenzierbaren Körpern Anwendung gefunden haben, für das elektrodynamische Potential

$$\left.\begin{aligned}\Psi'_{12} &= -\frac{1}{v^2}\int\int(\mathfrak{u}'_1\,\mathfrak{u}'_2+\mathfrak{v}'_1\,\mathfrak{v}'_2+\mathfrak{w}'_1\,\mathfrak{w}'_2)\frac{dk_1\,dk_2}{r}\\ &= -\frac{1}{v}\int(\mathfrak{u}'_1\,\mathfrak{U}_2+\mathfrak{v}'_1\,\mathfrak{V}_2+\mathfrak{w}'_1\,\mathfrak{W}_2)\,dk_1\\ &= -\frac{1}{v}\int(\mathfrak{u}'_2\,\mathfrak{U}_1+\mathfrak{v}'_2\,\mathfrak{V}_1+\mathfrak{w}'_2\,\mathfrak{W}_1)\,dk_2,\end{aligned}\right\}\qquad 175'')$$

wobei $\mathfrak{u}'_h, \mathfrak{v}'_h, \mathfrak{w}'_h$ die Komponenten der freien Strömungen, $\mathfrak{U}_h, \mathfrak{V}_h, \mathfrak{W}_h$ ihre durch (143') definierten Vektorpotentiale bezeichnen.

Zu dem Potential Ψ' eines ganz beliebigen Stromsystemes auf sich selbst gelangt man durch Anwendung der Schlüsse von S. 69 und S. 189 und erhält so

$$\left.\begin{aligned}\Psi' &= -\frac{1}{2v^2}\int\int(\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}'+\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}'+\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}')\frac{dk\,dk_1}{r}\\ &= -\frac{1}{2v}\int(\mathfrak{u}\,\mathfrak{U}+\mathfrak{v}\,\mathfrak{V}+\mathfrak{w}\,\mathfrak{W})\,dk\\ &= -\frac{1}{2v}\int(\mathfrak{u}'\,U+\mathfrak{v}'\,V+\mathfrak{w}'\,W)\,dk;\end{aligned}\right\}\qquad 175''')$$

hierin sind beide Integrationen über das ganze System zu erstrecken. Aus Ψ' gewinnt man dann die Arbeit $\delta' A_i$ der Wechsel-

wirkungen bei einer Deformation des Systemes, sowie die $\delta' A_a$ der sie kompensierenden äußeren Kräfte gemäß der Formel

175'''') $$\delta' A_i = - \delta' A_a = - \delta_I \Psi'. -$$

Während durch die vorstehenden Entwickelungen das Integralgesetz der Wechselwirkung zwischen zwei Stromläufen genügend begründet ist, gilt Gleiches keineswegs für die Differential- oder Elementargesetze. Von diesen besitzt eines, das die Wechselwirkung zwischen zwei linearen Stromelementen ausdrückt, ein Elementargesetz zweiter Ordnung, praktische Bedeutung allerdings gar nicht, und es mag nur beiläufig erwähnt werden, daß Ampère von einem solchen ausgehend zuerst die Grundgesetze der Elektrodynamik abgeleitet hat[69]); dagegen kommen Fälle vor, wo die Kraft beobachtet wird, die ein begrenztes Stück eines linearen Leiters seitens eines geschlossenen linearen Stromlaufes erfährt, und deren Berechnung erfordert die Kenntnis des Gesetzes der Wechselwirkung zwischen einem geschlossenen Strom und einem Stromelement, also das Elementargesetz erster Ordnung. Es ist klar, daß dasselbe aus unserem Integralgesetz (175) ohne neue Hypothese nicht zu gewinnen ist; daß es dagegen glatt aus dem verallgemeinerten Gesetz von Biot und Savart folgt, dessen Zulässigkeit auf S. 274 mit Hilfe der allgemeinen Formeln über Spannungen im magnetischen Felde begründet ist, wenn man die Hypothese der Äquivalenz von Stromläufen und Magneten bezüglich ihrer Wirkung auf Stromläufe auch auf die einzelnen Stromelemente ausdehnt.

Denn die Formel (173'''), welche lautet $\Xi' = \mathfrak{m}(C\mathfrak{v} - B\mathfrak{w}) / v$, giebt die X-Komponente der auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Kraft, welche das Volumenelement dk erfährt, falls die wahre Stromdichte $\mathfrak{i}$ in ihm die Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ besitzt, und falls das wirkende magnetische System ebenda die Kraftkomponenten A, B, C ausübt. Setzt man hierin für die letzteren Größen diejenigen Werte, welche von einem Stromsystem ausgeübt werden, so ist damit das gesuchte Elementargesetz erster Ordnung gebildet; seine Diskussion ist im wesentlichen bereits auf S. 239 ausgeführt. —

An den Schluß dieser ganzen Untersuchung der magnetischen Wirkungen von Stromsystemen wollen wir eine Betrachtung der magnetischen Energie eines ganz beliebigen körperlichen Systemes stellen, welches nebeneinander permanente Magnete und magnetisierbare Körper enthalten und von beliebigen Strömen durchflossen werden mag. Dabei mögen, abweichend von früherem, die permanenten Magnete nicht durch die äquivalenten Ströme ersetzt werden,

weil auf diese Weise leichter ihr von den wahren Stromsystemen abweichendes Verhalten — nämlich ihre absolute Unveränderlichkeit — zum Ausdruck gebracht werden kann. Der Bequemlichkeit halber denken wir, wie früher mehrfach, alle unstetigen Übergänge durch stetige ersetzt.

Für die magnetische Energie schreiben wir nach (141″)

$$E_m = \frac{1}{8\pi}\int(\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C)\,dk$$

und setzen für A, B, C ihre Werte ein; soweit dieselben die Wirkung der permanenten Magnete enthalten, sind sie nach (121) gegeben durch

$$A_M = -\frac{\partial\psi'}{\partial x},\quad B_M = -\frac{\partial\psi'}{\partial y},\quad C_M = -\frac{\partial\psi'}{\partial z},$$

worin ψ' die Potentialfunktion der wahren und der durch die wahren influenzierten Magnetismen darstellt; soweit dieselben die Wirkung der wahren und der durch sie influenzierten scheinbaren Ströme enthalten, folgen sie aus den Formeln (142), welche lauten

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},\quad \mathfrak{B} = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x},\quad \mathfrak{C} = \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y},$$

wenn man damit kombiniert das mit (123) korrespondierende System

$$A = \mathfrak{n}_{11}\mathfrak{A} + \mathfrak{n}_{12}\mathfrak{B} + \mathfrak{n}_{13}\mathfrak{C},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

in dem $\mathfrak{n}_{hk} = \mathfrak{n}_{kh}$ ist.

Man erhält so nach einer einfachen Umformung

$$\left.\begin{aligned}E_m = \frac{1}{8\pi}\int\Big[A\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right) + C\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)\\ - \left(\mathfrak{A}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial\psi'}{\partial y} + \mathfrak{C}\frac{\partial\psi'}{\partial z}\right)\Big]\,dk,\end{aligned}\right\}\quad 176)$$

und kann diesen Ausdruck durch teilweise Integrationen, bei denen das Integral über die unendliche Kugelfläche verschwindet, überführen in

$$\begin{aligned}E_m = \frac{1}{8\pi}\int\Big[\mathfrak{U}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + \mathfrak{V}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \mathfrak{W}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)\\ + \psi'\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial z}\right)\Big]\,dk.\end{aligned}$$

Benutzt man hierin die Definitionen (147) der wahren Stromkomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und die Definitionen (141) der wahren magnetischen Dichte ϱ, so erhält man

$$E_m = \frac{1}{2v}\int(\mathfrak{u}\mathfrak{U} + \mathfrak{v}\mathfrak{V} + \mathfrak{w}\mathfrak{W})\,dk + \tfrac{1}{2}\int\varrho\,\psi'\,dk. \qquad 176')$$

Hierin ist aber das erste Integral nach (175‴) das negative Potential des ganzen mit den wahren Strömen in Verbindung stehenden Stromsystemes auf sich selbst, das zweite Integral nach (127) das positive Potential des ganzen mit den wahren Ladungen in Verbindung stehenden Systemes von Magnetismen auf sich selbst. Charakterisieren wir diese beiden Teile durch die unteren Indices I und M, so erhalten wir somit

176″) $$E_m = \Psi'_M - \Psi'_I;$$

ein Glied, welches sich auf die Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen bezieht, kommt hierin nicht vor.

In dem speziellen Falle, daß das System magnetisierbare Körper nicht enthält, treten in (176′) nur die wahren Potentiale U, V, W, ψ, Ψ' an die Stelle der freien $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, ψ' Ψ'. Sind überdies die dann allein vorhandenen wahren Stromläufe und die permanenten Magneten räumlich gesondert, so ergiebt der gefundene Wert (176″) von E_m die folgenden Sätze.

Eine Verschiebung nur der permanenten Magnete gegeneinander erfordert, da sich hier Ψ_I nicht ändert, eine äußere Arbeit

$$\delta'_1 A_a = \delta\Psi_M,$$

was mit dem auf S. 153 erhaltenen Resultate übereinstimmt.

Eine Verschiebung permanenter Magnete gegen konstant erhaltene wahre Ströme erfordert, da ihre Wechselwirkung in E_m nicht auftritt, eine gesamte äußere Arbeit

$$\delta'_2 A_a = 0\,.$$

Da wir nun auf S. 241 gezeigt haben, daß die Überwindung der zwischen den räumlich getrennten Magneten und Stromläufen wirkenden Kräfte eine Arbeit

$$\delta' A_a = \delta_{MI}\Psi_{MI}$$

erfordert, worin Ψ_{MI} das Potential der betreffenden Wechselwirkung bezeichnet und die Variation bei konstantem magnetischen und elektrischen Verhalten zu nehmen ist, so folgt, daß bei der Verschiebung anderweit eine Arbeit von dem Betrage $-\delta_{MI}\Psi_{MI}$ verbraucht, oder im Betrage von $+\delta_{MI}\Psi_{MI}$ gewonnen werden muß.

Eine Verschiebung konstant erhaltener wahrer Ströme gegen einander erfordert eine Gesamtarbeit

$$\delta'_3 A_a = -\delta_I\Psi'_I\,.$$

Nun ist aber auf S. 279 gezeigt, daß zur Überwindung der elektrodynamischen Wechselwirkung die Arbeit

$$\delta' A_a = +\delta_I\Psi'_I$$

nötig ist; es folgt hieraus, daß bei der Verschiebung anderweit eine Arbeit im Betrage von $-2\,\delta_I\,\Psi_I$ verbraucht, resp. im Betrage von $+2\,\delta_I\,\Psi_I$ gewonnen werden muß.[70])

Über den Verbleib dieser Beträge wird im folgenden Kapitel Rechenschaft abgelegt werden.

§ 30. Die allgemeinen Gesetze stationärer elektrischer Ströme. Widerstand und Leitfähigkeit eines homogenen Körpers.

Wie wir in den vorigen Abschnitten Folgerungen aus den Formeln (149'') und (143'') gezogen haben, welche die wahren und die freien Strömungskomponenten mit den magnetischen Kräften und Polarisationen verbinden, so sollen für das folgende die correspondierenden Gleichungen (152'''), welche den Zusammenhang der wahren Stromkomponenten mit den elektrischen Kräften aussprechen, die Grundlage bilden.

Wir stellen also an die Spitze unserer Entwickelung das System

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}_{11}(X - X^0) + \mathfrak{l}_{12}(Y - Y^0) + \mathfrak{l}_{13}(Z - Z^0), \qquad 177)$$

. . . .

in dem die $\mathfrak{l}_{hk}$ die Leitfähigkeitskonstanten des Mediums, X^0, Y^0, Z^0 die Komponenten einer Gegenkraft K^0 zu K und zugleich die Grenzwerte von X, Y, Z bei verschwindendem Strom bezeichnen. $X' = -X^0$, $Y' = -Y^0$, $Z' = -Z^0$ lassen sich dann als die Komponenten einer räumlichen elektromotorischen Kraft $K' = K^0$ deuten, die von der mit dem Ort stetig wechselnden Natur des Körpers abhängt.

Hiermit kombinieren wir die Bedingungen (147') bis (147'''), welche für jeden Punkt im Innern des Leitersystemes ergeben

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0, \qquad 177')$$

längs einer Zwischengrenze o_{hk}, an der die elektrischen Eigenschaften des Leitersystemes sich sprungweise ändern,

$$\overline{\mathfrak{n}}_h + \overline{\mathfrak{n}}_k = 0, \qquad 177'')$$

und längs einer Außengrenze

$$\overline{\mathfrak{n}} = 0. \qquad 177''')$$

Die elektrischen Kräfte X, Y, Z besitzen nach S. 219 eine Potentialfunktion φ', haben also die Form

$$X = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \varphi'}{\partial z};$$

man kann demgemäß die Lösung des Strömungsproblemes auf die Bestimmung von φ' zuspitzen. Die Hauptgleichung für φ' folgt

aus (177') durch Einsetzen der Werte von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, die Bedingung für die Grenzen gegen Nichtleiter aus (177'') durch die gleiche Operation bezüglich $\mathfrak{n}$. Betrachtet man die Zwischengrenzen innerhalb des Leitersystemes, wie bisher, als Unstetigkeitsflächen des physikalischen Verhaltens, so ist in gleichem Sinne die Formel (177'') zu verwerten und außerdem zu benutzen, daß nach S. 58 in einer solchen Fläche die Potentialfunktion um eine Konstante P_{hk}, die flächenhafte elektromotorische Kraft der Kombination (h, k), springt.

Wir wollen im allgemeinen diese Betrachtungsweise benutzen, indessen doch bemerken, daß es mitunter vorteilhaft ist, auch in den Zwischengrenzen ein, wenngleich schnell, so doch stetig veränderliches Verhalten anzunehmen. Dann gilt allenthalben die Bedingung (177') und die Grenzschicht ist nur durch besonders große Werte der Komponenten X^0, Y^0, Z^0 resp. X', Y', Z' ausgezeichnet.

Es ist leicht zu erkennen, wie man durch Grenzübergang die früher erwähnten Bedingungen für den Fall sprungweiser Änderung hieraus zurückgewinnen kann. Bezeichnet man nämlich die Komponente von K^0 nach der Normalen auf der sehr dünnen Übergangsschicht mit N^0, die nach einer Tangente mit S^0, so wird im Grenzfall N^0 unendlich, während S^0 endlich ist; die Endlichkeit der Strömung verlangt aber, daß hierbei auch $N - N^0$ endlich bleibt. Indem man $N = -\partial\varphi'/\partial n$ setzt und Endliches neben Unendlichem vernachlässigt, kann man sonach für die Übergangsschicht schreiben

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = -N^0 = N',$$

oder nach Multiplikation mit dn und Integration über die Dicke der Schicht zwischen zwei stetig veränderlichen Teilen (h) und (k)

177'''') $$\overline{\varphi'_k} - \overline{\varphi'_h} = -\int_{(h)}^{(k)} N^0\, dn = \int_{(h)}^{(k)} N'\, dn = P_{hk},$$

wo nun P_{hk} der Potentialsprung in der Grenze ist, von dem wir oben ausgegangen sind.

Die Betrachtung stellt den Zusammenhang zwischen der flächenhaften elektromotorischen Kraft P_{hk} und der räumlichen K' her; sie beleuchtet auch von einer neuen Seite her die Bedeutung der Thatsache, daß P_{hk} bei gegebener Temperatur der Kombination der Substanzen der Teile (h) und (k) individuell ist. —

Durch die oben formulierten Bedingungen ist φ', gleichviel ob das Leitersystem Σ endlich oder unendlich ist, unwesentliche extreme Fälle ausgenommen, bis auf eine additive Konstante bestimmt, die

für die Berechnung der Strömungskomponenten keine Bedeutung besitzt und allein von den Ladungsverhältnissen des Systemes abhängt.

Auch sie ist bestimmt, wenn der Wert von φ' für irgend eine Stelle des Leitersystemes vorgeschrieben ist, wie das z. B. dann eintritt, wenn diese Stelle in direkte leitende Verbindung mit der Erde gebracht ist, auf der man nach S. 14 die Potentialfunktion gleich Null annehmen kann. Natürlich darf eine solche Verbindung nur für einen Punkt bestehen; im anderen Falle würde in den Zuleitungen ein Strom stattfinden, und es wäre die Erde dem Leitersystem zuzurechnen.

Eine andere Bestimmung erhält man, wenn das ganze System Σ isoliert, und seine Gesamtladung E vorgeschrieben ist. Letztere ist zum Teil räumlich, zum Teil flächenhaft; für die beiderseitigen Dichten gelten nach (42') die Formeln

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_k}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}_k}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}_k}{\partial z} = 4\pi \varrho_k, \quad \mathfrak{N}_h + \mathfrak{N}_i = 4\pi \sigma_{hi},$$

deren erstere für alle inneren Punkte, deren letztere für Zwischen- und Außengrenzen von Σ gilt.

Bildet man

$$E = \int \varrho_k \, d k_k + \int \sigma_{hi} \, d o_{hi},$$

so zerstören sich die beiden Integrale zum überwiegenden Teil, und es bleibt allein

$$E = \frac{1}{4\pi} \int \overline{\mathfrak{N}}_a \, d o_a,$$

worin das Integral sich nur auf die äußere Begrenzung von Σ bezieht, und $\overline{\mathfrak{N}}_a$ den Wert der normalen Polarisation im umgebenden Dielektricum nächst der Oberfläche o_a angiebt. Die Dielektricitätskonstanten des Leitersystemes sind also aus dem Ausdruck vollständig verschwunden.

Um mit Hilfe des gegebenen Wertes von E nun die noch unbekannte Konstante in φ' zu bestimmen, ist für den Σ umgebenden Raum das elektrische Gleichgewichtsproblem zu lösen, wozu die früher gegebenen Methoden ausreichen, da das Gesetz, welches φ' an der Oberfläche von Σ befolgt, und das bis auf jene additive Konstante bekannt ist, auf deren Anwendbarkeit ohne Einfluß ist. Man erkennt, daß die gesuchte Konstante sich durch E und die Dielektricitätskonstanten der Körper außerhalb Σ ausdrücken wird.

Nachdem wir so gezeigt haben, daß das dielektrische Verhalten des ganzen Systemes zwar auf die Ladungsverhältnisse, nicht aber auf die Strömung influiert, können wir weiter, wo wir nur die letztere untersuchen, von dielektrischer Erregbarkeit vollständig absehen — dazu etwa annehmen, daß sich das System Σ im leeren oder im Luftraum befinde — und demgemäß auch φ' weiterhin mit φ vertauschen. —

Das Problem der stationären elektrischen Strömung in einem Leitersystem stellt sich gemäß den charakteristischen Gleichungen (177) bis (177‴) dar als ein spezieller Fall des Bd. I, S. 299 u. f. behandelten Problemes der stationären Strömung einer imponderabeln Flüssigkeit infolge treibender Kräfte, sowie infolge räumlicher und flächenhafter Quellen. Denn, zerlegt man die Formeln (177) für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ gemäß der Gestalt, welche sie zeigen, in

178) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^1 + \mathfrak{u}^0, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{v}^1 + \mathfrak{v}^0, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{w}^1 + \mathfrak{w}^0,$$

wo $\mathfrak{u}^0$, $\mathfrak{v}^0$, $\mathfrak{w}^0$ nur die vorgeschriebenen Komponenten X^0, Y^0, Z^0 enthalten, so nehmen die Gleichungen (177′) und (177″) die Gestalt an

178′) $$\frac{\partial \mathfrak{u}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}^1}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}^1}{\partial z} = \mathfrak{r},$$

178″) $$\overline{\mathfrak{u}}_h^1 + \overline{\mathfrak{u}}_k^1 = \mathfrak{j}_{hk},$$

worin $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{j}_{hk}$ die Ergiebigkeiten der räumlichen und der flächenhaften Quellen darstellen und vorgeschriebene Funktionen des Ortes sind; diese Formeln sind aber mit (79′) auf Bd. I, S. 300, identisch, da hier für $\mathfrak{u}^1$, $\mathfrak{v}^1$, $\mathfrak{w}^1$ dieselben Gleichungen (76) gelten, welche dort die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ bestimmen.

Das neue allgemeine Problem ist hiernach auf das schon erledigte vollkommen zurückgeführt; es gestattet daher die Anwendung aller der in § 13 des II. Teiles erhaltenen Resultate, und wir dürfen uns, wie früher bei ähnlichen Gelegenheiten, darauf beschränken, das aufzuzählen, was dem hier behandelten Erscheinungsgebiet individuell ist.

In dieser Hinsicht mag zunächst im allgemeinen bemerkt werden, daß die neuen Entwickelungen die früheren in dem Sinne vervollständigen und ergänzen, als sie zeigen, wie man die ehemals ohne Erklärung angenommenen räumlichen und flächenhaften Quellen in dem hier vorliegenden Falle wirklich hergestellt denken kann; denn sie drücken deren Ergiebigkeiten durch in dem Leitersystem vorhandene elektromotorische Kräfte aus. Daß eine solche Herstellung praktisch möglich sei, ist damit allerdings noch nicht bewiesen. —

Der bei weitem wichtigste spezielle Fall ist der eines Systemes aus homogenen Körpern, in welchem Falle, X^0, Y^0, Z^0 und demnach die Ergiebigkeiten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}_{hk}$ verschwinden, das System (177) also die Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \mathfrak{l}_{11} X + \mathfrak{l}_{12} Y + \mathfrak{l}_{13} Z, \\ \mathfrak{v} &= \mathfrak{l}_{21} X + \mathfrak{l}_{22} Y + \mathfrak{l}_{23} Z, \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{l}_{31} X + \mathfrak{l}_{32} Y + \mathfrak{l}_{33} Z \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

annimmt, während die Formeln (177') bis (177''') ungeändert bleiben. Dabei wird in der Regel der Teil des Systemes, welcher die für die Stromstärke in erster Linie maßgebenden elektromotorischen Kräfte enthält — die schon auf S. 237 erwähnte, aus nacheinandergeschalteten Metall- und Flüssigkeitsmassen gebildete, galvanische Kette —, durch zwei Drähte, welche als lineäre Leiter betrachtet werden dürfen, mit dem Körper k verbunden, in dem die Stromverzweigung beobachtet werden soll; der Vorgang in der Kette wird dabei theoretisch nicht verfolgt, sondern es wird der durch den Körper k fließende Gesamtstrom durch ein in den Verbindungsdraht eingeschaltetes Meßinstrument beobachtet. Infolgedessen kann der Körper k, sowie er hinreichend ausgedehnt ist, um die Eintrittsstellen des Stromes als unendlich klein gegen seine Dimensionen betrachten zu können, für sich allein behandelt werden; denn in diesem Falle ist die Verteilung der Strömung über die Eintrittsstellen ohne Einfluß auf den Verlauf der Erscheinung, wie sie sich im überwiegenden Teil des Leiters darstellt, ihre Gesamtstärke aber ist durch die Messung im Leitungsdraht bestimmt.

Das Problem lautet also hier zunächst auf die Bestimmung der Potentialfunktion φ für den Körper k, wenn längs seiner ganzen Oberfläche $\bar{\mathfrak{n}} = 0$ und nur an der punktförmigen Ein- und Austrittsstelle $\int \bar{\mathfrak{n}}_1 \, dq_1 = \mp I$ gegeben ist. Indessen ist es bequemer, die in die Oberfläche geführten Zuleitungen als den Grenzfall von im Innern liegenden sehr kleinen räumlichen Quellen anzusehen; denn bei dieser Auffassung gilt an der ganzen Oberfläche $\bar{\mathfrak{n}} = 0$, und für alle in endlicher Entfernung liegenden Punkte sind die beiden Zuführungsarten gleichwertig.

Ist das Medium homogen krystallinisch und ohne rotatorische Qualität, so kann man durch Einführung eines geeignet orientierten Koordinatensystemes die Formeln (179) auf die Gestalt bringen

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}_1 X, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l}_2 Y, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}_3 Z,$$

worin die $\mathfrak{l}_h$ die spezifischen Hauptleitfähigkeiten darstellen; ferner kann man durch die Substitution

179′) $$x\sqrt{\mathfrak{l}} = \xi\sqrt{\mathfrak{l}_1}, \quad y\sqrt{\mathfrak{l}} = \eta\sqrt{\mathfrak{l}_2}, \quad z\sqrt{\mathfrak{l}} = \zeta\sqrt{\mathfrak{l}_3},$$

worin

$$\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_2\,\mathfrak{l}_3 = \mathfrak{l}^3$$

gesetzt ist, den Körper k in einen Körper $\varkappa$ abbilden, der sich bezüglich der elektrischen Strömung isotrop verhält.

In diesem Raume $\varkappa$ unterliegt φ nämlich der Bedingung

179″) $$\triangle_{\xi\eta\zeta}\,\varphi = 0,$$

an seiner Oberfläche, falls deren Normale mit ν bezeichnet wird, der weiteren

179‴) $$\overline{\partial\varphi/\partial\nu} = 0,$$

während es in den Bildern der punktförmigen Zuführungen oder Quellen unendlich wird, wie $Q_h/4\pi\mathfrak{l}\,\varrho_h$, falls ϱ_h den Abstand des variabeln Punktes und Q_h die Ergiebigkeit der Quelle (h) bezeichnet.

Bei einer beliebigen Anzahl von Quellen, deren Ergiebigkeiten unter den hier gemachten Voraussetzungen der Beziehung

$$\Sigma Q_h = 0$$

genügen müssen, kann man daher φ jederzeit in der Form schreiben

180) $$\varphi = \frac{1}{4\pi\mathfrak{l}}\Sigma Q_h\left(\frac{1}{\varrho_h} + f_h\right);$$

hierin sind die f_h Funktionen von ξ, η, ζ, welche den Bedingungen

180′) $$\triangle_{\xi\eta\zeta} f_h = 0, \quad \overline{\frac{\partial}{\partial\nu}\left(f_h + \frac{1}{\varrho_h}\right)} = C_h$$

genügen, in denen die C_h Konstanten bezeichnen, die nach (179‴) der Formel

180″) $$\Sigma Q_h C_h = 0$$

entsprechen müssen und die deshalb aus dem Ausdruck für φ herausfallen.

In dem oben vorausgesetzten Fall nur zweier Quellen (1) und (2), welche durch lineäre Stromläufe mit der Stärke I hergestellt werden, gilt sonach

$$Q_1 = +I, \quad Q_2 = -I,$$

also

181) $$\varphi = \frac{I}{4\pi\mathfrak{l}}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} + f_1 - f_2\right);$$

dafür schreiben wir kurz

181′) $$\varphi = \frac{I}{4\pi\mathfrak{l}}F,$$

wobei nun F eine Funktion von ξ, η, ζ bezeichnet, welche nach den Bedingungen (180') keines der $\mathfrak{l}_h$ enthält, sich überhaupt ausschließlich durch die Gestalt des Raumes $\varkappa$ und die Lage der beiden Quellen in ihm bestimmt.

φ wird positiv unendlich in der Quelle (1), negativ in der Quelle (2); die Flächen $\varphi =$ Const. werden also im Raume $\varkappa$, und demgemäß auch in k, für sehr große und für sehr kleine Werte der Konstanten diese beiden Quellen dicht umschließen. Geben wir der Konstanten einmal den Wert φ_α, das andere Mal den Wert φ_β, wobei $\varphi_\alpha > \varphi_\beta$ sein mag, so sind dadurch zwei Flächen q_α und q_β bestimmt, die mit der äußeren Fläche von k zusammen einen bestimmten Teil $k_{\alpha\beta}$ von k, und in ihren Bildern analog einen $\varkappa_{\alpha\beta}$ von $\varkappa$, begrenzen. Der Strom tritt dann in diesen Teil $k_{\alpha\beta}$ in einer durch die Lage der Quellen gegebenen Weise ein durch die Fläche q_α, aus durch die Fläche q_β.

Nach (181') wird hier

$$\frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}{I} = \frac{F_\alpha - F_\beta}{4\pi\mathfrak{l}} = W_{\alpha\beta} = \frac{1}{D_{\alpha\beta}}, \qquad 181'')$$

worin $W_{\alpha\beta}$ und $D_{\alpha\beta}$ neue Bezeichnungen sind, eine von der Gestalt und der Natur des Körpers k, der Lage der beiden Quellen und der Wahl der beiden Flächen (α) und (β) abhängige, stets positive Größe sein.

Man nennt dabei $W_{\alpha\beta}$ den Widerstand, $D_{\alpha\beta}$ die Leitfähigkeit des Stückes $k_{\alpha\beta}$ für den bestimmten durch die Lage der Quellen gegebenen Strom. Ihre Dimensionalgleichung lautet nach (5'''') und (155'')

$$[W] = \left[\frac{1}{D}\right] = l\,t^{-1}. \qquad 181''')$$

Um die Eigenschaften dieser Funktionen an einem Beispiel zu erläutern, betrachten wir den Fall, daß das stromführende Medium ringsum unbegrenzt ist, wo dann nach Bd. I, S. 303 die f_h gleich Null sind, also

$$\varphi = \frac{I}{4\pi\mathfrak{l}}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) \qquad 181'''')$$

wird. Charakterisieren wir dann die beiden Flächen q_α und q_β durch ihre Schnittpunkte α und β mit der Verbindungslinie der beiden Quellen (1) und (2) und bezeichnen die Entfernungen zwischen diesen vier Punkten durch doppelte Indices an den ϱ, so ergiebt (181'')

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{D_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4\pi\mathfrak{l}}\left(\frac{1}{\varrho_{1\alpha}} - \frac{1}{\varrho_{1\beta}} - \frac{1}{\varrho_{2\alpha}} + \frac{1}{\varrho_{2\beta}}\right).$$

Um dies auf den gegebenen Raum k zu beziehen, benutzen wir die Substitution (179') und erhalten zunächst

$$\mathfrak{l}^2 \varrho_{hi}^2 = \mathfrak{l}^3 \left(\frac{(x_h - x_i)^2}{\mathfrak{l}_1} + \frac{(y_h - y_i)^2}{\mathfrak{l}_2} + \frac{(z_h - z_i)^2}{\mathfrak{l}_3} \right),$$
$$= \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 (x_h - x_i)^2 + \mathfrak{l}_3 \mathfrak{l}_1 (y_h - y_i)^2 + \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 (z_h - z_i)^2,$$

oder bei Einführung der gegenseitigen Entfernung r_{hi} der Punkte (h) und (i) und ihrer Richtungscosinus a, b, c, die für alle h und i die gleichen absoluten Werte besitzen, auch

$$\mathfrak{l}^2 \varrho_{hi}^2 = r_{hi}^2 (\mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3 a^2 + \mathfrak{l}_3 \mathfrak{l}_1 b^2 + \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 c^2) = r_{hi}^2 \mathfrak{L}^2,$$

worin $\mathfrak{L}$ eine Abkürzung ist.

Setzen wir diesen Wert in den Ausdruck für $W_{\alpha\beta}$ ein, so ergiebt sich schließlich

$$W_{\alpha\beta} = \frac{1}{D_{\alpha\beta}} = \frac{1}{4\pi\mathfrak{L}} \left(\frac{1}{r_{1\alpha}} - \frac{1}{r_{1\beta}} - \frac{1}{r_{2\alpha}} + \frac{1}{r_{2\beta}} \right).$$

Das erhaltene Resultat hat zunächst keine praktische Bedeutung, da die Herstellung punktförmiger Quellen im Innern eines unendlichen Mediums nicht ausführbar ist. Da aber die Bedingung (179''') längs jeder ganz von Stromlinien gebildeten Fläche erfüllt ist, so kann man das Medium durch dergleichen begrenzen und dann doch noch die früheren Betrachtungen anwenden.

Bezeichnet man die Öffnung des in einem Quellpunkt (h) an diese Oberfläche gelegten Tangentenkegels mit ω_h, so tritt in den abgegrenzten Teil des unendlichen Mediums nur der Teil $Q_h \omega_h / 4\pi$ der ganzen Ergiebigkeit der Quelle; hieraus folgt, daß auch in (181'''') I mit $4\pi i/\omega$ zu vertauschen ist, worin i die effektiv eintretende Stromstärke bezeichnet. Aus demselben Grund ist auch in dem schließlichen Wert von $W_{\alpha\beta}$ der Faktor $1/4\pi\mathfrak{L}$ mit $1/\omega\mathfrak{L}$ zu vertauschen; der Widerstand ist somit in demselben Verhältnis vergrößert, als die Stromstärke verkleinert.

Eine solche mögliche Grenzfläche ist eine Ebene durch die beiden Quellen (1) und (2), die nach dem Obigen auch die Punkte (α) und (β) enthält. Hier ist $4\pi/\omega = 2$, und somit der Widerstand das Doppelte von dem oben für das unbegrenzte Medium Berechneten. —

Für isotrope Körper, die auch aus verschiedenen homogenen Teilen zusammengesetzt sein können, ist

182) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} X = -\mathfrak{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l} Y = -\mathfrak{l} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l} Z = -\mathfrak{l} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

worin nach S. 223 $\mathfrak{l}$ die spezifische Leitfähigkeit oder der Leitfähigkeitscoefficienten des Mediums heißt. Hier folgen aus (177') bis (177''')

unmittelbar die Bedingungen für φ im Innern eines homogenen Teiles, an Zwischen- und an Außengrenzen in der Gestalt

$$\triangle_{xyz}\varphi = 0,\quad \mathfrak{l}_h \overline{\frac{\partial \varphi_h}{\partial n_h}} + \mathfrak{l}_k \overline{\frac{\partial \varphi_k}{\partial n_k}} = 0,\quad \overline{\varphi_h} - \overline{\varphi_k} = P_{hk},\quad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} = 0; \tag{182'}$$

der Raum k wird hier also mit dem Raum $\varkappa$ identisch, und die oben für den letzteren erhaltenen Resultate sind bei Vertauschung der griechischen mit den lateinischen Buchstaben sogleich auf den ersteren übertragbar.

Da in homogenen isotropen Körpern die Polarisationen sich nur durch einen konstanten Faktor von den Kräften unterscheiden, so ergiebt die erste Formel (182′), daß im Innern jener Körper auch bei einer stationären Strömung weder wahre, noch freie Ladungen vorhanden sind. Dieselben befinden sich in unserem Falle vielmehr allein auf den Zwischen- und den Außengrenzen des Systemes Σ, und zwar auf den ersteren in Gestalt von doppelten, auf den letzteren in Gestalt von einfachen Belegungen. —

Übertragen wir in der oben angegebenen Weise die Formel (181″) auf einen homogenen isotropen Körper, so ergiebt sie den Widerstand $W_{\alpha\beta}$ eines durch zwei Potentialflächen und die Außengrenze umschlossenen Teiles $k_{\alpha\beta}$ desselben indirekt, seine Leitfähigkeit $D_{\alpha\beta}$ direkt mit $\mathfrak{l}$ proportional. Hierauf beruht ein Verfahren, um $\mathfrak{l}$ für Körper zu bestimmen, welche die Anwendung einfacherer, später zu behandelnder Methoden nicht gestatten; dasselbe setzt allerdings die Auffindung der obigen Funktionen f_h, und somit die Kenntnis von F voraus. Man beobachtet an der Oberfläche des Körpers in zwei festen Punkten (α) und (β) mit Hilfe eines Elektrometers die Potentialwerte φ_α und φ_β, berechnet für sie die Konstantenwerte F_α und F_β aus der Formel für F, bestimmt schließlich in früher erörterter Weise die den Körper passierende Stromstärke und erhält dann

$$\mathfrak{l} = \frac{(F_\alpha - F_\beta)\, I}{4\pi(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)}. \tag{182''}$$

Wie man die Bestimmung von $\mathfrak{l}$ auch ohne die Hilfsmittel der Elektrostatik ausführen kann, wollen wir später erörtern.

Die in (181″) enthaltene Definition des Widerstandes ist nur so lange anwendbar, als die Flächen q_α und q_β sich in endlicher Entfernung von den beiden Zuleitungsstellen (1) und (2) befinden; denn nur in diesem Falle kann man die Zuleitungsstellen als punktförmig und, obwohl der Oberfläche des Körpers k sehr nahe, doch in seinem Innern gelegen ansehen. Sowie man ihnen unendlich

nahe rückt, gewinnt auf die Gestalt der Flächen q_a und q_β die Verteilung des Stromes über die Eintrittsflächen Einfluß, deren Gesetz nicht ohne Schwierigkeiten bestimmbar ist. Daher ist es auch unmöglich, auf dem obigen einfachen Wege den sogenannten Gesamtwiderstand eines Körpers zu bestimmen, der — da das Wort ohne nähere Bestimmung keinen Sinn hat — präziser als der Widerstand desjenigen Bereiches von k zu definieren wäre, das zwischen der äußeren Begrenzung von k und zwei mit den Eintrittsflächen möglichst nahe zusammenfallenden Flächen konstanter Werte φ liegt. Diese Größe spielt überhaupt wegen der theoretischen Schwierigkeiten, die ihre Berechnung bietet, in der Praxis keine Rolle, während für die Bedeutsamkeit des oben definierten $W_{\alpha\beta}$ ein Beweis schon im Vorstehenden geliefert ist. —

Die mitgeteilten Entwickelungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall ausdehnen, der allerdings praktisch nur geringe Bedeutung besitzt, daß die Zuleitung des Stromes zu dem betrachteten homogenen, und insbesondere isotropen Körper nicht durch nur zwei Quellen, sondern durch beliebig viele geschieht, im Grenzfall in gegebener Weise durch endliche Stücke der Oberfläche. Dabei behält auch das Aggregat

$$\frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}{I} = W_{\alpha\beta}$$

die Bedeutung des Widerstandes des zwischen den beiden Flächen $\varphi = \varphi_\alpha$ und $\varphi = \varphi_\beta$ liegenden Stückes $k_{\alpha\beta}$ des Körpers, falls nur innerhalb desselben keine Quellen liegen, und I die durch beide Flächen von (α) nach (β) gehende Gesamtstromstärke bezeichnet.

Hat der isotrope Körper die Form eines beliebigen Cylinders, und ist die Stromzuleitung so reguliert, daß die Strömung mit überall konstanter Dichte der Cylinderaxe parallel verläuft, so ist $\mathfrak{l}\varphi = c - Iz/q$, worin c eine Konstante bezeichnet, und z der Axe parallel gerechnet wird; hieraus folgt für den Widerstand eines durch die Ebenen $z = z_\alpha$ und $z = z_\beta$ begrenzten Stückes: $W_{\alpha\beta} = (z_\beta - z_\alpha)/\mathfrak{l}q$.

Ist hingegen der betrachtete Teil des Körpers von zwei concentrischen Kreiscylindern und zwei zu diesen normalen Ebenen begrenzt, und verläuft die Strömung in radialer Richtung mit auf jeder Cylinderfläche konstanter Dichte, so ist φ von der Form $c + b\,l(a)$, worin b und c Konstanten sind, und a die Entfernung von der Cylinderaxe bezeichnet. Für die Stromdichte ergiebt sich hier der Wert $\mathfrak{l}b/a$, und die Stromstärke I wird $2\pi\mathfrak{l}bh$, wobei h den Abstand der parallelen Begrenzungsebenen angiebt. Der Widerstand

$W_{\alpha\beta}$ des zwischen den Cylinderflächen von den Radien a_α und a_β liegenden Stückes wird demgemäß gleich $\left(l(a_\beta)-l(a_\alpha)\right)/2\pi\mathfrak{l}\,h$. —

Um eine elektrische Strömung mit zwei gegebenen Niveauflächen $\varphi=\varphi_\alpha$ und $\varphi=\varphi_\beta$ herzustellen, wie sie z. B. in den eben besprochenen speziellen Fällen vorausgesetzt ist, kann man sich vorteilhaft der Kombination mehrerer Körper von sehr verschiedenen spezifischen Leitfähigkeiten $\mathfrak{l}$ bedienen. Besitzt nämlich der eine (h) eine viel kleinere spezifische Leitfähigkeit, als der andere (k), so folgt aus der zweiten Bedingung (182'), daß sich in dem letzteren die Potentialfunktion viel weniger ändert, als in dem ersteren, bei sehr starken Unterschieden daher im Körper (k) angenähert als konstant betrachtet werden kann.

Begrenzt man also speziell einen Körper von der Art (h), außer durch Nichtleiter, noch durch zwei Körper von der Art (k), führt dem einen von diesen (k_1) in beliebiger Weise den Strom zu und leitet ihn von dem anderen (k_2) in beliebiger Weise ab, so stellen die Grenzflächen (h, k_1) und (h, k_2) angenähert Potentialflächen für die hervorgebrachte Strömung dar, und die Formel (181'') bestimmt den Widerstand des zwischen ihnen liegenden Körpers (h), falls man nur für φ_α den konstanten Potentialwert in (k_1), für φ_β denjenigen in (k_2) einsetzt.

Auch wenn sie nicht direkt mit der Kette verbunden sind, wie oben angenommen, liefern Körper von sehr hoher spezifischer Leitfähigkeit, in solche von niederer eingesenkt, durch ihre Außengrenze angenähert Niveauflächen für eine das System durchsetzende Strömung.

Schlechte Elektricitätsleiter sind die meisten Flüssigkeiten, sehr gute die meisten Metalle; man kann daher für die Strömung in einer Flüssigkeit bestimmte Potentialflächen vorschreiben, wenn man in dieselbe Metallkörper einsenkt, deren Oberflächen die verlangten Gestalten besitzen, und sie eventuell mit den Polen der galvanischen Kette verbindet. So wird eine Flüssigkeitsmenge, die einen Cylinder erfüllt, von konstanten Strömen parallel ihrer Axe durchlaufen, wenn man Zuleitung und Ableitung durch zwei hinreichend starke ebene Metallplatten vermittelt, die den Cylinder an beiden Enden begrenzen; und in der Flüssigkeit eines sogenannten galvanischen Elementes, welche durch dessen beide Metalle in zwei concentrischen Cylinderflächen begrenzt wird, verläuft die Strömung sehr nahe radial. —

Nach Bd. I, S. 294 kann das Strömungsproblem auf zwei Arten zu einem ebenen werden, einmal, indem alle Nebenbedingungen des Problems von einer Koordinate — sagen wir von z — unabhängig werden, sodaß auch φ nur x und y enthält, sodann, indem

die eine Strömungskomponente — hier also $\mathfrak{w}$ — durch die Nebenbedingungen zum Verschwinden gebracht wird. Der letztere Fall tritt ein, wenn der leitende Körper die Gestalt einer sehr dünnen, ebenen Platte besitzt, in deren eine Grenzfläche wir die XY-Ebene legen wollen.

Auf diesen letzteren Fall, welcher der praktisch weitaus wichtigere ist, wollen wir uns hier beschränken. Wir setzen demgemäß in (179) $\mathfrak{w}$ gleich Null, eliminieren Z und erhalten allgemein

183) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} &= \frac{\mathfrak{l}_{11}\mathfrak{l}_{33}-\mathfrak{l}_{31}\mathfrak{l}_{13}}{\mathfrak{l}_{33}} X + \frac{\mathfrak{l}_{12}\mathfrak{l}_{33}-\mathfrak{l}_{13}\mathfrak{l}_{32}}{\mathfrak{l}_{33}} Y, \\ \mathfrak{v} &= \frac{\mathfrak{l}_{21}\mathfrak{l}_{33}-\mathfrak{l}_{31}\mathfrak{l}_{23}}{\mathfrak{l}_{33}} X + \frac{\mathfrak{l}_{22}\mathfrak{l}_{33}-\mathfrak{l}_{32}\mathfrak{l}_{23}}{\mathfrak{l}_{33}} Y, \end{aligned}\right.$$

was wir abkürzen wollen in

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{L}_{11} X + \mathfrak{L}_{12} Y, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{L}_{21} X + \mathfrak{L}_{22} Y.$$

Da Z nicht gleich Null ist, so ist auch $\partial\varphi/\partial z$ von Null verschieden; die Niveauflächen stehen also nicht senkrecht zur Platte, und gegenüberliegende Punkte der beiden Grundflächen besitzen eine, wenngleich wegen der geringen Dicke sehr kleine, Potentialdifferenz.

Ist die Substanz der Platte homogen krystallinisch und ohne rotatorische Qualität, d. h., ist $\mathfrak{l}_{hk} = \mathfrak{l}_{kh}$, und daher auch $\mathfrak{L}_{12} = \mathfrak{L}_{21}$, so kann man durch Wahl eines geeigneten XY-Axensystemes die Gleichungen auf die Form

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{L}_1 X, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{L}_2 Y$$

bringen. Durch die Substitution

183') $$x\sqrt{\mathfrak{l}} = \xi\sqrt{\mathfrak{L}_1}, \quad y\sqrt{\mathfrak{l}} = \eta\sqrt{\mathfrak{L}_2}, \quad \text{wo } \mathfrak{l}^2 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2$$

ist, kann man dann die XY-Ebene auf eine ΞH-Ebene abbilden, innerhalb deren der gegebenen homogen krystallinischen Platte p eine andere π entspricht, die sich isotrop verhält, so daß auf ihr die elektrische Potentialfunktion φ die Bedingung

183'') $$\triangle_{\xi\eta}\varphi = 0$$

erfüllen muß, an dem durch Nichtleiter hergestellten Rand aber die andere

183''') $$\partial\varphi/\partial\nu = 0,$$

in welcher ν die Normale auf der Randkurve von π in der Ebene ΞH bezeichnet. Liegen auf der Platte p punktförmige Quellen (h), so muß

in ihren Bildern auf π die Funktion φ unendlich werden, wie $Q_h' l(\varepsilon_h)/2\pi \mathfrak{l} d$; hierin bezeichnet ε_h die auf π gemessene Entfernung des variabeln Punktes von der Quelle (h), d die Dicke der Platte; Q_h' ist die Ergiebigkeit der betreffenden Quellen, und zwar nicht, wie Bd. I, S. 305, auf die Länge Eins parallel der Z-Axe bezogen, sondern auf die Dicke d der Platte. Geschieht die Stromzuführung nur durch die Quellen (h), so muß die Summe der Ergiebigkeiten verschwinden.

Hiernach entspricht bei dem vorliegenden ebenen Problem der Ansatz

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi \mathfrak{l} d} \Sigma Q_h' \left(l(\varepsilon_h) + f_h \right) \tag{184}$$

genau dem oben für das räumliche Problem gemachten Ansatz (180); für die Funktionen f_h bestehen die Bedingungen

$$\triangle_{\xi\eta} f_h = 0, \quad \overline{\frac{\partial}{\partial \nu} \left(f_h + l(\varepsilon_h) \right)} = C_h, \tag{184'}$$

worin die C_h Konstanten bezeichnen, die willkürlich sind und nur allein der Bedingung

$$\Sigma Q_h' C_h = 0 \tag{184''}$$

entsprechen müssen.

An den Ansatz (184) lassen sich dieselben Folgerungen anknüpfen, wie an (180); speziell stellt der Ausdruck

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}{I} \tag{184'''}$$

den Widerstand des Stückes $p_{\alpha\beta}$ der Platte zwischen den Niveaukurven $\varphi = \varphi_\alpha$ und $\varphi = \varphi_\beta$ und der Randkurve für den von α nach β verlaufenden Gesamtstrom I dar und läßt sich in der Weise, die S. 289 angewandt ist, leicht für den speziellen Fall vollständig berechnen, daß die Platte seitlich unbegrenzt ist. —

Für isotrope Platten, die nun auch aus verschiedenen homogenen Stücken zusammengesetzt sein können, gilt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} X = -\mathfrak{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l} Y = -\mathfrak{l} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{185}$$

und für φ gelten die Bedingungen

$$\triangle_{xy} \varphi = 0, \quad \mathfrak{l}_h d_h \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n_h}} + \mathfrak{l}_k d_k \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n_k}} = 0, \quad \overline{\varphi_h} - \overline{\varphi_k} = P_{hk}, \quad \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial n}} = 0, \tag{185'}$$

deren erste sich auf Punkte im Innern eines homogenen Teiles, deren zweite und dritte sich auf Zwischengrenzen, deren letzte sich

auf die äußere Begrenzung bezieht. d_h ist die Dicke des Plattenteiles (h) und von einem Teil zum anderen veränderlich gedacht; ihr Auftreten in der zweiten Formel leitet sich leicht mit Hilfe der auf eine Zwischenschicht zwischen zwei Teilen (h) und (k) angewandten Formel $\int n\, d\, o = 0$ ab.

Die Auffindung spezieller Fälle, in denen das vorstehend formulierte Problem der Stromverzweigung in der Ebene lösbar ist, wird dadurch so außerordentlich erleichtert, daß der reelle, wie der imaginäre Teil einer Funktion von $x + iy$ der Hauptgleichung (185′) genügt. Setzt man

185″) $$f(x + iy) = \varphi + i\sigma$$

und faßt φ als Potentialfunktion einer ebenen Strömung auf, so ist σ mit der schon S. 254 eingeführten Strömungsfunktion $\mathfrak{S}$ proportional, welche konstant gesetzt die Gleichung der Stromlinien angiebt, unter denen auch die Grenzkurve des stromdurchflossenen Gebietes mit enthalten sein muß.

Vertauscht man in der letzten Formel $x + iy$ mit $f_1(x_1 + iy_1)$, so wird dadurch ein Teil der Ebene ΞH konform auf einen Teil einer Ebene $\Xi_1 H_1$ abgebildet, und die so erhaltenen Funktionen φ_1 und σ_1 stellen, wenn man sie als von x_1 und y_1 abhängig betrachtet, die Strombewegung innerhalb des Abbildes desjenigen Bereiches dar, in welchem φ und σ als Funktionen von x und y das Entsprechende leisteten.

Durch ein analoges Abbildungsverfahren kann man auch die Untersuchung der Stromverzweigung in gekrümmten Platten auf diejenige in ebenen zurückführen.[71]) —

Ähnlich, wie für die räumliche Strömung auf S. 293 erörtert ist, kann man auch bei der flächenhaften bestimmte Niveaukurven vorschreiben, indem man die Platte p seitlich, außer durch Nichtleiter, durch Platten von viel größerer spezifischer Leitfähigkeit begrenzt. Um ein Bereich zu erhalten, welches der zu (184‴) gemachten Annahme entsprechend von einem Teil der Außengrenze und zwei Niveaukurven $\varphi = \varphi_\alpha$ und $\varphi = \varphi_\beta$ umschlossen wird, genügt es also, längs der letzteren Kurven Platten von hoher Leitfähigkeit anzufügen und den Strom durch die eine zu-, durch die andere abzuführen.

Dasselbe läßt sich auch erreichen, wenn man diese besser leitenden Platten durch Leiter von derselben Substanz, wie p, aber von viel größerer Dicke ersetzt. Ist beispielsweise ein dünnes Kupferblech an zwei beliebig gestaltete massive Kupferklötze (k_1) und (k_2) angelötet, und wird durch letztere der Strom zu- und abgeführt, so sind die Grenzkurven gegen die Kupferklötze sehr nahezu Niveaulinien für die Strömung innerhalb des Kupferbleches, und

die Formel (184''') giebt den Widerstand desselben an, wenn man für φ_α und φ_β die Potentialwerte auf (k_1) und (k_2) setzt. —

Der Beobachtung zugänglich ist bei dem Vorgang der räumlichen oder flächenhaften elektrischen Strömung, außer den schon oben erwähnten Größen, besonders der Verlauf der Niveaukurven φ = Const. auf der Oberfläche des stromdurchflossenen Leiters. Ein feiner Draht, dessen Enden den Körper in zwei Punkten derselben Niveaukurve leitend berühren, wird nämlich von einem Strom nicht durchflossen werden, da in ihm ein Potentialgefälle unter diesen Umständen nicht eintreten kann. Legt man also das eine Ende des Drahtes auf der Oberfläche des Leiters fest und verschiebt das andere auf derselben solange, bis ein in ihn eingeschaltetes Galvanometer keinen Strom anzeigt, so befinden sich jetzt beide Enden auf derselben Niveaukurve. Hiermit ist ein Mittel gegeben, um den Verlauf jeder Niveaukurve in beliebiger Vollständigkeit zu konstruieren.[72])

Bei ebenen stromdurchflossenen Platten kann man zu demselben Zwecke auch verwerten, daß nach Symmetrie auf ihren Flächen die magnetischen Kraftlinien mit Niveaukurven zusammenfallen.[73])

In vereinzelten speziellen Fällen kann man auch die Dichte, mit welcher die Strömung in eine Fläche konstanter Potentialfunktion eintritt, beobachten. Wenn nämlich der Leiter eine **Flüssigkeit** ist, welche — worauf später zurückzukommen — durch den Strom zersetzt wird, und wenn eine Niveaufläche in der oben beschriebenen Weise durch die Oberfläche einer mit der Flüssigkeit in Berührung stehenden Metallmasse hergestellt ist, so schlägt sich eines der Zersetzungsprodukte auf der metallischen Oberfläche in einer der Stromdichte an jeder Stelle proportionalen Menge nieder, und diese Menge kann, wenn das Zersetzungsprodukt ein fester durchsichtiger Körper ist, nach gewissen optischen Phänomen — Farben dünner Schichten — die sie veranlaßt, beurteilt werden. Indessen ist diese Methode der sogenannten Nobili'schen Farben in mehrfacher Hinsicht sehr unvollkommen.[74]) —

Krystalle mit rotatorischen Qualitäten haben wir im Vorstehenden von der Betrachtung ausdrücklich ausgeschlossen; in der That bieten sie praktisches Interesse nicht, weil es bisher nicht gelungen ist, dergleichen in der Natur aufzufinden; dagegen werden wir weiter unten auf den interessanten Fall, in welchem einem isotropen Körper diese Qualitäten künstlich erteilt werden können, näher einzugehen haben. —

Auch die zweite Spezialisierung des Strömungsproblemes zu

einem linearen kann, wie die erste, auf mehrere Weisen bewirkt werden. Entweder können alle Nebenbedingungen des Problemes von zwei der drei Koordinaten — sagen wir von y und z — unabhängig sein, in welchem Falle auch φ nur x enthalten kann, oder aber es können durch die Umstände des Vorganges, etwa weil der Körper die Gestalt eines dünnen Cylinders parallel der X-Axe besitzt, die Strömungskomponenten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ verschwindend sein; auch eine Kombination von zwei derartigen Wirkungen ist möglich, wie z. B., wenn die Strömung in einer ebenen Platte stattfindet und dabei φ nur von einer Koordinate abhängt. Der erste und dritte Fall ist nach dem Vorstehenden sehr leicht zu erledigen, wichtiger ist der zweite; für ihn erhält man, indem man in (179) $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gleich Null setzt und Y und Z eliminiert,

$$185''') \quad \mathfrak{u} = X \frac{[\mathfrak{l}_{11}\mathfrak{l}_{22}\mathfrak{l}_{33} - \mathfrak{l}_{11}\mathfrak{l}_{23}\mathfrak{l}_{32} - \mathfrak{l}_{22}\mathfrak{l}_{31}\mathfrak{l}_{13} - \mathfrak{l}_{33}\mathfrak{l}_{12}\mathfrak{l}_{21} + \mathfrak{l}_{23}\mathfrak{l}_{31}\mathfrak{l}_{12} + \mathfrak{l}_{32}\mathfrak{l}_{13}\mathfrak{l}_{21}]}{\mathfrak{l}_{22}\mathfrak{l}_{33} - \mathfrak{l}_{23}\mathfrak{l}_{32}};$$

der Faktor von X ist als der Leitfähigkeitskoefficient des Cylinders in der Richtung der X-Axe anzusehen. Die Bedingung (177′) giebt, für den Cylinder angewandt, $\mathfrak{u} =$ Const., und somit muß φ längs des Cylinders eine lineare Funktion von x sein. Da aber Y und Z nicht verschwinden, so sind die Flächen konstanten Potentiales nicht der YZ-Ebene parallel, sondern gegen dieselbe geneigt; gegenüberliegende Punkte der Oberfläche des Cylinders besitzen also eine, wenngleich der geringen Dicke des Cylinders wegen sehr kleine, Potentialdifferenz.

Beiläufig mag darauf hingewiesen werden, wie anders der Leitfähigkeitskoefficient eines linearen krystallinischen Leiters für die Wärme sich darstellt, wenn, wie Bd. I, S. 559 angenommen, durch die Seitenflächen eine Ausstrahlung stattfindet, als oben der für die elektrische Strömung, die an den Cylinder gebunden ist. —

Dies genüge hier in Betreff der linearen Leiter von krystallinischer Substanz; solche aus isotroper sollen in § 32 ausführlich behandelt werden.

§ 31. Thermische, mechanische und magnetische Einwirkungen auf die Leitfähigkeitskonstanten.

Die Leitfähigkeitskonstanten $\mathfrak{l}_{hk}$ eines homogenen Körpers sind von thermischen, magnetischen und mechanischen Einwirkungen, denen der untersuchte Körper ausgesetzt wird, außerordentlich stark abhängig, und auf diese ihre Eigenschaften soll hier kurz eingegangen

werden; sie geben zwar nicht, wie die analogen der elektrischen und der magnetischen Permeabilitäten, Veranlassung zu reciproken Wirkungen, aber sie gestatten, gewisse komplizierte und interessante Erscheinungen einfach zu erklären.

Das geringste theoretische Interesse bietet die Abhängigkeit der $\mathfrak{l}_{hk}$ von der Temperatur, da deren Änderung, solange sie den ganzen Körper gleichmäßig betrifft, seine Natur nicht wesentlich alteriert, isotrope Medien isotrop beläßt, krystallinische bezüglich ihrer Symmetrien nicht modifiziert u. s. f. Doch soll erwähnt werden, daß bei den Metallen die Leitfähigkeit mit abnehmender Temperatur so stark wächst, daß sie, wenn man den Verlauf der Veränderung durch Extrapolation nach der Seite negativer Temperaturen hin fortsetzt, schon vor Erreichung des absoluten Nullpunktes (— 273° C) unendlich werden würde. —

Was die Abhängigkeit der $\mathfrak{l}_{hk}$ von mechanischen Veränderungen des Körpers anbetrifft, so beschränken wir uns auf vollkommen elastische Körper und dürfen dann den Einfluß der Deformationen in derselben Weise durch lineäre Funktionen der Deformationsgrößen darstellen, wie dies S. 100 bei den Dielektricitätskonstanten geschehen ist. Wir setzen also

$$\mathfrak{l}_{hk} = \mathfrak{l}'_{hk} + \mathfrak{l}^{(1)}_{hk} x_x + \mathfrak{l}^{(2)}_{hk} y_y + \dots + \mathfrak{l}^{(6)}_{hk} x_y \qquad 186)$$

und können uns, da die betreffenden Erscheinungen bei Krystallen der Beobachtung kaum zugänglich scheinen, auf die Behandlung isotroper Körper beschränken.

Um die Spezialisierung des allgemeinen Ansatzes vorzunehmen, betrachten wir die Funktion

$$F = \mathfrak{u} X + \mathfrak{v} Y + \mathfrak{w} Z, \qquad 186')$$

die nach ihrer Bedeutung als das Aggregat $K \mathfrak{i} \cos (K, \mathfrak{i})$ notwendig ein Skalar sein muß. Setzt man in F für $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ ihre Werte nach (179), so erhält man zunächst

$$F = \mathfrak{l}_{11} X^2 + \mathfrak{l}_{22} Y^2 + \mathfrak{l}_{33} Z^2 + (\mathfrak{l}_{23} + \mathfrak{l}_{32}) YZ + (\mathfrak{l}_{31} + \mathfrak{l}_{13}) ZX + (\mathfrak{l}_{12} + \mathfrak{l}_{21}) XY,$$

also einen Ausdruck, in dem die Konstanten $\mathfrak{l}_{hk}$ und $\mathfrak{l}_{kh}$ nur in einer Verbindung auftreten. Um für sie einzeln gültige Beziehungen zu erhalten, muß man noch zu Hilfe nehmen, daß nach Bd. I, S. 216 das Volumenelement eines beliebig deformierten isotropen Körpers eine physikalische Symmetrie besitzt, die durch ein Ellipsoid charakterisiert wird, also mit derjenigen eines rhombischen holoëdrischen Krystalles übereinstimmt. Es giebt daher für jedes Volumenelement

ein Koordinatensystem, auf welches bezogen in den Formeln (179) die $\mathfrak{l}_{hk}$ für $h \gtrless k$ verschwinden; daraus folgt, wie eine einfache Rechnung zeigt, daß für beliebige Axen die Beziehung

$$\mathfrak{l}_{hk} = \mathfrak{l}_{kh}$$

erfüllt sein muß. Hiernach nimmt also F die Form

186″) $$F = \mathfrak{l}_{11} X^2 + \mathfrak{l}_{22} Y^2 + \mathfrak{l}_{33} Z^2 + 2\,\mathfrak{l}_{23} YZ + 2\,\mathfrak{l}_{31} ZX + 2\,\mathfrak{l}_{12} XY$$

an, und wenn wir setzen

$$\mathfrak{l}'_{11} = \mathfrak{l}'_{22} = \mathfrak{l}'_{33} = \mathfrak{l}' \quad \text{und} \quad F^0 = \mathfrak{l}'(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

so besitzt die Funktion $F - F^0$ den Bd. I, S. 142 als vierten bezeichneten Typus skalarer Funktionen F. Schreibt man insbesondere

$$F - F^0 = X^2 \left(\mathfrak{l}_{11}^{(1)} x_x + \mathfrak{l}_{11}^{(2)} y_y + \mathfrak{l}_{11}^{(3)} z_z + \sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{11}^{(4)} \frac{y_z}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{11}^{(5)} \frac{z_x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{11}^{(6)} \frac{x_y}{\sqrt{2}} \right)$$

. . . .

$$+ \sqrt{2}\,XY \left(\sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{21}^{(1)} x_x + \sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{21}^{(2)} y_y + \sqrt{2}\,\mathfrak{l}_{21}^{(3)} z_z + 2\,\mathfrak{l}_{21}^{(4)} \frac{y_z}{\sqrt{2}} + 2\,\mathfrak{l}_{21}^{(5)} \frac{z_x}{\sqrt{2}} + 2\,\mathfrak{l}_{21}^{(6)} \frac{x_y}{\sqrt{2}} \right),$$

so erhält man wegen der Bd. I, S. 217 erörterten Transformationseigenschaften der Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ genau die am angeführten Orte vorausgesetzte Form; nach S. 144 ebenda reduziert sie sich für isotrope Körper auf

186‴) $$F - F^0 = \mathfrak{l}^{(1)} \vartheta K^2 + \mathfrak{l}^{(2)} (x_x X^2 + y_y Y^2 + z_z Z^2 + y_z YZ + z_x ZX + x_y XY),$$

worin $\mathfrak{l}^{(1)}$ und $\mathfrak{l}^{(2)}$ den dort vorkommenden $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ entsprechende neue Konstanten sind, K die resultierende elektrische Kraft und ϑ die räumliche Dilatation bezeichnet.

Hieraus folgt dann

186⁗) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{u} &= (\mathfrak{l}' + \mathfrak{l}^{(1)} \vartheta + \mathfrak{l}^{(2)} x_x) X + \tfrac{1}{2} \mathfrak{l}^{(2)} (x_y Y + x_z Z), \\ \mathfrak{v} &= (\mathfrak{l}' + \mathfrak{l}^{(1)} \vartheta + \mathfrak{l}^{(2)} y_y) Y + \tfrac{1}{2} \mathfrak{l}^{(2)} (y_z Z + y_x X), \\ \mathfrak{w} &= (\mathfrak{l}' + \mathfrak{l}^{(1)} \vartheta + \mathfrak{l}^{(2)} z_z) Z + \tfrac{1}{2} \mathfrak{l}^{(2)} (z_x X + z_y Y), \end{aligned} \right.$$

wodurch die allgemeinen Formeln für isotrope Medien erhalten sind; sie enthalten außer der Leitfähigkeit $\mathfrak{l}'$ im Normalzustande nur noch die beiden Konstanten $\mathfrak{l}^{(1)}$ und $\mathfrak{l}^{(2)}$, welche allein die Wirkungen der Deformationen auf den Vorgang der Strömung messen.

Ist der stromdurchflossene Körper ein Kreiscylinder, der um seine in die Z-Axe des Koordinatensystems fallende Axe tordiert ist, so wird

$$x_x = y_y = z_z = \vartheta = x_y = 0, \quad y_z = x\delta, \quad z_x = -y\delta,$$

worin δ die Drillung der Längeneinheit bezeichnet; sind gleichzeitig X und Y gleich Null, und ist Z konstant, so wird allen Bedingungen für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ genügt, und man erhält

$$\mathfrak{u} = -\,\mathfrak{l}^{(2)}\delta . Zy, \quad \mathfrak{v} = +\,\mathfrak{l}^{(2)}\delta . Zx, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}' Z.$$

Die Drillung bewirkt hier also neben dem ursprünglichen longitudinalen noch einen zirkularen Strom, der den Draht zu einem Solenoid macht, ihn also, wenn er auch nicht merklich magnetisierbar ist, als homogenen Linearmagneten erscheinen läßt, und wenn er magnetisierbar ist, faktisch longitudinal erregt. —

Den Einfluß magnetischer Kräfte auf die Leitfähigkeitskonstanten $\mathfrak{l}_{hk}$ wollen wir, ähnlich wie den der Deformationen, dadurch berücksichtigen, daß wir die $\mathfrak{l}_{hk}$ linearen Funktionen der jene Wirkungen charakterisierenden Funktionen, hier also der magnetischen Kraftkomponenten A, B, C, gleich setzen und schreiben

$$\mathfrak{l}_{hk} = \mathfrak{l}_{hk}^0 + \mathfrak{l}_{hk}' A + \mathfrak{l}_{hk}'' B + \mathfrak{l}_{hk}''' C. \tag{187}$$

Wir beschränken uns aber, wie früher, bei der Entwickelung der Formeln auf den einzig praktisch interessanten Fall isotroper Körper.

Jedes Volumenelement hat infolge der in ihm wirkenden magnetischen Kraft R, die übrigens im allgemeinen sowohl von äußeren permanenten als von inneren influenzierten Magnetismen herrührt, eine ihr parallele ausgezeichnete Richtung, nämlich eine unendlichzählige Symmetrieaxe erhalten. Legen wir die Z-Axe in die Richtung von R, so wird $A = B = 0$, $C = R$; wir können also schreiben

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u} - \mathfrak{l}^0 X &= C(\mathfrak{l}_{11}''' X + \mathfrak{l}_{12}''' Y + \mathfrak{l}_{13}''' Z),\\
\mathfrak{v} - \mathfrak{l}^0 Y &= C(\mathfrak{l}_{21}''' X + \mathfrak{l}_{22}''' Y + \mathfrak{l}_{23}''' Z),\\
\mathfrak{w} - \mathfrak{l}^0 Z &= C(\mathfrak{l}_{31}''' X + \mathfrak{l}_{32}''' Y + \mathfrak{l}_{33}''' Z),
\end{aligned}$$

und dürfen diese Formeln, welche jetzt mit dem System (152') Bd. I, S. 137 übereinstimmen, nach dem dort gegebenen Schema II für die hier vorliegende Symmetrie spezialisieren. Den Charakter eines Rotationskörpers besitzen bei Erscheinungen, welche den zitierten Formeln (152') folgen, die Krystallgruppen der fünften, siebenten und neunten Reihe; wir erhalten daher durch Übertragung der für sie geltenden Formeln auf unseren Fall zunächst

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u} - \mathfrak{l}^0 X &= C(\mathfrak{l}_{11}''' X + \mathfrak{l}_{12}''' Y),\\
\mathfrak{v} - \mathfrak{l}^0 Y &= C(-\,\mathfrak{l}_{12}''' X + \mathfrak{l}_{11}''' Y),\\
\mathfrak{w} - \mathfrak{l}^0 Z &= C\,\mathfrak{l}_{33}''' Z.
\end{aligned}$$

Nun haben wir aber Ursache, so wie dies bereits auf S. 205 erwähnt ist und im nächsten Kapitel näher begründet werden soll, dem magnetischen Feld in jedem Volumenelement außer der unendlich-zähligen Axe noch ein Symmetriecentrum, aber keine durch die Axe gehende Symmetrieebene beizulegen, seine Symmetrie also der eines ebenen Kreisstromes gleich zu setzen, welcher nach S. 232 das Feld zu erzeugen vermag.

Benutzen wir dies, so ergiebt sich, daß die Umkehrung der Richtung von R äquivalent ist mit einer Umkehrung der Richtung des Kreisstromes, oder mit der Vertauschung der positiven Umlaufung von R mit der negativen. Es dürfen deshalb bei gleichzeitiger Ersetzung von $\mathfrak{u}$, X, C durch $-\mathfrak{u}$, $-X$, $-C$ die letzten Formeln ihre Gestalt nicht ändern. Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden von $\mathfrak{l}_{11}'''$ und $\mathfrak{l}_{33}'''$, und es folgt, wenn man noch $\mathfrak{l}_{12}'''$ mit $-\mathfrak{l}'$ vertauscht, für das vorausgesetzte spezielle Koordinatensystem schließlich

$$187') \qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{l}^0 X - \mathfrak{l}' C Y, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l}' C X + \mathfrak{l}^0 Y, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}^0 Z.$$

Ist $Y=0$, die in dem Volumenelement wirkende elektrische Kraft also der X-Axe parallel, so zeigt die zweite Formel, daß die Strömung infolge der magnetischen Kraft eine Komponente nach Y hat. In derselben Richtung würde ein zur X-Axe paralleler linearer Stromleiter durch die magnetische Kraft $R=C$ getrieben werden; man hat deshalb diese von Hall entdeckte und nach ihm benannte Erscheinung mitunter dahin gedeutet, daß die Stromlinien, der magnetischen Kraft folgend, in der Richtung normal zu Strom und Kraft verschoben würden. Diese Auffassung ist natürlich mit unserem prinzipiellen Standpunkt, alle Kräfte auf ponderable Massen wirkend zu denken, unvereinbar; sie ist auch von dem Experiment widerlegt, welches gezeigt hat, daß der Sinn jener Verschiebung der Stromlinien für einige Körper der Ampère'schen Regel entspricht, für andere aber der entgegengesetzte ist.[75])

Führen wir ein willkürliches Koordinatensystem und die Komponenten A, B, C von R nach diesen Axen ein, so nimmt das System (187′) die Gestalt an

$$187'') \quad \begin{cases} \mathfrak{u} = \mathfrak{l}^0 X + \mathfrak{l}'(BZ - CY), \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l}^0 Y + \mathfrak{l}'(CX - AZ), \\ \qquad \mathfrak{w} = \mathfrak{l}^0 Z + \mathfrak{l}'(AY - BX); \end{cases}$$

beide Formen zeigen, daß ein isotroper Körper in einem magnetischen Felde rotatorische Qualitäten annimmt, und daß in jedem Volumenelement die Rotationsaxe mit der Richtung der magnetischen Kraft zusammenfällt.

Die Bestimmung der Strömung ist im allgemeinen Falle, daß die magnetische Feldstärke R von Ort zu Ort nach Größe und Richtung variirt, außerordentlich schwierig. Dagegen ist das praktisch allein wichtige Problem einer Platte, innerhalb deren R konstant ist und überall normal zu den Begrenzungsebenen steht, mit Hilfe der Bd. I, S. 306 u. f. angegebenen Mittel in vielen Fällen ziemlich einfach zu erledigen.

Hier bleiben aus (187') nur die beiden ersten Formeln, welche nach Einführung der Potentialfunktion φ lauten

$$-\mathfrak{u} = \mathfrak{l}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathfrak{l}' C \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\mathfrak{v} = \mathfrak{l}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{l}' C \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad 187''')$$

Setzt man hierin

$$\mathfrak{l}' C / \mathfrak{l}^0 = \operatorname{tg} \delta,$$

so kann man das Resultat der Bd. I, S. 306 angestellten Untersuchung dahin aussprechen, daß, wenn irgend eine Potentialfunktion φ der Hauptgleichung $\triangle \varphi = 0$ entsprechend gegeben ist, und man die ihr konjugierte Strömungsfunktion σ für eine rotationslose Strömung bestimmt hat, dann die Funktionen

$$\varphi' = \varphi + \sigma \operatorname{tg} \delta, \quad \sigma' = \sigma - \varphi \operatorname{tg} \delta$$

für die gleiche Potentialfunktion φ eine Strömung mit Rotation darstellen, insofern die Bewegung hier normal zu Kurven $\varphi' =$ Const. und parallel zu Kurven $\sigma' =$ Const. in einer Stärke

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{l}^0 \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y}\right)^2}$$

verläuft.

Umgekehrt kann man aus einer vorgeschriebenen Strömungsfunktion σ', die z. B. so gebildet ist, daß sie die Begrenzung der Bewegung durch gegebene Kurven gestattet, die Potentialfunktion φ der Strömung bestimmen, indem man zunächst die zu σ' konjugierte Funktion φ' aufsucht und aus beiden bildet

$$\varphi = \frac{\varphi' - \sigma' \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}.$$

Die nach diesem Verfahren berechneten speziellen Fälle haben sich als mit der Beobachtung im Einklang ergeben, und dies Resultat beweist indirekt die Zulässigkeit der dem System (187') zu Grunde liegenden Annahmen.

Wir wollen von den obigen Regeln nur insofern Gebrauch machen, als wir in einem speziellen Falle untersuchen, inwieweit sich der nach S. 291 gemessene Widerstand eines von zwei parallelen Graden begrenzten Streifens im magnetischen Felde ändert.

Dazu bemerken wir, daß, wenn der Streifen hinreichend lang ist, die Stromlinien seinen Seiten parallel verlaufen müssen; es ist also, wenn letztere der X-Axe parallel liegen, bei Weglassung irrelevanter additiver Konstanten $\sigma' = a y$, daher $\varphi' = a x$ zu setzen, worin a einen Parameter bezeichnet. Hieraus folgt

$$\varphi = a \frac{x - y \operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta},$$

während $\mathfrak{i} = \mathfrak{l}^0 a$, also $I = \mathfrak{l}^0 a b d$ wird, falls b die Breite und d die Dicke des Streifens bezeichnet.

Setzt man diese Werte in die Gleichung (184''') ein, indem man mit (α) und (β) zwei Punkte derselben Stromlinie, also desselben y bezeichnet, so erhält man

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta}{I} = \frac{x_\beta - x_\alpha}{\mathfrak{l}^0 b d (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)};$$

der Einfluß des magnetischen Feldes ist also nur in dem Glied $\operatorname{tg}^2 \delta$ des Nenners enthalten und, da $\operatorname{tg} \delta$ in allen wirklichen Fällen sehr klein ist, als von zweiter Ordnung meist unmerklich. Analoge Resultate werden sich in anderen Fällen bezüglich des Widerstandes ergeben. —

Wir haben uns im Vorstehenden bezüglich der Untersuchung der Einwirkung eines magnetischen Feldes auf die Konstanten der Leitfähigkeit auf die erste Annäherung beschränkt und lineäre Zusammenhänge vorausgesetzt. Da man aber Feldstärken R von außerordentlicher Größe herstellen kann, so ist diese Annäherung sehr häufig nicht genügend. Indessen läßt sich die oben benutzte Methode auch auf die Fälle ausdehnen, wo die Leitungskonstanten Funktionen zweiten und höheren Grades der Komponenten A, B, C sind. Man erhält dann die Gesetze für Erscheinungen, welche zum Teil erheblich von den vorstehend besprochenen abweichen; es genüge aber hier, diese Erweiterungen nur erwähnt zu haben.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß die in diesem Paragraphen über die Veränderlichkeit der Konstanten der elektrischen Leitfähigkeit angestellten Untersuchungen die unveränderte Übertragung auf jede Art von Konstanten gestatten, welche lineäre Beziehungen zwischen den Komponenten zweier Vektorgrößen bestimmen.

Von solchen kommt besonders in Betracht die Veränderlichkeit der thermischen Leitfähigkeiten im magnetischen Feld, die bei Wismut zuerst und zwar in sehr beträchtlicher Stärke beobachtet

worden ist. Dieselbe kommt allem Anschein nach zur Geltung bei einer Gattung eigentümlicher Erscheinungen, auf die wir weiter unten eingehen werden.

§ 32. Lineäre Leitersysteme. Die Gesetze von Ohm, Kirchhoff und Maxwell.

Eine von der in § 30 mitgeteilten abweichende Behandlungsweise der Stromverzweigung in körperlichen und flächenhaften, aber speziell isotropen Leitern knüpft an die Betrachtung der in ihnen verlaufenden Stromfäden an und bringt sie dadurch in direkte Verbindung mit den verzweigten lineären Leitern, die man gleichfalls als Systeme von Stromfäden auffassen kann.

Wir beschränken uns dabei zwar, wie gesagt, auf isotrope Leiter, unterwerfen aber der Untersuchung ein aus beliebigen Stücken zusammengesetztes System.

Für einen Stromfaden gilt nach (151) und (151')

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{l}\frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

worin s die Richtung der Axenkurve bezeichnet. Wir multiplizieren diese Formel mit dem Element ds von s, erweitern ihre linke Seite mit dem Querschnitt dq des Stromfadens an der betrachteten Stelle und erhalten, da $\mathfrak{i}\,dq = dI$, d. h. die Stromstärke des Fadens ist,

$$\frac{ds}{\mathfrak{l}\,dq}\,dI = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}\,ds.$$

Diese Formel wollen wir über ein beliebiges Stück (α, β) des Stromfadens integrieren, erweitern aber, um eine anschaulichere Form zu gewinnen, zuvor die linke Seite dieser Formel mit dq_α, worunter der Querschnitt des betrachteten Stromfadens an seinem Ausgangspunkt, d. h. an der unteren Grenze der Integration, verstanden ist.

Da dI und dq_α bei dieser Integration konstant sind, so erhalten wir, wenn wir die längs s unter Rücksicht auf das Vorzeichen genommene Summe über alle Potentialsprünge P_{hk} zwischen (α) und (β), d. h.

$$\mathop{S}_{(\alpha)}^{(\beta)} P_{hk} = L_{\alpha\beta} \tag{188}$$

setzen,

$$\frac{1}{dq_\alpha}\int_{(\alpha)}^{(\beta)} \frac{ds}{\mathfrak{l}\,\frac{dq}{dq_\alpha}} = \frac{\varphi_\alpha - \varphi_\beta + L_{\alpha\beta}}{dI}. \tag{188'}$$

Die Vergleichung dieses Resultates mit (181'') zeigt, daß die linke Seite als das Reciproke der Leitfähigkeit $dD_{\alpha\beta}$ des Stromfadens zwischen (α) und (β) aufgefaßt, daß also geschrieben werden kann

188'') $$dD_{\alpha\beta} = \frac{dq_a}{\int\limits_{(a)}^{(\beta)} \frac{ds}{\mathfrak{l}\frac{dq}{dq_a}}};$$

$dD_{\alpha\beta}$ ist unendlich klein, sein Reciprokes, der Widerstand des Stromfadens, unendlich groß.

Erstreckt man das Integral über den ganzen, notwendig in sich zurücklaufenden Stromfaden und setzt die so genommene Summe

188''') $$\mathsf{S}\, P_{hk} = L$$

und den in gleicher Weise genommenen Ausdruck (188'') gleich dD, so erhält man

188'''') $$dI = L\,dD.$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Enden (α) und (β) des Fadens auf zwei Niveauflächen $\varphi = \varphi_a$ und $\varphi = \varphi_\beta$ liegen, welche keine Zwischengrenze des Leitersystemes treffen, sondern ringsum durch die äußere Oberfläche des Leitersystemes begrenzt werden, und nennen deren Größen q_a und q_β. Wir nehmen ferner an, daß alle Stromfäden, die q_a passieren, auch q_β durchsetzen, und umgekehrt; endlich setzen wir fest, daß die auf ihnen zwischen (α) und (β) liegenden Potentialsprünge für alle die gleiche Summe $L_{a\beta}$ ergeben.

Dann kann man die Gleichung (188') in der Form

$$dI_{a\beta} = (\varphi_a - \varphi_\beta + L_{a\beta})\, dD_{a\beta}$$

über q_a integrieren und erhält, da nach der Annahme die Klammer konstant ist,

189) $$I_{a\beta} = (\varphi_a - \varphi^\beta + L_{a\beta})\, D_{a\beta};$$

hierin bezeichnet $I_{a\beta}$ den ganzen von q_a nach q_β verlaufenden Strom,

189') $$D_{a\beta} = \int \frac{dq_a}{\int\limits_{(a)}^{(\beta)} \frac{ds}{\mathfrak{l}\frac{dq}{dq_a}}}$$

die Leitfähigkeit des zwischen q_a und q_β liegenden Teiles des Leiters, und

$$1/D_{a\beta} = W_{a\beta}$$

seinen Widerstand.

Dabei gilt ersichtlich

$$I_{\alpha\beta} = -I_{\beta\alpha}, \quad L_{\alpha\beta} = -L_{\beta\alpha}, \quad D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}, \quad W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha}. \qquad 189')$$

Kann man speziell, ohne mit den Voraussetzungen in Widerspruch zu kommen, den Querschnitt q_β in der Richtung des Stromes soweit von q_α fortrücken, daß er wieder mit q_α zusammenfällt, daß also zwischen q_α und q_β jetzt der ganze Stromleiter liegt, so folgt aus (189) einfacher

$$I = L D = \frac{L}{W}, \qquad 189'')$$

worin L, wie oben, die Summe aller auf jedem Stromfaden liegenden Potentialsprünge oder elektromotorischen Kräfte, und D resp. W die Leitfähigkeit resp. den Widerstand des ganzen Leiterkreises bezeichnet.

D und W sind hier ersichtlich von der Lage des Querschnittes q_α unabhängig, sie bestimmen sich nach (189') vollständig durch die Konfiguration des Leitersystemes und die Leitfähigkeitskonstanten $\mathfrak{l}$ seiner Teile.

Das in der Formel (189'') enthaltene Gesetz ist für den speziellen Fall eines einfachen linearen Leiterkreises von Ohm gegeben und trägt auch in der allgemeinen obigen Fassung seinen Namen.[76]) —

Wir benutzen diese Gleichungen zunächst, um einen einfachen allgemeinen Satz abzuleiten.

Bezeichnet q_γ einen dritten Querschnitt, der dieselbe Natur hat, wie q_α und q_β, so kann man (189) entsprechend auch bilden

$$I_{\beta\gamma} = (\varphi_\beta - \varphi_\gamma + L_{\beta\gamma}) D_{\beta\gamma}.$$

Die Kombination dieser beiden Formeln ergiebt, da $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\gamma} = I_{\alpha\gamma}$ ist,

$$I_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{D_{\alpha\beta}} + \frac{1}{D_{\beta\gamma}}\right) = (\varphi_\alpha - \varphi_\gamma + L_{\alpha\gamma}),$$

also

$$I_{\alpha\gamma} = (\varphi_\alpha - \varphi_\gamma + L_{\alpha\gamma}) D_{\alpha\gamma},$$

wobei

$$\frac{1}{D_{\alpha\gamma}} = \frac{1}{D_{\alpha\beta}} + \frac{1}{D_{\beta\gamma}}, \quad \text{und daher} \quad W_{\alpha\gamma} = W_{\alpha\beta} + W_{\beta\gamma}$$

ist.

Hieraus ist zu schließen, daß, wenn man einen wie oben begrenzten Leiter durch Querschnitte, welche mit Flächen konstanten Potentiales φ zusammenfallen, in Stücke zerlegt, dann der Widerstand des Ganzen gleich der Summe der Widerstände seiner Teile ist.

Dieser Satz gilt natürlich nur für Ströme, welche gleichgelegene Potentialflächen besitzen, und hat deshalb allgemeine praktische Bedeutung nur da, wo dies durch die ganze Anordnung für alle Ströme gewährleistet ist.

Hierher gehört insbesondere der Fall eines Systemes von lauter hintereinander geschalteten lineären Leitern, oder von zwischen lineäre Leiter geschalteten körperlichen Leitern, wenn die Art der Einschaltung, von der nach S. 292 der Widerstand eines körperlichen Leiterstückes stark abhängen kann, unverändert ist. In lineären Leitern ist nämlich, abgesehen von den Endstücken, unter allen Umständen ein normaler Querschnitt als Potentialfläche zu betrachten.

Dem vorstehenden ersten Satz können wir auf Grund der in (189′) enthaltenen Definition der Leitfähigkeit $D_{\alpha\beta}$ sogleich einen zweiten zuordnen, der dahin geht, daß, wenn man den Leiter zwischen den Flächen q_α und q_β in Stücke zerlegt, die durch Stromlinien begrenzt sind, dann die Leitfähigkeit des Ganzen gleich der Summe der Leitfähigkeiten seiner Teile ist.

Beim Hintereinanderschalten summieren sich sonach die Widerstände, beim Nebeneinanderschalten die Leitfähigkeiten. —

Die Voraussetzungen, unter denen die Formeln (189) bis (189‴) gelten, sind stets erfüllt bei einem sogenannten einfachen Ring, d. h. bei einem System leitend verbundener Körper, von denen jeder mit zwei anderen zusammenhängt, von denen aber nirgends drei in einer Linie zusammentreffen. Hier können wir jede zwei Flächen $\varphi = \text{Const.}$, welche keine Zwischengrenzen treffen, für q_α und q_β wählen und auf sie die Formel (189) anwenden; ebenso gilt stets die Gleichung (189‴). Der einfachste Fall ist der, daß der Leiter zwischen den Querschnitten q_α und q_β als aus hintereinander gefügten lineären, homogenen, cylindrischen Stücken bestehend angesehen werden kann, deren Längen mit l_h, deren Querschnitte mit q_h, deren spezifische Leitfähigkeiten mit $\mathfrak{l}_h$ bezeichnet werden mögen. Hier gilt dann nach (189′)

190) $$D = \frac{1}{\sum \frac{l_h}{\mathfrak{l}_h q_h}}, \quad W = \sum \frac{l_h}{\mathfrak{l}_h q_h} = \sum W_h,$$

und es wird W_h, der Widerstand des $h$ten Stückes, in Übereinstimmung mit dem S 292 Gefundenen, durch die einfache Formel gegeben

190′) $$W_h = \frac{l_h}{\mathfrak{l}_h q_h}.$$

Auf ihr beruht die Möglichkeit, den Widerstand in irgend einem Leiter durch Einschaltung von Stücken, deren Länge, Querschnitt und spezifische Leitfähigkeit bekannt ist, in einer vorgeschriebenen oder genau meßbaren Weise zu vergrößern. Die Apparate, die zu bequemer Ausführung dieser Operation konstruiert sind, nennt man Rheostaten. —

Besteht der einfache Kreis aus einer galvanischen Kette und einem homogenen Schließungsdraht, so ergiebt die Formel (189‴)

$$I = \frac{L_\varkappa}{W_\varkappa + W_\sigma}, \qquad 190'')$$

worin sich $W_\varkappa$ auf die Kette, W_σ auf die Schließung bezieht, und $L_\varkappa$ die Summe der in der Kette $\varkappa$ enthaltenen Potentialsprünge, d. h. ihre gesamte elektromotorische Kraft bezeichnet.

Besteht die Kette aus n gleichen Systemen, sogenannten galvanischen Elementen, die hintereinander in den einfachen Ring geschaltet sind, so wird

$$I = \frac{n L_\varkappa}{n W_\varkappa + W_\sigma} = \frac{L_\varkappa}{W_\varkappa + \frac{W_\sigma}{n}};$$

sind dagegen m gleiche Elemente nebeneinander geschaltet und gemeinsam durch den Widerstand W_σ geschlossen, so wird, weil sich nach dem zweiten Satz S. 308 bei nebeneinander geschalteten Leitungen mit gleichen elektromotorischen Kräften die Leitfähigkeiten summieren,

$$I = \frac{L_\varkappa}{\frac{1}{m D_\varkappa} + \frac{1}{D_\sigma}} = \frac{L_\varkappa}{\frac{W_\varkappa}{m} + W_\sigma}.$$

Im ersten Fall wird durch die Benutzung von n Elemente statt einer im Vergleich zu (190″) der Widerstand der Schließung auf den n ten, im zweiten Fall durch m Elemente der Widerstand des Elementes auf den m ten Teil reduziert.

In dem allgemeinen Falle, daß $n.m$ Ketten in m Zweigen zu je n benutzt werden, erhält man

$$I = \frac{L_\varkappa}{\frac{W_\varkappa}{m} + \frac{W_\sigma}{n}}.$$

Ist $n.m = \alpha$ vorgeschrieben, so kann man leicht die Anordnung finden, welche bei gegebenem $W_\varkappa$ und W_σ das größte I liefert.[77]) —

Wir haben uns bisher auf den praktisch wichtigsten Fall beschränkt, daß das betrachtete Leitersystem aus homogenen Stücken besteht. Indessen bietet gewisser Analogien wegen, die im nächsten

Kapitel hervortreten werden, wenigstens für lineäre Leiter auch der Fall stetig veränderlicher isotroper Substanz ein Interesse.

Hier gilt nach Formel (152')

$$191)\qquad \mathfrak{i} = \mathfrak{l}(S - S^0), \quad \text{worin } S = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

ist und nach S. 283 $-S^0 = S'$ die Tangentialkomponente der räumlichen elektromotorischen Kraft darstellt; φ ist längs s einwertig und auch stetig, wenn von sprungweisen Änderungen der Substanz ganz abgesehen wird. Da nun die Stromstärke $I = \mathfrak{i}\, q$ längs des ganzen Leiters konstant ist, so erhält man durch Multiplikation mit $d s/\mathfrak{l}$ und Integration über den ganzen geschlossenen Kreis

$$191')\qquad I\int \frac{d s}{\mathfrak{l} q} = -\int S^0 d s.$$

Diese Formel ist die Erweiterung von (189''') auf unseren allgemeineren Fall,

$$191'')\qquad \int \frac{d s}{\mathfrak{l} q} = W$$

ist nach (190) der Widerstand des ganzen Kreises,

$$191''')\qquad -\int S^0 d s = \int S' d s = L$$

das Linienintegral der auf ihm liegenden räumlichen elektromotorischen Kräfte, und es gilt wie früher

$$I W = L.$$

Beschränkt sich die Veränderlichkeit der Substanz auf die Zwischenschichten zwischen den homogenen Teilen des Leiterkreises und ist demgemäß nur in ihnen S' von Null verschieden, so wird

$$L = \sum \int S' d s = \mathsf{S}\, P_{hk},$$

wo jedes Integral der ersten Summe über eine solche Zwischenschicht zu erstrecken ist. Man gewinnt dann die Formel (189''') für einen aus homogenen Teilen bestehenden Leiterkreis zurück. —

Wir wenden uns nun zu der Theorie der galvanischen Strömung in einem **verzweigten System lineärer Leiter**. Unter diesem Namen verstehen wir eine Anzahl lineärer Leiter, die derartig verbunden sind, daß von einzelnen Punkten — den Knotenpunkten — mehr wie zwei ausgehen.

In den Knotenpunkten sollen dabei nur solche Leiter zusammentreffen, die dem VOLTA'schen Gesetz folgen, denn nur in diesem Falle kann man überhaupt von **Knotenpunkten** reden; im anderen

müßten die Teile, in welchen die verschiedenen Leiter zusammenhängen, als **körperlich** behandelt werden, da die Strömung dann von ihrer gegenseitigen Anordnung abhängig ist.

Der praktisch wichtigste Fall ist der, daß in den Knotenpunkten selbst keine Potentialsprünge stattfinden, und man kann den oben vorausgesetzten allgemeineren auf ihn zurückführen, indem man die Grenzpunkte heterogener Teile ein wenig von dem Knotenpunkt hinwegrückt, was auf den Verlauf der Ströme einen Einfluß nicht übt. Endlich darf man nach dem S. 308 Gesagten die zwischen zwei Knotenpunkten liegenden Zweige des Systemes auch dann noch nach den für rein lineäre Leiter geltenden Formeln behandeln, wenn in sie körperliche Leiter derartig eingeschaltet sind, daß sie nur je eine Zuleitungs- und eine Ableitungsstelle besitzen.

Zweige, die nur mit dem einen ihrer Enden mit dem System verbunden, mit dem anderen aber frei sind, führen keinen Strom und können deshalb außer Betracht bleiben.

Verstehen wir weiterhin unter (α), (β), (γ) . . . Knotenpunkte, so ist nach (189) für jeden Zweig des Systemes eine Gleichung von der Form

$$W_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha - \varphi_\beta + L_{\alpha\beta}$$

gültig. Da nach der Annahme in den Knotenpunkten keine Potentialsprünge liegen, so kann man aus jedem System derartiger Formeln

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \varphi_\alpha - \varphi_\beta + L_{\alpha\beta}, \\ W_{\beta\gamma} I_{\beta\gamma} &= \varphi_\beta - \varphi_\gamma + L_{\beta\gamma}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ W_{\omega\alpha} I_{\omega\alpha} &= \varphi_\omega - \varphi_\alpha + L_{\omega\alpha}, \end{aligned}$$

welche sich auf Zweige beziehen, die zusammen eine geschlossene Kurve darstellen, die Potentialwerte $\varphi_\alpha \dots \varphi_\omega$ eliminieren, indem man diese Formeln addiert. Das Resultat schreiben wir kurz

$$\mathfrak{S} I_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \mathfrak{S} L_{\mu\nu}, \tag{192}$$

indem wir mit μ und ν die Ordnungszahlen der Knotenpunkte bezeichnen, die in $\mathfrak{S}$ in der Reihenfolge zu nehmen sind, wie sie bei der Umkreisung getroffen worden; eine Gleichung dieser Art gilt für jeden innerhalb des Systemes zu bildenden geschlossenen Kreis.

Hierzu kommt eine zweite allgemeine Formel, die man erhält durch Anwendung der für den stationären Zustand charakteristischen Bedingung, daß für jedes Volumen die Summe aller Einströmungen verschwinden muß, auf ein Bereich, welches einen Knotenpunkt ent-

hält und durch Querschnitte durch alle von ihm ausgehenden lineären Leiter begrenzt ist. Sie lautet

192′) $$\sum_{\lambda} I_{\lambda\mu} = 0\,,$$

wobei die Summe über alle nach dem Knotenpunkt μ hingehenden Stromstärken unter Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen ist.

Diese Formeln heißen die KIRCHHOFF'schen Sätze[78]); bildet man sie für sämtliche mögliche Kreise und für sämtliche Knotenpunkte, so findet man sie nicht alle voneinander unabhängig; die unabhängigen genügen aber, um I für jeden Zweig zu berechnen. —

Eine andere Darstellung der Theorie für verzweigte lineäre Leiter, die sich durch Symmetrie vor der vorigen auszeichnet, rührt von MAXWELL her.[79]) Sie geht davon aus, daß alle Knotenpunkte $(\alpha), (\beta), \ldots$ mit einander verbunden sind und auch von außen gegebene Stromstärken I_α, I_β, ... zugeführt erhalten, die übrigens des vorausgesetzten stationären Zustandes wegen über alle Knotenpunkte summiert Null ergeben müssen.

Die Grundformeln des Problems sind nach (189) und (192′)

193) $$I_{\alpha\beta} = (\varphi_\alpha - \varphi_\beta + L_{\alpha\beta})\, D_{\alpha\beta}\,,$$

193′) $$I_\alpha = \sum_{\nu(\alpha)} I_{\alpha\nu}\,;$$

in der letzteren betrifft die Summe nach ν alle Knotenpunkte mit Ausnahme von (α).

Für Verbindungen, die in Wirklichkeit fehlen, ist $D_{\alpha\beta}$ gleich Null zu setzen, wodurch auch das entsprechende $I_{\alpha\beta}$ zum Verschwinden gebracht wird.

Setzt man in die letzte Gleichung $I_{\alpha\nu}$ aus der vorletzten ein und kürzt ab

193″) $$\sum_{\nu(\alpha)} D_{\alpha\nu} = -\, D_{\alpha\alpha}\,,$$

so erhält man

$$I_\alpha = \sum_{\nu(\alpha)} D_{\alpha\nu}\,(L_{\alpha\nu} - \varphi_\nu) - \varphi_\alpha\, D_{\alpha\alpha}\,,$$

oder auch

193‴) $$I_\alpha - \sum_{\nu(\alpha)} D_{\alpha\nu}\, L_{\alpha\nu} = -\sum_{\nu} \varphi_\nu\, D_{\alpha\nu}\,,$$

wo nun links nur gegebene Größen stehen.

Solcher Gleichungen giebt es soviel, als Knotenpunkte, aber wegen der Bedingung

$$\sum I_\alpha = 0$$

ist eine von ihnen die Folge der übrigen.

Die Gleichungen (193‴) reichen also nicht zur Berechnung aller φ_ν aus, wie dies nach dem S. 285 Gesagten begreiflich ist; denn

unsere Fundamentalbedingungen lassen in φ eine additive Konstante willkürlich. Indessen bedarf man auch zur Berechnung der eigentlich gesuchten Größen, der Stromstärken $I_{\alpha\beta}$, nach Formel (193) garnicht der absoluten, sondern nur der relativen Werte der φ_ν; man kann also für diesen Zweck φ für einen Knotenpunkt willkürlich gleich Null setzen und wird dann der Symmetrie halber die auf denselben Knotenpunkt bezogene Gleichung (193‴) bei der Berechnung ausschließen. —

Wir machen von dem Gesagten eine Anwendung auf die Theorie der sog. Wheatstone'schen Brücke[80]. Dieselbe stellt ein System von der behandelten Art dar mit vier Knotenpunkten (α), (β), (γ), (δ), die wir so in die Ecken eines Parallelogrammes gelegt denken wollen, daß sie in der angegebenen Reihenfolge bei einer positiven Umkreisung berührt werden. Die Seiten des Parallelogrammes sind durch lineäre Leiter gebildet, ebenso die Diagonale $(\beta\,\delta)$, die sogenannte Brücke; $(\alpha\,\gamma)$ fehlt, es ist also $D_{\alpha\gamma} = 0$. (α) und (γ) enthalten äußere Zuleitungen; wir setzen $I_\alpha = I$, $I_\gamma = -I$. In der Brücke $(\beta\,\delta)$ liege eine elektromotorische Kraft $L_{\beta\delta}$, auf allen anderen Zweigen nicht. φ_δ setzen wir gleich Null, haben also nach (193‴) die drei Gleichungen aufzustellen

$$\begin{aligned} -I &= \varphi_\alpha D_{\alpha\alpha} + \varphi_\beta D_{\alpha\beta}, \\ L_{\beta\delta} D_{\beta\delta} &= \varphi_\alpha D_{\beta\alpha} + \varphi_\beta D_{\beta\beta} + \varphi_\gamma D_{\beta\gamma}, \\ I &= \qquad\qquad\;\; \varphi_\beta D_{\gamma\beta} + \varphi_\gamma D_{\gamma\gamma}, \end{aligned}$$

worin ist

$$D_{\alpha\alpha} = -(D_{\alpha\beta} + D_{\alpha\delta}),\quad D_{\beta\beta} = -(D_{\beta\alpha} + D_{\beta\gamma} + D_{\beta\delta}),\quad D_{\gamma\gamma} = -(D_{\gamma\beta} + D_{\gamma\delta}).$$

Für die praktische Anwendung handelt es sich um die Bestimmung von

$$I_{\beta\delta} = (\varphi_\beta - \varphi_\delta + L_{\beta\delta})\, D_{\beta\delta},$$

also, da $\varphi_\delta = 0$ gesetzt und $L_{\beta\delta}$ gegeben ist, um die von φ_β. Hierfür erhält man leicht die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} I(D_{\gamma\gamma} D_{\beta\alpha} - D_{\alpha\alpha} D_{\beta\gamma}) + D_{\alpha\alpha} D_{\gamma\gamma} D_{\beta\delta} L_{\beta\delta} \\ = \varphi_\beta (D_{\alpha\alpha} D_{\beta\beta} D_{\gamma\gamma} - D_{\alpha\beta}^2 D_{\gamma\gamma} - D_{\beta\gamma}^2 D_{\alpha\alpha}), \end{aligned}\right\} \qquad 194)$$

welche somit die Lösung des gestellten Problemes liefert.

Ist in der Brücke keine elektromotorische Kraft $L_{\beta\delta}$ vorhanden, so verschwindet darin auch der Strom, wenn $\varphi_\beta = 0$ ist; die Bedingung hierfür lautet

$$D_{\alpha\alpha} D_{\beta\gamma} = D_{\gamma\gamma} D_{\beta\alpha},$$

oder nach Einsetzen der Werte von $D_{\alpha\alpha}$ und $D_{\gamma\gamma}$

194′) $D_{\alpha\delta} D_{\beta\gamma} = D_{\gamma\delta} D_{\beta\alpha}$ resp. $\frac{D_{\alpha\beta}}{D_{\alpha\delta}} = \frac{D_{\gamma\beta}}{D_{\gamma\delta}}$ und $\frac{W_{\alpha\beta}}{W_{\alpha\delta}} = \frac{W_{\gamma\beta}}{W_{\gamma\delta}}$,

was einen einfachen und anschaulichen Satz ausspricht. Sind zwei der Leitfähigkeiten oder Widerstände auf den vier Seiten des Parallelogrammes $(\alpha\beta\gamma\delta)$ bekannt und eine meßbar veränderlich, so kann man hiernach die vierte bestimmen, indem man durch die veränderliche den Strom in der Brücke zum Verschwinden bringt. Hierin liegt eine wichtige Methode zur Bestimmung von Leitfähigkeiten oder Widerständen.

Auf andere Anwendungen dieser Anordnung werden wir im folgenden Kapitel eingehen. —

Ist in der Brücke eine elektromotorische Kraft $L_{\beta\delta}$ vorhanden, so kann man bei genügend großem I trotzdem den Strom daselbst zum Verschwinden bringen. Die Bedingung hierfür ist nach (193) und weil φ_δ verschwindet: $\varphi_\beta = - L_{\beta\delta}$, so daß die Gleichung (194) liefert

$$I(D_{\gamma\gamma} D_{\beta\alpha} - D_{\alpha\alpha} D_{\beta\gamma})$$
$$= - L_{\beta\delta}\left(D_{\alpha\alpha} D_{\gamma\gamma}(D_{\beta\beta} + D_{\beta\delta}) - D_{\alpha\beta}^2 D_{\gamma\gamma} - D_{\beta\gamma}^2 D_{\alpha\alpha}\right),$$

oder nach Einsetzen der Werte (193″)

$$194'') \begin{cases} I(D_{\alpha\delta} D_{\gamma\beta} - D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta}) \\ \quad = + L_{\beta\delta}\left(D_{\alpha\beta} D_{\alpha\delta}(D_{\gamma\beta} + D_{\gamma\delta}) + D_{\gamma\beta} D_{\gamma\delta}(D_{\alpha\beta} + D_{\alpha\delta})\right). \end{cases}$$

Kennt man also die Leitfähigkeiten der vier Seiten des Parallelogrammes $(\alpha\beta\gamma\delta)$, und ist I gemessen, so kann man hierdurch $L_{\beta\delta}$ berechnen.

Die Formel (194″) vereinfacht sich sehr, wenn, wie meist bei der Anwendung, zwei der vier Leitfähigkeiten einander gleich gemacht sind; ist z. B. $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\gamma}$, so erhält man

194‴) $I(D_{\alpha\delta} - D_{\gamma\delta}) = L_{\beta\delta}\left(D_{\alpha\beta}(D_{\alpha\delta} + D_{\gamma\delta}) + 2 D_{\alpha\delta} D_{\gamma\delta}\right)$.

Da es galvanische Elemente giebt, deren elektromotorische Kraft sich allmählich ändert, wenn ein Strom hindurchgeht, so liegt ein besonderer Vorteil der Methode darin, daß in dem Zweig, der $L_{\beta\delta}$ enthält, bei der zu seiner Bestimmung gemachten Beobachtung kein Strom fließt. [81])

Auf andere Methoden zur Bestimmung von Widerständen und elektromotorischen Kräften einzugehen, liegt außerhalb des Planes dieses Buches; die vorstehenden gehören zu den wichtigsten und fügen sich als Beispiele der allgemeinen Maxwell'schen Theorie am natürlichsten der Entwickelung ein. —

Zum Schluß dieses Abschnittes mögen noch einige allgemeine Sätze über die Strömung in verzweigten linearen Systemen mitgeteilt werden, die sich leicht aus den allgemeinen Formeln (193''') ergeben.

Indem wir abgekürzt

$$I_\alpha - \sum_{\nu(\alpha)} L_{\alpha\nu} D_{\alpha\nu} = -H_\alpha \tag{195)}$$

setzen, nehmen sie die Gestalt an

$$H_\alpha = \sum_\nu \varphi_\nu D_{\alpha\nu}; \tag{195')}$$

die Summe ist über alle n Knotenpunkte zu nehmen, wobei indessen das auf den $n$ten bezügliche Glied durch Nullsetzen von φ_n zum Verschwinden gebracht ist; für α nehmen wir $1, 2, \ldots n-1$. Diese Gleichungen lassen sich nach φ_ν auflösen und geben

$$\varphi_\nu = \sum_\alpha H_\alpha M_{\nu\alpha}, \tag{195'')}$$

worin $M_{\nu\alpha}$ die konstanten Koefficienten des Gleichungssystemes bezeichnen.

Nun ist aber wegen $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$ auch

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}, \tag{195''')}$$

und diese Formel gestattet einige einfache Folgerungen.[82])

Es enthält nämlich H_α nach seiner Definition, mit anderen Gliedern subtraktiv verbunden, die dem Knotenpunkt (α) von außen zugeführte Strömung; es ist daher

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial I_\mu} = -M_{\nu\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial I_\nu}, \tag{195'''')}$$

was aussagt, daß der Potentialwert φ_ν im Knotenpunkt (ν) mit der dem Knotenpunkt (μ) von außen zugeführten Strömung I_μ ebenso wächst, wie φ_μ mit I_ν.

Mögen nun außer den Knotenpunkten (μ) und (ν) noch die zwei (α) und (β) betrachtet werden, und zwar unter der Voraussetzung, daß

$$I_\alpha = -I_\mu, \quad I_\beta = -I_\nu$$

ist. Dann gilt auch

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial I_\alpha} = -M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial I_\beta},$$

und durch Kombination mit (195'''') folgt

$$\frac{\partial(\varphi_\nu - \varphi_\beta)}{\partial I_\mu} = -(M_{\nu\mu} + M_{\alpha\beta}) = \frac{\partial(\varphi_\mu - \varphi_\alpha)}{\partial I_\nu},$$

ein Satz, der eine besondere Bedeutung gewinnt, wenn elektromotorische Kräfte in dem System nicht wirken, und die Zuleitungen I_α und I_μ resp. I_β und I_ν je die einzigen vorhandenen sind; hier reduziert er sich nämlich auf

$$\frac{\varphi_\nu - \varphi_\beta}{I_\mu} = \frac{\varphi_\mu - \varphi_\alpha}{I_\nu}. —$$

Ferner enthält H_α nach (195) das Aggregat $\Sigma_{\nu(\alpha)} L_{\alpha\nu} D_{\alpha\nu}$; liegt also nur in dem einen Zweige $(\beta\gamma)$ eine elektromotorische Kraft L, so ist H_α gleich Null, wenn α weder gleich β noch gleich γ ist; dagegen ist es gleich $L_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}$ für $\alpha = \beta$, und gleich $L_{\gamma\beta} D_{\gamma\beta} = - L_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}$ für $\alpha = \gamma$.

Daher wird nun auch

$$\varphi_\mu = - \Sigma I_\alpha M_{\mu\alpha} + L_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}(M_{\mu\beta} - M_{\mu\gamma})$$
$$\varphi_\nu = - \Sigma I_\alpha M_{\nu\alpha} + L_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}(M_{\nu\beta} - M_{\nu\gamma}),$$

und wenn man von äußeren Zuleitungen absieht, also alle I_α gleich Null setzt, so folgt hieraus

$$\varphi_\mu - \varphi_\nu = L_{\beta\gamma} D_{\beta\gamma}(M_{\mu\beta} - M_{\mu\gamma} - M_{\nu\beta} + M_{\nu\gamma}).$$

Vertauscht man hierin μ und β, ν und γ, so folgt auch

$$\varphi_\beta - \varphi_\gamma = L_{\mu\nu} D_{\mu\nu}(M_{\beta\mu} - M_{\beta\nu} - M_{\gamma\mu} + M_{\gamma\nu}),$$

oder, da bei fehlendem $L_{\mu\nu}$

$$D_{\mu\nu}(\varphi_\mu - \varphi_\nu) = I_{\mu\nu},$$

bei fehlendem $L_{\beta\gamma}$

$$D_{\beta\gamma}(\varphi_\beta - \varphi_\gamma) = I_{\beta\gamma} \text{ ist,}$$

$$\frac{I_{\mu\nu}}{L_{\beta\gamma}} = \frac{I_{\beta\gamma}}{L_{\mu\nu}}.$$

Diese Formel sagt aus, daß in dem äußerer Zuleitung baaren System eine elektromotorische Kraft $L_{\beta\gamma}$ in $(\mu\nu)$ einen Strom erregt, der proportional ist dem durch $L_{\mu\nu}$ in $(\beta\gamma)$ erregten; ist $L_{\beta\gamma} = L_{\mu\nu}$, so sind beide Ströme identisch.

Erregt speziell $L_{\beta\gamma}$ keinen Strom in $(\mu\nu)$, so auch $L_{\mu\nu}$ keinen in $(\beta\gamma)$.

§ 33. Die elektrische Arbeit an einem stromdurchflossenen Körper. Die JOULE-, PELTIER-, THOMSON-Wärmen.

Die allein aus den Beobachtungen gewonnenen Grundformeln (177) für die wahren Stromkomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, nämlich

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}_{11}(X - X^0) + \mathfrak{l}_{12}(Y - Y^0) + \mathfrak{l}_{13}(Z - Z^0), \tag{196}$$

. . . .

gestatten in Verbindung mit den Bedingungen (177') bis (177'''), diese Größen als die Quantitäten einer imponderabeln Flüssigkeitsmenge aufzufassen, welche in der Zeiteinheit durch eine Kraft K mit den Komponenten X, Y, Z entgegen einer Gegenkraft K^0 mit den Komponenten X^0, Y^0, Z^0 in einem Widerstand leistenden Medium parallel den Koordinatenaxen durch die Flächeneinheit verschoben werden, und wir haben von dieser Auffassung bereits wiederholt Gebrauch gemacht.

Wenn wir diese Vorstellung festhalten, so gewinnt der Ausdruck

$$\alpha_1' = \mathfrak{u} X_1 + \mathfrak{v} Y_1 + \mathfrak{w} Z_1 \tag{196'}$$

die Bedeutung der von einer in dem Leitersystem wirkenden elektrischen Kraft K_1 an der Volumeneinheit der Flüssigkeit während der Zeiteinheit geleisteten Arbeit und ist als solche, wie schon auf S. 299 beiläufig benutzt, eine Skalargröße, d. h. vom Koordinatensystem unabhängig.

Hierbei ist zu bemerken, daß die Formel (196'), auf dasselbe Flüssigkeitsquantum bezogen, nur für ein Zeitelement anwendbar ist; denn im nächsten Zeitmoment hat das Quantum eine andere Position erreicht, wo die Komponenten der Kraft K_1, wie der Stromdichte $\mathfrak{i}$ andere Werte besitzen. Dagegen gestattet sie bei stationären Vorgängen die Anwendung auf beliebig lange Zeiten, wenn man sie auf alle nacheinander in demselben Volumen befindlichen Flüssigkeitsquanta bezieht; in diesem Sinne genommen kann man dann α_1' als die von K_1 in der Volumeneinheit des Leiters während der Zeiteinheit an der strömenden Flüssigkeit geleistete Arbeit auffassen.

Es mag indessen hervorgehoben werden, daß diese Deutung von α_1' keineswegs zwingend ist, wie sich durch Heranziehung der schon wiederholt in ähnlichem Sinne verwerteten Analogie zwischen einem elektrischen und einem Wärmestrom klarstellen läßt. Auch im Gebiet der Wärmelehre gelten nach Bd. I, S. 551 Formeln von der Gestalt (196); $(X - X^0), \ldots$ sind hier ersetzt durch die Temperatur-

gefälle $\partial\tau/\partial x, \ldots$ nach den Koordinatenaxen; die Temperatur τ nimmt also nahezu die Stelle des elektrischen Potentiales φ ein. Man kann demgemäß auch in jenem Gebiet eine Funktion α_1' gemäß (196') bilden; sie besitzt hier indessen nicht die Bedeutung der Arbeit, welche an der strömenden Flüssigkeit geleistet wird, ja diese Strömung erfordert überhaupt keinen Arbeitsaufwand. Demgemäß ist auch die Deutung des Ausdruckes (196') in unserem Gebiete zunächst hypothetisch; sie wird nahegelegt durch den Umstand, daß nach (154) und (155'') α_1' wirklich die Dimension einer auf die Zeit- und Volumeneinheit bezogenen Arbeit hat, insofern gilt

196'') $$[\alpha'] = m\,l^{-1}\,t^3,$$

und sie läßt sich rechtfertigen durch die Übereinstimmung der theoretischen Folgerungen, die wir aus ihr ziehen werden, mit der Erfahrung. Eine in mancher Hinsicht noch vollständigere Begründung werden wir im nächsten Kapitel gewinnen, wo wir zeigen werden, daß unter Umständen eine mechanisch geleistete Arbeit von dem Betrage α_1' den Strom von der Dichte $\mathfrak{i}$ zu erhalten vermag.

Dem Arbeitsaufwand der ganzen bei der Strömung wirksamen Kraft K pro Volumeneinheit, nämlich

196''') $$\alpha' = \mathfrak{u}X + \mathfrak{v}Y + \mathfrak{w}Z,$$

entspricht für ein beliebiges Bereich k eines Leitersystemes der Aufwand A', gegeben durch

197) $$A' = \int \alpha'\,dk = \int (\mathfrak{u}X + \mathfrak{v}Y + \mathfrak{w}Z)\,dk.$$

Hierin wollen wir, um den Ausdruck möglichst weitgehend anwenden zu können, in früher benutzter Weise das physikalische Verhalten, und somit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, X, Y, Z$ innerhalb des ganzen Systemes als stetig veränderlich annehmen.

Denken wir die Formel (197) zunächst auf ein Stück eines Stromfadens angewandt, dessen Querschnitt mit q, dessen Axe mit s bezeichnet werden mag, und dessen konstante Stromstärke $\mathfrak{i}q = i$ gesetzt werde, so ergiebt sie

$$A' = \int \mathfrak{i}\,S\,q\,ds = i\int S\,ds;$$

das Vorzeichen von A' hängt also hier ausschließlich von dem des Integrales $\int S\,ds$ ab.

Da $S = -\partial\varphi/\partial s$ ist, unter φ die elektrische Potentialfunktion verstanden, und da φ bei allen bisher behandelten Fällen einwertig ist, nämlich sich als die Wirkung einer elektrostatischen Verteilung darstellt, so ist $\int S\,ds = L$, über den ganzen Stromfaden integriert,

gleich Null, es muß sonach jederzeit Bereiche geben, innerhalb deren S negativ ist.

Diese liegen innerhalb isotroper Systeme jedenfalls nicht da, wo der Stromfaden in einem homogenen Teil verläuft, denn dort gilt nach (151′) $i = \mathfrak{l}\, q S$, es ist also mit i notwendig S positiv; dagegen befinden sie sich innerhalb inhomogener Teile, speziell in den Übergangsschichten zwischen homogenen Stücken, denn dort gilt nach (152′) $i = \mathfrak{l}\, q (S - S^0)$, und das Vorzeichen von S folgt aus

$$S = \frac{i}{q\,\mathfrak{l}} + S^0,$$

ist also bei negativem S^0 und somit positivem S' von einer bestimmten Größe desselben an jedenfalls auch negativ.

Hieraus ergiebt sich, daß in den homogenen Teilen die Wirkung des elektrischen Potentiales die allein treibende Ursache darstellt, daß dieselbe aber in inhomogenen Teilen unter Umständen geradezu verzögernd wirkt, nämlich dann, wenn die räumlichen elektromotorischen Kräfte K', die von dem Strome unabhängig sind, für sich allein eine größere Stromstärke bewirken würden, als in den homogenen Teilen des Stromfadens stattfindet. Letzteres gilt in den Zwischenschichten jederzeit, wenn dort die flächenhaften elektromotorischen Kräfte einen positiven Potentialsprung veranlassen. —

Die in dem Volumenelement andauernd geleistete Arbeit (197) kommt dem als bewegt gedachten Fluidum nicht zu Gute, da dasselbe nach den Grundformeln (196) sich als imponderabel darstellt, also eine endliche kinetische Energie nicht anzunehmen vermag. Die nächstliegende, aber nicht die einzig mögliche Annahme ist die, daß diese Arbeit der ponderabeln Materie zugeführt wird, die dasselbe Volumenelement erfüllt. Die elektrische Strömung in einem homogenen Medium würde hierdurch in eine Analogie treten zu dem Bd. I, S. 544 behandelten Durchgang einer Flüssigkeit durch einen porösen Pfropfen, falls man dort die Bewegung so langsam annimmt, daß die ihr entsprechende kinetische Energie vernachlässigt werden kann; auch dort wird zunächst die Arbeit an der Flüssigkeit geleistet und kommt schließlich doch dem ruhenden, Widerstand leistenden Mittel zu Gute.

Indem wir aber diese Anschauung einführen und α' weiterhin als die an der Volumeneinheit des Leiters geleistete Arbeit auffassen, betonen wir nochmals das Hypothetische dieser Deutung. Man kann eine Stütze derselben suchen in folgender Überlegung.

Sei ein Konduktor von der Kapacität C gegeben, der durch die Ladung $\mathfrak{E}$ auf das Potential P gebracht ist, und der hinlänglich weit

von der Erdoberfläche entfernt ist, um die Wechselwirkung zwischen Erde und Konduktor zu ignorieren; es ist dann die elektrische Energie $E = \frac{1}{2}\mathfrak{E}P = \frac{1}{2}CP^2$. Nun werde durch einen dünnen Draht das Element der Ladung $d\mathfrak{E}$ zur Erde abgeführt; es ändert sich dann E um $dE = CPdP = Pd\mathfrak{E}$. Geschieht diese Ableitung stetig während dt, so ist $-d\mathfrak{E}/dt = i$, d. h. gleich der Stromstärke, mit welcher die Elektricität abströmt, und es wird

$$\frac{dE}{dt} = -iP,$$

worin P als die Potentialdifferenz zwischen Konduktor und Erde aufgefaßt werden kann. Nimmt man an, daß dieser Verlust an elektrischer Energie durch eine Abgabe derselben an den Verbindungsdraht bewirkt wird, so kommt man dazu, letzterem einen Gewinn an Energie im Betrage iP zuzusprechen, — ein Wert, der mit dem obigen $i\int S ds$ übereinstimmt, wenn man berücksichtigt, daß $S = -\partial\varphi/\partial s$ ist, und φ längs s von P bis Null abnimmt.

Indessen ist diese theoretische Begründung offenbar nicht zwingend, und auch die allgemeinen Untersuchungen des folgenden Kapitels, so sehr sie auf diese Vorgänge ein neues Licht werfen, stellen die Zulässigkeit der eingeführten Deutung nicht vollkommen fest. Um so mehr Bedeutung gewinnt die experimentelle Prüfung der auf sie gegründeten theoretischen Resultate. —

Wir kehren nunmehr zu der allgemeinen Formel (197) zurück, die uns jetzt die an einem beliebigen Bereich k des Leitersystemes geleistete Arbeit bestimmt, setzen darin für X, Y, Z ihre Ausdrücke durch die Potentialfunktion φ und erhalten nach einmaliger teilweiser Integration unter Berücksichtigung der Bedingung (177') des stationären Zustandes

197') $$A' = \int \overline{\mathfrak{n}\varphi}\, do;$$

hierin bezeichnet $\mathfrak{n}$ die Komponente der Stromdichte $\mathfrak{i}$ nach der inneren Normalen auf do.

Von dieser Formel machen wir drei spezielle Anwendungen.

Erstens wählen wir für k einen ganz innerhalb eines homogenen Körpers liegenden Teil, der außer durch Flächen, welche von Stromlinien erfüllt sind, wie z. B. die äußere Oberfläche des ganzen Systemes, nur noch durch zwei Flächen konstanter Potentialfunktion $\varphi = \varphi_\alpha$ und $\varphi = \varphi_\beta$ begrenzt ist; bezeichnen wir dann die durch erstere Fläche eintretende Stromstärke $\int \overline{\mathfrak{n}}_\alpha do_\alpha$ mit $I_{\alpha\beta}$, so ergiebt sich wegen $\int \overline{\mathfrak{n}}_\beta do_\beta = -I_{\alpha\beta}$

197'') $$A_k' = I_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha - \varphi_\beta).$$

Zweitens wählen wir für k eine unendlich dünne, über eine Zwischengrenze o_{hi} konstruierte Schicht und erhalten, falls $\mathfrak{n}_{hi}$ die von (h) nach (i) gerechnete normale Stromdichte ist,

$$A'_{hi} = -\int \mathfrak{n}_{hi} P_{hi} \, d o_{hi},$$

also, wenn die beiden Teile (h) und (i) homogen sind, und I_{hi} die durch o_{hi} gehende Stromstärke bezeichnet,

$$A'_{hi} = -P_{hi} I_{hi}. \tag{197'''}$$

Endlich erstrecken wir k über das ganze Leitersystem und finden

$$A' = 0. - \tag{197''''}$$

Wenn, wie vorausgesetzt, A' eine an der ponderabeln Materie innerhalb k geleistete Arbeit ist, so bietet sich die Frage einerseits nach ihrer Herkunft, andererseits nach ihrem Verbleib. Zu ihrer Beantwortung ziehen wir die allgemeine Energiegleichung heran, welche lautet

$$dE = d'A + d'\Omega, \tag{198}$$

und in welcher unter E die Energie des Systemes, unter $d'A$ und $d'\Omega$ die von ihm, — etwa während dt — aufgenommene Arbeit und mechanisch gemessene Wärme verstanden ist; ihre Anwendung auf die Zeiteinheit ergiebt

$$\frac{dE}{dt} = A' + \Omega', \tag{198'}$$

und zwar sind hier A' und Ω' in demselben Sinne zu verstehen, wie oben A'.

Auf die Volumeneinheit angewandt geben beide in verständlicher Bezeichnung

$$d\varepsilon = d'\alpha + d'\omega \tag{198''}$$

und

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha' + \omega'. \tag{198'''}$$

Diese Formeln bilden den Ausgangspunkt für die folgenden Entwickelungen.

Wir ziehen aus ihnen zunächst eine allgemeine Folgerung.

Für jede Veränderung eines Teiles k des Systemes Σ, welche die Energie dieses Teiles ungeändert läßt, muß gelten

$$A' + \Omega' = 0, \tag{199}$$

d. h., es muß ein der aufgenommenen Arbeit A' gleicher Betrag $-\Omega'$ an mechanisch gemessener Wärme frei, resp. ein der auf-

genommenen Wärme Ω' gleicher Betrag $-A'$ an Arbeit gewonnen werden.

Die Anwendung dieses Satzes bietet in unserem Falle insofern eine Schwierigkeit, als nur das Experiment darüber entscheiden kann, unter welchen Umständen der Zustand des Teiles k bei durchgehendem elektrischen Strome sich mit der Zeit nicht ändert. Die Erfahrung zeigt nun vollkommen unzweideutig, daß innerhalb der sogenannten Leiter zweiter Klasse, die nach S. 21 dadurch charakterisiert sind, daß sie das Volta'sche Spannungsgesetz nicht befolgen, der Strom dauernde Veränderungen bewirkt, auch wenn man ihre Temperatur konstant erhält; diese Leiter werden durch den elektrischen Strom chemisch zerlegt, und die Zersetzungsprodukte erscheinen an den Austritts- und Eintrittsflächen des Stromes. Solche Körper sind also von vornherein von der Anwendung der Formel (199) ausgeschlossen; höchstens können von ihnen Volumina in Betracht kommen, welche ganz im Innern eines homogenen Teiles liegen.

Leiter erster Klasse zeigen derartige chemische Veränderungen nicht; es ist daher von vornherein wahrscheinlich, daß bei konstant erhaltener Temperatur die Energie jedes Volumenelementes auch bei andauernder Strömung konstant bleibt. Nehmen wir dies vorläufig hypothetisch an, so ergiebt sich für jedes Volumenelement eines homogenen Körpers die Beziehung

199′) $$\mathfrak{u}X + \mathfrak{v}Y + \mathfrak{w}Z = -\omega';$$

für ein zwischen zwei Potentialflächen $\varphi = \varphi_\alpha$ und $\varphi = \varphi_\beta$ liegendes Stück $k_{\alpha\beta}$ ergiebt sich nach (197″)

199″) $$I_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha - \varphi_\beta) = -\Omega'_k,$$

und spezieller, wenn $k_{\alpha\beta}$ homogen ist, bei Heranziehung der Definition (181″) des Widerstandes $W_{\alpha\beta}$

199‴) $$I^2_{\alpha\beta}\, W_{\alpha\beta} = -\Omega'_k;$$

ferner folgt, wenn $k_{\alpha\beta}$ einen Teil der Grenzschicht zwischen zwei Körpern (h) und (i) darstellt, aus (197‴)

199⁗) $$I_{hi}P_{hi} = +\Omega'_{hi}.$$

Dagegen ergiebt sich aus (197⁗) für ein jedes ganz aus Leitern erster Klasse bestehende System $\Omega' = 0$.

Das erste dieser Gesetze ist von Joule aus Beobachtungen geschlossen[83]; es findet sich bei Leitern erster Klasse sehr vollständig bestätigt, wenn dieselben in ihrer ganzen Ausdehnung gleich tem-

periert sind, stimmt aber nicht mehr genau mit der Erfahrung, wenn längs des untersuchten Stückes die Temperatur variiert.

Dem zweiten Gesetze entspricht qualitativ eine von Peltier entdeckte Wärmeerzeugung in den Zwischengrenzen eines Leitersystemes; eine quantitative Übereinstimmung hat sich aber nur bei vereinzelten Kombinationen (h, i) von Leitern erster Klasse ergeben.[84]) —

Es bietet sich nunmehr die Frage einerseits nach dem Grunde für die Abweichungen zwischen der Erfahrung und den Formeln (199‴) und (199⁗), und andererseits nach den Gesetzen, die den Thatsachen wirklich entsprechen. Da die direkt und am sichersten beobachtbare Größe die bei konstanter Temperatur frei werdende Wärmemenge ist, und da sich keinerlei sonstige Veränderungen an den Leitern erster Klasse zeigen, so ergiebt die Betrachtung der Formeln (198) bis (198″) nur zwei Möglichkeiten der Erklärung: entweder ist der Ausdruck (196‴) für die Arbeit α' nicht allgemein richtig, oder es existiert noch eine weitere Art, die Energie eines Körpers zu vermehren, als die durch Zuführung von Arbeit und Wärme.

Wir wollen die letztgenannte Auffassung näher verfolgen, da sie ein allgemeines Interesse bietet und, wie wir sehen werden, die bezüglichen Erscheinungen in einer anschaulichen und wahrscheinlichen Weise deutet. Überdies erscheint der Ausdruck (196‴) für α' so naturgemäß, daß es bedenklich scheint, ihn ohne zwingende Gründe fallen zu lassen.

Da von einer anderen Energieform, als den in den Formeln schon aufgenommenen der Wärme und des Elektromagnetismus, die Beobachtung nichts nachweist, so werden wir am wenigsten von der direkten Wahrnehmung abweichen, wenn wir einer dieser Energien selbst eine Beweglichkeit, eine Strömung innerhalb des Leiters zusprechen. Bezeichnen wir dann den der Volumeneinheit durch eine Art von Leitung zugeführten Energiebetrag durch $d'\beta$, so tritt an Stelle von (198′) die Gleichung

$$d\varepsilon = d'\alpha + d'\beta + d'\omega . \qquad 200)$$

Fassen wir aber, wie gesagt, $d'\beta$ als das Resultat einer Energieströmung auf, so muß es die Form eines vollständigen Differentiales $d\beta$ einer Funktion β haben, welche die räumliche Dichte der strömenden Energie bedeutet. Wir können die letzte Formel sonach schreiben

$$d(\varepsilon - \beta) = d'\alpha + d'\omega , \qquad 200')$$

und erhalten somit eine Beziehung, die sich von der Energiegleichung (198′) nur dadurch unterscheidet, daß ε mit $\varepsilon - \beta$ ver-

tauscht ist. Dieselbe giebt in unserem Falle des stationären Zustandes, wo ε konstant ist,

200″) $$-d\beta = d'\alpha + d'\omega,$$

und bei Beziehung auf die Zeiteinheit

200‴) $$-\frac{\partial \beta}{\partial t} = \alpha' + \omega'.$$

Weitere Folgerungen kann man aus dieser Formel ohne eine neue Hypothese nicht ziehen. Eine solche giebt die Beobachtung an die Hand, daß, während in einem homogenen Leiter erster Klasse von konstanter Temperatur die gesamte frei werdende Wärme von der Richtung des Stromes unabhängig ist, in einem inhomogenen oder ungleich temperierten ein Anteil sein Vorzeichen mit der Stromrichtung umkehrt. Es liegt somit nahe, anzunehmen, daß die mit der Energieströmung verbundene Erscheinung jenen thermodynamisch umkehrbaren Vorgang darstellt, der sich über den nicht umkehrbaren lagert.[85])

In diesem Falle nimmt dann nach Bd. I, S. 515 $d'\omega$ die Form $T d\eta$ an, worin η die Entropie der Volumeneinheit bezeichnet, und die Formel (200″) erhält die Gestalt

200⁗) $$-d\beta = d'\alpha + T d\eta.$$

Wir wollen uns nun einen umkehrbaren, stationären, elektrischen Strömungsvorgang denken, der sonach bei konstanter Temperatur T und bei einer konstanten Kraft, deren Komponenten jetzt X', Y', Z' heißen mögen, verläuft, und wollen in stetiger Folge auf ihn elektrische und kalorische Einwirkungen ausüben, kraft deren aus dem gegebenen ein anderer gleichfalls stationärer Zustand entsteht. Die Formel (200⁗) wird hierauf angewendet, indem wir sie bei konstantem X, Y, Z, T nach der Zeit differentiieren. Wir erhalten dadurch

201) $$-d\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) = d'\alpha' + T d\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right),$$

wobei offenbar

$$d'\alpha' = X' d\mathfrak{u} + Y' d\mathfrak{v} + Z' d\mathfrak{w}$$

die Veränderung der in der Zeiteinheit zugeführten Arbeit

201′) $$\alpha' = \mathfrak{u} X' + \mathfrak{v} Y' + \mathfrak{w} Z',$$

und $d(\partial \beta / \partial t)$, $d(\partial \eta / \partial t)$ die Änderungen der Geschwindigkeiten von β und η gegenüber den bei dem gegebenen Vorgang stattfindenden bezeichnen.

Schreibt man die Formel (201)

$$d\xi' = -d\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + T\frac{\partial \eta}{\partial t}\right) = X' d\mathfrak{u} + Y' d\mathfrak{v} + Z' d\mathfrak{w} - \frac{\partial \eta}{\partial t} dT, \qquad 201'')$$

worin ξ' eine Abkürzung ist, so tritt ξ' in vollständige Analogie zu der in § 6 des III. Teiles und später benutzten freien Energie ξ_1 der Volumeneinheit; denn es gilt

$$X' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}}, \quad Y' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}}, \quad Z' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \xi'}{\partial T}. \qquad 201''')$$

Diese Gleichungen würden Aufschluß geben über umkehrbare thermisch-elektrische Umsetzungen, die von der Temperatur selbst abhängen. Sie versagen aber, wenn jene Vorgänge wesentlich durch die Temperaturgefälle bestimmt werden, wie dies in unserem Falle nach der Beobachtung stattfindet und schon S. 323 erwähnt ist.

Nehmen wir nämlich ξ' als Funktion von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, T, \partial T/\partial x = T_x$, $\partial T/\partial y = T_y$, $\partial T/\partial z = T_z$ an, so wird

$$\left.\begin{aligned} d\xi' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}} d\mathfrak{u} + \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}} d\mathfrak{v} + \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}} d\mathfrak{w} \\ + \frac{\partial \xi'}{\partial T} dT + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x} dT_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y} dT_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z} dT_z, \end{aligned}\right\} \qquad 201'''')$$

und die Form der rechten Seite weicht ab von derjenigen in Gleichung (201'').

Man kann indessen die Übereinstimmung wiederherstellen, wenn man die Formel (201'') statt auf die Volumeneinheit auf ein beliebiges Volumen k anwendet und die Annahme macht, daß nicht nur dem Innern von k, sondern auch seiner Oberfläche eine Entropie eignet. Man erhält so zunächst statt (201'')

$$\int (d\xi')\, dk = \int \left(X' d\mathfrak{u} + Y' d\mathfrak{v} + Z' d\mathfrak{w} - \frac{\partial \eta_v}{\partial t} dT\right) dk - \int \left(\frac{\partial \eta_o}{\partial t} \overline{dT}\right) do,$$

und wenn man links den Wert (201'''') einsetzt und durch teilweise Integration die drei letzten Glieder umformt,

$$\begin{aligned} \int (d\xi')\, dk = \int \Bigg[\Bigg(& \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}} d\mathfrak{u} + \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}} d\mathfrak{v} + \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}} d\mathfrak{w} \\ & + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_z}\right)\right) dT \Bigg] dk \\ & - \int \left[\left(\overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}} \cos(n,x) + \overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_y}} \cos(n,y) + \overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_z}} \cos(n,z)\right) \overline{dT}\right] do. \end{aligned}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck für $\int (d\xi') dk$, in dem n die innere Normale auf do bezeichnet, mit dem vorhergehenden, so findet man

$$
202)\quad \left\{
\begin{aligned}
& X' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}}, \quad Y' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}}, \quad Z' = \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}}, \\
& \frac{\partial \eta_v}{\partial t} = -\frac{\partial \xi'}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_z}\right), \\
& \frac{\partial \eta_o}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}} \cos(n, x) + \overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_y}} \cos(n, y) + \overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_z}} \cos(n, z).
\end{aligned}
\right.
$$

Was die ersten dieser Resultate, die für X', Y', Z' gefundenen Ausdrücke betrifft, so stellen sie, wie schon früher bemerkt, die Kraftkomponenten dar, welche zur Erhaltung des umkehrbaren Strömungsvorganges erforderlich sind. Ihnen entsprechen auf den Temperaturverhältnissen beruhende Gegenkräfte von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung. Setzen wir demgemäß

$$
202')\qquad X_T^0 = -\frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}}, \quad Y_T^0 = -\frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}}, \quad Z_T^0 = -\frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}},
$$

so stellen diese Ausdrücke Teile der allgemeinen, in den Formeln (196) auftretenden X^0, Y^0, Z^0 dar, und X', Y', Z' sind daher als die Komponenten der räumlichen thermo-elektromotorischen Kräfte aufzufassen, die in dem System wirken.

Was ferner die gefundenen Formeln für die Entropien angeht, so bemerken wir, daß die flächenhafte Entropie η_o mit der Richtung der Normalen n ihr Vorzeichen wechselt. Es hat dies die Bedeutung, daß die beiden Seiten der Grenzfläche o_{hi} zwischen zwei Bereichen k_h und k_i die entgegengesetzte Entropie besitzen, die Fläche o_{hi} im ganzen also überhaupt keine trägt; dies muß in der That so stattfinden, da die Begrenzungen o_{hi} völlig willkürlich vorgeschrieben werden können, und somit keine singulären physikalischen Eigenschaften besitzen dürfen; sie sind nur eingeführt, um das Problem in eine Gestalt zu bringen, welche die Anwendung früherer Prinzipien in einem Falle ermöglicht, der ohne diesen Kunstgriff ihrer Anwendung widerstrebt.

Der flächenhaften und räumlichen Entropie entspricht nun eine flächenhafte und räumliche Wärmeaufnahme; erstere wird pro Flächeneinheit durch $\overline{T}\partial \eta_o / \partial t$, letztere pro Volumeneinheit durch $T\partial \eta_v / \partial t$ gegeben sein, und wir erkennen, daß die Summen der in einer Grenze o_{hi} aufgenommenen Wärmen ebenso verschwinden, wie die der daselbst vorhandenen Entropien.

Da nach der vorstehenden Entwickelung für die Betrachtung die eine Seite der Oberfläche untrennbar mit dem umschlossenen Volumen verbunden zu behandeln ist, so wird die von k im ganzen aufgenommene Wärme gegeben sein durch

$$\Omega' = \int \frac{\partial \eta_v}{\partial t} T\, d k + \int \frac{\partial \eta_o}{\partial t} \overline{T}\, d o$$
$$= -\int \left(\frac{\partial \xi'}{\partial T} T + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x} T_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y} T_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z} T_z\right) d k;$$

sie läßt sich auf die Volumeneinheit beziehen, und man erhält dann

$$\omega' = -\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T} T + \frac{\partial \xi'}{\partial T_x} T_x + \frac{\partial \xi'}{\partial T_y} T_y + \frac{\partial \xi'}{\partial T_z} T_z\right). — \qquad 202'')$$

Die bisherige Betrachtungsweise versagt, wenn längs einer Fläche o_{hi} das Temperaturgefälle unstetig wird, wie dies z. B. immer dann stattfindet, wenn diese Fläche die Grenze zwischen Körpern von verschiedenem thermischen Verhalten bildet. Hier werden T_x, T_y, T_z unbestimmt, und es läßt sich daher für eine solche Fläche gar keine Funktion ξ' angeben.

Wir können aber die Fläche durch zwei ihr unendlich nahe einschließen und annehmen, daß in der so gebildeten unendlich feinen Schicht η_v endlich bleibt; es wird dann die räumliche Wärmeaufnahme verschwindend klein und bleibt nur die flächenhafte übrig, die auf die Flächeneinheit bezogen ergiebt

$$\omega'_{hi} = \overline{T}\left[\left(\overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}} \cos(n, x) + \ldots\right)_h + \left(\overline{\frac{\partial \xi'}{\partial T_x}} \cos(n, x) + \ldots\right)_i\right]; \quad 202''')$$

hierin bedeutet n, wie leicht zu übersehen, die äufsere Normale auf dem durch den Index h resp. i bezeichneten Teil.

Auch die Ausdrücke für die Komponenten X', Y', Z' der thermoelektromotorischen Kräfte werden in der eben betrachteten Unstetigkeitsfläche unbestimmt; indessen ist dies ohne Belang, da die eintretende elektrische Strömung ja nur von dem Linienintegral der elektrischen Kraft über die ganze Stromlinie abhängt, und hierauf der innerhalb der Fläche unbestimmt werdende Anteil verschwindenden Einfluß übt; ein endlicher Einfluß könnte nur dann eintreten, wenn die Kraft in der Grenzfläche unendlich würde, und dazu liegt eine Veranlassung nicht vor, da die Temperaturgefälle dort nicht unendlich, sondern nur unbestimmt werden. —

Die erhaltenen Formeln wenden wir nun an auf den denkbar einfachsten Fall, daß ξ' die Gestalt einer bilineären Funktion der Argumente $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und T_x, T_y, T_z hat, welche die Symmetrie eines isotropen Körpers besitzt. Eine solche Funktion ist gegeben durch

$$\xi' = \Theta'(\mathfrak{u}\, T_x + \mathfrak{v}\, T_y + \mathfrak{w}\, T_z) = \Theta'\left(\mathfrak{u}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial T}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial T}{\partial z}\right), \qquad 203)$$

worin Θ' eine Funktion der Temperatur bezeichnet, die im Falle eines inhomogenen Körpers auch noch die Koordinaten direkt enthalten wird; wir wollen setzen

$$\Theta' = \frac{\partial \Theta}{\partial T},$$

wo dann Θ analoge Eigenschaften hat, wie Θ'.

Wegen des oben Gesagten reduziert sich der Ausdruck für $\mathfrak{k}'$ innerhalb eines homogenen Körpers auf

203′) $$\mathfrak{k}' = \mathfrak{u}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Für die Komponenten der räumlichen thermo-elektrischen Gegenkräfte folgt bei Kombination von (203) mit (202′) allgemein

203″) $$X_T^0 = -\Theta'\frac{\partial T}{\partial x}, \quad Y_T^0 = -\Theta'\frac{\partial T}{\partial y}, \quad Z_T^0 = -\Theta'\frac{\partial T}{\partial z};$$

ihre Resultante K_T^0 liegt sonach normal zu den Oberflächen konstanter Temperatur. In homogenen Körpern wird noch einfacher

203‴) $$X_T^0 = -\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad Y_T^0 = -\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad Z_T^0 = -\frac{\partial \Theta}{\partial z}.$$

Setzt man diese Werte in die Formeln (152″) für isotrope Körper ein und versteht unter X^0, Y^0, Z^0 die Komponenten einer Gegenkraft K^0 nicht thermischen Ursprungs, so erhält man

$$\mathfrak{u} = -\mathfrak{l}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \Theta'\frac{\partial T}{\partial x} + X^0\right).$$

. . . .

Wendet man dies auf einen Stromfaden an, dessen Axe durch s, dessen Querschnitt durch q, dessen Stromdichte parallel s durch $\mathfrak{i}$ bezeichnet werde, so folgt

$$\mathfrak{i} = -\mathfrak{l}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \Theta'\frac{\partial T}{\partial s} + S^0\right),$$

wobei S^0, wie früher, die Komponente von K^0 nach der Richtung von s bezeichnet, und bei Multiplikation mit $ds/\mathfrak{l}$ und Integration über die geschlossene Kurve s, wobei φ aus der Formel verschwindet,

$$i\int\frac{ds}{\mathfrak{l}q} = \int\Theta'\frac{\partial T}{\partial s}ds - \int S^0 ds;$$

hierin ist die Stromstärke $\mathfrak{i}q = i$ gesetzt.

Das letzte Integral hat nach (191‴) die Bedeutung der Summe L der elektromotorischen Kräfte nicht thermischen Ursprunges, der Faktor von i hat die Bedeutung des Widerstandes w des Stromfadens; das erste Glied rechts nimmt in dem wichtigsten Falle, daß das System aus einer Reihe homogener Körper zusammengesetzt ist, die Gestalt $\mathsf{S}(\overline{\Theta}_h - \overline{\Theta}_i)$ an, wobei die Summe über alle von s pas-

sierten Grenzflächen o_{hi} zwischen zwei homogenen Teilen (h) und (i) zu nehmen und die Richtung des Durchganges von (h) nach (i) gerechnet ist. Hiernach erhält man bei Benutzung der Definition (191''')

$$i w = \mathsf{S}(\bar{\Theta}_h - \bar{\Theta}_i) + L;$$

der Strom findet also ebenso statt, als wenn in jeder Grenze o_{hi} eine flächenhafte thermo-elektromotorische Kraft

$$P_{hi} = \bar{\Theta}_h - \bar{\Theta}_i \tag{203''''}$$

wirksam wäre. Das Gesetz, nach welchem sich die Temperatur längs der in homogenen Teilen des Leitersystemes verlaufenden Strecken von s ändert, fällt aus dem Resultat heraus; letzteres erscheint ausschließlich von den in den Zwischengrenzen stattfindenden Temperaturen abhängig. —

Gehen wir nun zur Bestimmung der räumlich aufgenommenen Wärmemengen über, so ergiebt die Formel (202''), die innerhalb stetig veränderlicher Teile des Systemes gültig ist, für den Wert (203) von $\mathfrak{g}'$ nach einer einfachen Reduktion

$$\omega' = -\frac{\partial T \Theta'}{\partial T}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial T}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial T}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{204}$$

Wenden wir sie auf einen homogenen Körper an, was den allein wichtigen Fall darstellt, so folgt aus ihr

$$\omega' = -\left(\mathfrak{u}\frac{\partial T \Theta'}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial T \Theta'}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial T \Theta'}{\partial z}\right). \tag{204'}$$

Dieser Ausdruck läßt sich in zwei Teile ω_1' und ω_2' von verschiedener Bedeutung zerlegen, deren Werte gegeben sind durch

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= -\left(\mathfrak{u}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right),\\ \omega_2' &= -T\left(\mathfrak{u}\frac{\partial \Theta'}{\partial x} + \mathfrak{v}\frac{\partial \Theta'}{\partial y} + \mathfrak{w}\frac{\partial \Theta'}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{204''}$$

Vergleicht man ω_1' mit der Formel (201') für α' unter Berücksichtigung von (203'''), so erkennt man, daß

$$-\omega_1' = \alpha'$$

ist; $-\omega_1'$ stellt also nach (199) in unserem Falle allein die Kompensation der in dem Volumenelement bei der Überwindung der thermoelektrischen Gegenkraft geleisteten Arbeit dar; es hat durchaus den Charakter einer Joule'schen Wärme, kehrt aber mit dem Vorzeichen von $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ das seinige um, weil die Komponenten X_T^0, Y_T^0, Z_T^0 von demselben unabhängig sind. Dagegen bildet die frei werdende Wärme $-\omega_2'$ nicht die Kompensation für einen sich in demselben

Volumenelement abspielenden Vorgang, sie hat also den Charakter jener oben eingeführten, in das Volumen einströmenden Energie; ja sie ist damit identisch, denn aus der Beziehung (200‴)

$$-\frac{\partial \beta}{\partial t} = \alpha' + \omega_1' + \omega_2'$$

folgt wegen

$$\alpha' + \omega_1' = 0$$

sogleich

$$-\omega_2' = \frac{\partial \beta}{\partial t}.$$

Es hindert also nichts, den Energiestrom direkt als einen Wärmestrom aufzufassen, der nicht infolge der thermischen Leitfähigkeit, sondern ganz unabhängig von dieser infolge des elektrischen Stromes auftritt.

Dies wird noch anschaulicher, wenn man $\partial\beta/\partial t$ unter Benutzung der für stationäre Strömungen geltenden Bedingung (177′) auf die Form bringt

204‴) $$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -\omega_2' = -\left(\frac{\partial \mathfrak{u} P}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v} P}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w} P}{\partial z}\right),$$

worin

$$P = \Theta - T\Theta';$$

hier stellen sich also $\mathfrak{u}P$, $\mathfrak{v}P$, $\mathfrak{w}P$ als die Komponenten des Energiestromes dar, dessen Richtung sich der des elektrischen Stromes parallel und dessen Stärke sich dem Produkt $\mathfrak{i}P$ gleich ergiebt.

Daß eine solche scheinbare Mitführung der Wärme durch den elektrischen Strom eintritt, ist zuerst von W. Thomson aus allgemeinen thermodynamischen Grundsätzen geschlossen und nachher auch durch die Beobachtung bestätigt worden.[86] —

Für die Wärmeaufnahme in der Grenze verschiedener Körper liefert die Kombination der Gleichungen (202‴) und (203) den Ausdruck

205) $$\omega_{hi}' = \overline{T}(\overline{\Theta}_h' \overline{\mathfrak{n}}_h + \overline{\Theta}_i' \overline{\mathfrak{n}}_i),$$

worin $\mathfrak{n}_h$ und $\mathfrak{n}_i$ die Komponenten der elektrischen Strömung nach den äußeren Normalen bezeichnen. Da dieselben nach (177″) entgegengesetzt gleiche Werte besitzen, so können wir das obige Resultat bei Einführung der von (h) nach (i) gerichteten Strömungskomponente

$$\mathfrak{n}_{hi} = -\overline{\mathfrak{n}}_i = +\overline{\mathfrak{n}}_h$$

auch schreiben

205′) $$\omega_{hi}' = \overline{T}\mathfrak{n}_{hi}(\overline{\Theta}_h' - \overline{\Theta}_i').$$

Vergleicht man dies Resultat mit (203⁗) und benutzt die Bedeutung von Θ', so erhält man

$$\omega'_{hi} = \mathfrak{n}_{hi} \overline{T} \frac{\partial P_{hi}}{\partial T}, \tag{205''}$$

oder wenn man berücksichtigt, daß in der Grenze noch eine von der Temperatur unabhängige elektromotorische Kraft Q_{hi} wirken kann, auch

$$\omega'_{hi} = \mathfrak{n}_{hi} \overline{T} \frac{\partial (P_{hi} + Q_{hi})}{\partial T}; \tag{205'''}$$

ω'_{hi} ist also der Änderung der ganzen in o_{hi} wirkenden elektromotorischen Kraft mit der Temperatur proportional. Auch dieses Gesetz ist von W. Thomson angegeben.[87]) —

Für alle erhaltenen Erscheinungen ist die Funktion Θ maßgebend, die in den Gleichungen (203'''') und (205') nur für zwei verschiedene Medien kombiniert, in (204') aber für ein einzelnes genommen auftritt. Die Beobachtung der Abhängigkeit der Thomson-Wärme von der Temperatur würde also ihre experimentelle Bestimmung gestatten.

Von Interesse ist der spezielle Fall, daß Θ eine lineäre Funktion ist. Hier wird P gleich Null, die Thomson-Wärme verschwindet, und die in der Zwischengrenze o_{hi} aufgenommene Wärme ω'_{hi} erhält den Wert

$$\omega'_{hi} = \mathfrak{n}_{hi} P_{hi},$$

wird also mit dem der thermo-elektromotorischen Kraft P_{hi} entsprechenden Anteil an der Peltier-Wärme identisch.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß aus den Werten (204') und (205) bei Summation über das ganze System sich ergiebt

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \int \omega'_2 \, d k_k + \Sigma' \int \omega'_{hi} \, d o_{hi} &= \Sigma \int \alpha'_k \, d k_k, \\ \Sigma \int \frac{\omega'_2 \, d k_k}{T} + \Sigma' \int \frac{\omega'_{hi}}{\overline{T}} \, d o_{hi} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{205''''}$$

wobei die Summe Σ über alle homogenen Teile (k), die Summe Σ' über alle Grenzflächen (h, i) zwischen zwei dergleichen zu erstrecken ist.

Diese beiden Formeln gestatten eine interessante Deutung. Die erste sagt aus, daß der Überschuß aller vom System aufgenommenen Wärmen von den Gattungen ω'_2 und ω'_{hi} über alle abgegebenen den Wert der von den Kräften X', Y', Z' geleisteten Arbeit hat, die zweite, daß dieser Überschuß faktisch in jene Arbeit umgesetzt wird. In der That stimmt die letztere Formel mit der Bd. I, S. 506 für einen umkehrbaren Kreisprozeß abgeleiteten Bedingung (9'') formal vollständig überein; der einzige Unterschied liegt darin, daß in der

früheren Formel derselbe Körper nacheinander die verschiedenen Temperaturen T besaß und die betreffenden Wärmen aufnahm, während jetzt gleichzeitig verschiedene Teile desselben Körpers verschiedene Temperaturen besitzen und verschiedene Aufnahmen vollziehen; indessen ist dieser Unterschied sehr wahrscheinlich ohne wesentliche Bedeutung.

Adoptiert man daher die entwickelte Deutung, so ergiebt sich durch die Formeln (205'''') der S. 321 verlangte Nachweis über die Herkunft der in einem System von homogenen und verschieden temperierten Leitern erster Klasse dauernd verbrauchten Arbeit. Denn dieser Betrag ist, da die elektromotorischen Kräfte Q_{hi}, als mit dem Volta'schen Gesetz im Einklang, keinen Anteil liefern, nach Formel (197''') in der That gleich $\Sigma' \int P_{hi} \mathfrak{n}_{hi} \, d o_{hi}$, und mit diesem Wert stimmt überein der in Arbeit verwandelte Betrag von Wärme. —

Bei krystallinischen Leitern treten, wenn in ihnen ein Temperaturgefälle und ein elektrischer Strom zusammenwirken, außer jenem Thomson-Effekt noch andere spezifische Erscheinungen auf. Um die Verhältnisse nicht zu sehr zu komplizieren, wollen wir für ihre theoretische Ableitung $\mathfrak{E}'$ als nur von T_x, T_y, T_z, nicht aber von T selbst abhängig annehmen; damit wird das Auftreten der Thomson-Wärme ausgeschlossen, was um so mehr geschehen kann, als dieselbe bei Krystallen noch nicht beobachtet worden ist.

Die Erweiterung des Ausdruckes (203) auf krystallinische Medien wird unter dieser Voraussetzung liefern

$$206) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}' = (n_{11}\,\mathfrak{u} + n_{12}\,\mathfrak{v} + n_{13}\,\mathfrak{w})\,T_x + (n_{21}\,\mathfrak{u} + n_{22}\,\mathfrak{v} + n_{23}\,\mathfrak{w})\,T_y \\ + (n_{31}\,\mathfrak{u} + n_{32}\,\mathfrak{v} + n_{33}\,\mathfrak{w})\,T_z, \end{aligned} \right.$$

worin die n_{hk} Konstanten bezeichnen. Da $\mathfrak{E}'$ eine Skalargröße darstellt, und sowohl $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ einerseits, als T_x, T_y, T_z andererseits Vektorkomponenten sind, so spezialisiert sich dieser Ansatz auf die verschiedenen Krystallgruppen gemäß dem Schema II in Bd. I, S. 137.

Für die thermo-elektrischen Gegenkräfte ergiebt die Anwendung der Beziehungen (202')

$$206') \qquad X_T^0 = -(n_{11}\,T_x + n_{21}\,T_y + n_{31}\,T_z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots ;$$

diese Werte unterscheiden sich nur dadurch von den in (203''') für isotrope Körper angegebenen, daß ihre Resultierende nicht mehr normal zu den Oberflächen $T = \text{Const.}$ steht. Für die körperlich aufgenommene Wärme erhält man nach (202'')

$$\omega' = -\xi' = -\alpha';$$

dieselbe hat durchaus den Charakter der JOULE'schen Wärme. Für die flächenhafte Wärmeaufnahme liefert die Formel (202‴)

$$\left.\begin{aligned} \omega'_{hi} = \overline{T}\Big[&\big((n_{11}\overline{\mathfrak{u}} + n_{12}\overline{\mathfrak{v}} + n_{13}\overline{\mathfrak{w}})_h \cos(n_h, x) + \ldots\big) \\ &+ \big((n_{11}\overline{\mathfrak{u}} + n_{12}\overline{\mathfrak{v}} + n_{13}\overline{\mathfrak{w}})_i \cos(n_i, x) + \ldots\big)\Big]; \end{aligned}\right\} \quad 206'')$$

ist das Medium (*i*) ein Nichtleiter oder speciell der leere Raum, so verschwindet das zweite Glied der Klammer, aber das erste bleibt übrig, trotzdem an der Grenze

$$\mathfrak{u}_h \cos(n_h, x) + \mathfrak{v}_h \cos(n_h, y) + \mathfrak{w}_h \cos(n_h, z) = 0$$

ist. Dies spricht eine neue, spezifisch krystall-physikalische Erscheinung aus: Das Auftreten einer Art von PELTIER-Wärme in einer Fläche, die vom Strom nicht durchsetzt wird, sondern längs deren er nur hinfließt.

Ist die Grenzfläche der *XY*-Ebene parallel, somit $\overline{\mathfrak{w}}$ an derselben verschwindend, so erhält man spezieller

$$\omega'_{hi} = \pm\,\overline{T}(n_{31}\overline{\mathfrak{u}} + n_{32}\overline{\mathfrak{v}})_h.$$

Auch diese Gesetze sind zuerst von W. THOMSON angegeben worden.[88])

Man kann die letzteren Resultate auf den Fall übertragen, daß der betrachtete Körper nicht von Natur krystallinisch ist, sondern nur infolge auf ihn ausgeübter äußerer Einwirkungen seine Isotropie verloren hat. Unter letzteren interessiert besonders die Wirkung eines magnetischen Feldes, da sichere Beobachtungen darüber vorliegen, daß in einem solchen bei gewissen Körpern durch ein Temperaturgefälle eine elektromotorische Kraft, durch einen elektrischen Strom eine Wärmebewegung erregt wird.[89])

Bezeichnet man die Komponenten der magnetischen Feldstärke mit *A*, *B*, *C* und versteht unter *h* eine Konstante, so stellt

$$\xi' = h\big((\mathfrak{v}C - \mathfrak{w}B)\,T_x + (\mathfrak{w}A - \mathfrak{u}C)\,T_y + (\mathfrak{u}B - \mathfrak{v}A)\,T_z\big)$$

eine Funktion dar, welche der Symmetrie eines ursprünglich isotropen Körpers entspricht, sich als ein spezieller Fall des Ansatzes (206) auffassen läßt und Vorgänge der beschriebenen Art ausdrückt.

Man kann auch das Vorzeichen von *h* so bestimmen, daß der Sinn der einen Erregung mit der Beobachtung übereinstimmt; es gilt dies dann aber im allgemeinen nicht zugleich für den Sinn der anderen, reciproken, und man hat hieraus zu schließen, daß die erwähnten

Erscheinungen komplizierter sind, als die zuvor bei Krystallen behandelten. Insbesondere dürfte bei ihnen sich geltend machen, daß das magnetische Feld im Innern des betrachteten Körpers durch den hindurchgeschickten Strom beeinflußt wird, und weiter, daß die Gesetze der Elektricitäts- und Wärmeleitung, wie S. 301 und 304 erörtert, sich im Magnetfeld verändern.

§ 34. Die elektrolytische Leitung. Die elektromotorische Gesamtkraft in umkehrbaren Ketten. Diffusion und elektromotorische Kräfte innerhalb der Lösung eines Elektrolyten und in ihrer Grenzfläche nach einem Leiter erster Klasse.

Alle die in den früheren Abschnitten dieses Kapitels angestellten Untersuchungen nahmen auf die Eigenschaften der Leiter zweiter Klasse nur insoweit Rücksicht, als sie benutzten, daß dieselben weder untereinander, noch in Verbindung mit Leitern erster Klasse das VOLTA'sche Spannungsgesetz befolgen. Die hiermit offenbar in Verbindung stehende weitere Eigenschaft, daß sie die Elektricitätsleitung in ganz anderer Weise bewirken, als die Leiter erster Klasse, nämlich indem sie eine Zersetzung in gewisse chemische Komponenten erleiden, ist nur beiläufig gestreift worden. In der That liegen die hierauf beruhenden Erscheinungen gewissermaßen abseits von dem Wege, den wir in diesem Kapitel verfolgt haben, und besitzen auch verhältnismäßig wenig Wechselbeziehungen zu den sonst hier behandelten Vorgängen; es möge demgemäß genügen, jetzt am Schluß der die stationären Strömungen behandelnden Entwickelungen nur das wichtigste aus diesem Gebiet beizubringen.

Die Grundthatsache, von der wir auszugehen haben, ist die soeben erwähnte, daß bei Leitern zweiter Klasse die Leitung der Elektricität stets mit einem Transport von Materie verbunden ist; die Leitung findet demgemäß in erheblicher Stärke nur im flüssigen oder wenigstens durch Temperatursteigerung erweichten Zustande statt. Führt man den elektrischen Strom der leitenden Flüssigkeit durch eine Metallmasse, eine Elektrode zu, durch eine andere ab, so erscheint an der einen der eine, an der anderen der andere Bestandteil der gelösten oder verflüssigten Substanz, die sogenannten Ionen des Elektrolyten; durch sekundäre chemische Wirkungen derselben auf die Elektroden oder auf das Lösungsmittel können die Substanzen der letzteren dabei noch in Mitleidenschaft gezogen werden.

Für das Verständnis des Vorganges ist es dabei von fundamentaler Wichtigkeit, daß gemäß der Beobachtung die Elektricitäts-

leitung der Elektrolyte nicht etwa erst bei bestimmten Größen der treibenden elektrischen Kräfte, sondern auch bei beliebig schwachen in proportionaler Stärke einsetzt, überhaupt, abgesehen von singulären Vorgängen an der Eintritts- und Austrittsstelle des Stromes, den einfachen Gleichungen (182) für isotrope Leiter folgt.

Man darf hieraus schließen, daß die Wirkung des elektrischen Feldes nicht in einer Überwindung der chemischen Kräfte zwischen den Komponenten des Elektrolyten besteht, die nach sonstigen Anzeichen, auf die wir unten kommen werden, vielmehr sehr beträchtliche Größen besitzen, sondern daß in den leitenden Flüssigkeiten, zu denen insbesondere die wässerigen Lösungen von Salzen und Säuren gehören, mindestens bei einem Teil des Elektrolyten, jene Kräfte bereits durch andere Ursachen, über deren Mechanismus sichere Vorstellungen bisher fehlen, außer Thätigkeit getreten sind, sodaß die Komponenten sich im freien Zustande befinden.[90]) Diesen Vorgang bezeichnet man als elektrolytische Dissociation, da er in Parallele steht zu der Teil III, § 15 besprochenen chemischen Dissociation, die in nichtleitenden Lösungen und Dämpfen stattfindet; er gestattet demgemäß auch eine ähnliche theoretische Behandlung, wie sie dort gezeigt ist. Die Dissociation findet sich hiernach und im Einklang mit der Erfahrung um so vollständiger realisiert, je verdünnter die Lösung des Elektrolyten ist, und die Untersuchung stark verdünnter Lösungen hat denn auch die besonders einfachen Gesetze geliefert, von denen weiter zu sprechen sein wird.

Aber die elektrolytische Dissociation unterscheidet sich doch auch wesentlich von der chemischen, einmal dadurch, daß die Komponenten, in welche sie einen bestimmten zusammengesetzten Körper zerlegt, andere sind, als die, welche derselbe im vergasten Zustande bei steigender Temperatur oder in einer nicht leitenden Lösung bei steigender Verdünnung liefert; sodann und besonders dadurch, daß, während die Zersetzungsprodukte bei der chemischen Dissociation allem Anschein nach elektrisch neutral sind, dieselben bei der elektrolytischen Dissociation, um die Erscheinungen erklären zu können, als elektrisch geladen gedacht werden müssen.

Wir wollen diese letztere Vorstellung näher entwickeln, dabei aber absehen von der Erörterung der an sich gewiß wichtigen Frage, wie es zu verstehen ist, daß Körper, die sich unter gewöhnlichen Bedingungen elektrisch neutral verhalten, in der Lösung eines Elektrolyten mit sehr starken elektrischen Ladungen, und zwar mit der gleichen in allen ihren Teilen auftreten. Die Versuche, mit

Hilfe spezieller Vorstellungen ein solches Verhalten zu deuten, sind noch nicht zu befriedigenden Resultaten gelangt und fallen jedenfalls außerhalb des Rahmens dieser Darstellung, welche spezielle Hypothesen nach Möglichkeit vermeidet.

Betrachten wir ein Grammolekül einer Verbindung, die, z. B. in einer sehr verdünnten wässerigen Lösung, vollständig dissociiert ist, so entstehen aus ihm gewisse Mengen der Ionen, die im allgemeinen Vielfache von deren Grammolekülen sein werden, da nicht notwendig die aus einem Molekül des Elektrolyten entstandenen Ionen je nur ein Molekül, bez. Atom, bilden. Die Ionen (1) und (2) tragen dann gewisse elektrische Ladungen E_1 und E_2, und es muß offenbar gelten, weil die ursprüngliche Verbindung neutral war,

$$E_1 + E_2 = 0 .$$

Sind vom Ion (h) n_h Grammoleküle entstanden, so sind die Ladungen e_h der einzelnen gegeben durch

$$n_h e_h = E_h .$$

Es ist aber zu bemerken, daß auch die spezifische Ladung e_h eines Grammoleküles dem bestimmten Ion nicht unter allen Umständen individuell ist, sondern stets nur dann, wenn es aus gleichartigen Verbindungen abgeschieden wird; im anderen Falle kann e_h verschieden sein. Auch hierin liegt für die Vorstellung eine Schwierigkeit, die noch nicht beseitigt ist.

Da sich indessen die Ionen in ganz- und kleinzahligen Verhältnissen zu neutralen Verbindungen vereinigen, so müssen in allen Elektrolyten ganz allgemein die spezifischen Ladungen e_h, wie auch die E_h, in ganz- und kleinzahligen Verhältnissen stehen. —

Wird nun ein dissociierter Elektrolyt der Wirkung eines elektrischen Feldes ausgesetzt, so setzen sich seine kleinsten Teile innerhalb des Lösungsmittels parallel den elektrischen Kraftlinien in Bewegung; da aber die Beobachtung für diese Bewegung bei konstanter Feldstärke keine beschleunigte, sondern eine konstante Geschwindigkeit nachweist, so muß dieselbe gegen eine starke Widerstandskraft der Bd. I, S. 289 besprochenen Natur stattfinden, die man als eine Reibung der bewegten Ionen gegen das Lösungsmittel und eventuell die unzerlegten Teile des Elektrolyten deuten kann. Die Bewegung der Ionen findet ihr Ziel an den Elektroden, deren Grenzen nach der Flüssigkeit hin, wie S. 293 gesagt, angenähert als Potentialflächen betrachtet werden können. Lagern sich die Ionen hier ab, ohne weitere Veränderungen zu erleiden, was einen in mancher Hinsicht besonders einfachen Fall repräsentiert,

so binden die an ihnen haftenden Ladungen gleiche und entgegengesetzte Elektricitäten innerhalb der Elektroden, und die frei gewordenen gleichnamigen Ladungen stellen innerhalb deren Schließung einen Strom dar, dessen Stärke I nach (155) durch die Beziehung

$$I = \frac{de}{dt}$$

gemessen wird, wenn de die algebraische Summe der in der Zeit dt durch jeden Querschnitt gehenden Ladungen bezeichnet, und dabei die Ladungen, die in der Richtung ihres Vorzeichens wandern, positiv, die übrigen negativ gerechnet werden.

Die in diesem Falle auf der Oberfläche der Elektroden entstehende Doppelschicht kommt in Wegfall, wenn das daselbst erscheinende Ion mit der Substanz der Elektrode oder mit dem Lösungsmittel eine chemische Verbindung eingeht, die dann eine elektrisch neutrale Substanz liefert.

Diese Vorstellung wird gestützt durch die von Faraday festgestellten Erfahrungsthatsachen, daß an den beiden Elektroden derselben Zersetzungszelle korrespondierende Mengen der Ionen auftreten, daß diese Mengen der Stromstärke und der Dauer ihrer Wirksamkeit proportional sind, und daß an den Elektroden einer Reihe hintereinander geschalteter Zersetzungszellen, welche ähnlich konstituierte Elektrolyte enthalten, in derselben Zeit durch einen Strom chemisch äquivalente Mengen der Ionen ausgeschieden werden.[91])

Sind die Elektrolyte verschieden konstituiert, so werden die in den verschiedenen Zellen ausgefällten Ionenmengen nach dem S. 336 Gesagten zwar immer noch elektrisch äquivalent sein müssen, aber nicht unter allen Umständen auch chemisch.

Beiläufig werde bemerkt, daß man auf die Proportionalität der in gleichen Zeiten abgeschiedenen Menge eines Ions aus einem bestimmten Elektrolyten mit der Stromstärke in leicht ersichtlicher Weise eine Methode zur experimentellen Bestimmung der letzteren gründen kann. Die zur Ausführung solcher Messungen konstruierten Instrumente nennt man Voltameter. —

Wir wollen nun näher auf den Mechanismus der Elektricitätsbewegung in einem Elektrolyten eingehen und setzen hierbei zunächst den einfachsten Fall voraus, daß die abgeschiedenen Ionen nicht auf die Substanz der Elektroden oder das Lösungsmittel wirken. Bezeichnen wir die mit dem positiven Ion in positiver Richtung durch die Querschnittseinheit in der Zeiteinheit geführte positive Ladung — d. h. die durch das positive Ion bewirkte Stromdichte — mit $\mathfrak{i}_1$, die analoge Größe für das negative Ion durch $\mathfrak{i}_2$, wobei beide

Größen auf die Richtung der Feldstärke K bezogen werden mögen, so ergiebt sich

207) $$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{l}_1 K, \quad \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{l}_2 K,$$

wobei $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ die im allgemeinen von einander verschiedenen Leitfähigkeitskonstanten für die beiden Ionen bezeichnen. Da

207′) $$\mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{i}$$

nach der Definition die resultierende Stromdichte bezeichnet, so kann man statt (207) auch schreiben

207″) $$\mathfrak{i}_1 = \frac{\mathfrak{l}_1 \mathfrak{i}}{\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2}, \quad \mathfrak{i}_2 = \frac{\mathfrak{l}_2 \mathfrak{i}}{\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2}.$$

Nun ist aber die Elektricität an die ponderable Masse der Ionen gebunden, und demgemäß ihre Bewegung nur mit einer Bewegung ponderabler Masse möglich. Bezeichnet m_h diejenige ponderable Masse des Ions (h), welche die absolute elektrische Ladung Eins trägt, so wird, wenn wir die auf die Richtung der Kraft K bezogenen Strömungskomponenten j_h der Ionen einführen,

208) $$j_1 = m_1 \mathfrak{i}_1 = \mathfrak{l}_1 m_1 K, \quad j_2 = -m_2 \mathfrak{i}_2 = -\mathfrak{l}_2 m_2 K;$$

das negative Ion (2) geht in einer der Kraft K entgegengesetzten Richtung, und dem entspricht das negative Zeichen in der zweiten Formel.

Die Konstanten m_h gestatten die Bestimmung mit Hilfe der Beobachtung. Denn wenn auf der Flächeneinheit einer Elektrode während der Zeiteinheit die Masse M_h des Ions (h) abgeschieden wird, so gilt nach dem Faraday'schen Gesetz

208′) $$M_h = \mathfrak{i}\, m_h.$$

In der That ist diese Menge erforderlich, um in der Zeiteinheit auf den beiden Elektroden die gesamten Ladungen $\pm \int \mathfrak{i}\, dq = \pm I$ frei werden zu lassen, deren Ausgleich eine Stromstärke I außerhalb des Elektrolyten verlangt; bezeichnet b einen echten Bruch, so kann dann dieser Strom darin bestehen, daß während der Zeiteinheit $b\,I$ in positiver, $-(1-b)\,I$ in negativer Richtung fließt.

Die Beobachtung von M_h hat nun zu dem Resultate geführt, daß die Größen m_h für alle Ionen überaus klein sind, daß also nach den entwickelten Vorstellungen jede meßbare Menge eines Ions eine ganz ungeheure elektrische Ladung trägt. Da der Strom von 1 Ampère in einer Stunde 4,025 g Silber abscheidet, und da dieser Strom nach S. 229 u. f. im wissenschaftlichen Maßsystem die Stärke $0{,}1/v$ hat, so ergiebt sich der Wert des dem Silber entsprechenden

m gleich $0{,}0112/v = 0{,}37 \cdot 10^{-12}$; ähnliche Größen finden sich für andere Körper.

Wir schließen hieraus, daß es unmöglich ist, wägbare Mengen eines geladenen Ions zu isolieren; dieses Resultat ist von großer prinzipieller Bedeutung für die Anwendungen der oben erörterten Vorstellungen.

Die in (208) und (208') ausgesprochenen Resultate geben Veranlassung zu einer merkwürdigen und wichtigen Folgerung.

Die Masse M_h des Ions (h), welche sich in der Zeiteinheit auf der Flächeneinheit der Elektrode (h) abscheidet, setzt sich aus zwei verschiedenartigen Teilen zusammen. Nur der Bruchteil $j_h = \mathfrak{i}_h m_h$ wird nach (208) durch die elektrische Zuführung geliefert; der Teil $(\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_h) m_h$ muß also der benachbarten Lösung entnommen werden. Da gleichzeitig eine die Ladung $(\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_h)$ tragende Masse des anderen Ions durch den elektrischen Strom nach der anderen Elektrode geführt wird, so verschwindet aus der Umgebung der betrachteten Elektrode (h) in der Zeiteinheit pro Flächeneinheit eine die Ladung $\pm(\mathfrak{i} - \mathfrak{i}_h)$ tragende Masse des ganzen Elektrolyten; demnach speziell an der positiven Elektrode (1), wo das Ion (1) ausgeschieden wird, die Masse mit der Ladung $\pm \mathfrak{i}_2$, an der negativen (2) die mit der Ladung $\pm \mathfrak{i}_1$.

Hieraus folgt, daß in dem vorausgesetzten Falle an beiden Elektroden eine Abnahme der Konzentration der Lösung eintritt, die verschieden sein muß, wenn die Leitungsfähigkeiten $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ verschieden sind. Ihre Beobachtung gestattet nach (207'') einen Rückschluß auf die Werte der Verhältnisse

$$\mathfrak{n}_1 = \frac{\mathfrak{l}_1}{\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2}, \quad \mathfrak{n}_2 = \frac{\mathfrak{l}_2}{\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2}, \tag{208''}$$

die man nach Hittorf, dem man die Untersuchung dieser Verhältnisse verdankt, die Überführungszahlen der Ionen nennt.[92])

Da die Summation der beiden Formeln (207) unter Rücksicht auf (207') die Beziehung

$$\mathfrak{i} = (\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2) K \tag{209}$$

ergiebt, so ist

$$\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l} \tag{209'}$$

die spezifische Leitfähigkeit des Elektrolyten, worin sich ein einfaches Gesetz ausspricht. Für dessen Vergleichung mit der Beobachtung ist wohl zu beachten, daß die Größen $\mathfrak{l}_h$ nicht den Ionen allgemein individuelle Konstanten darstellen, sondern, wie das die ganze Darstellung erkennen läßt, wesentlich von dem Grade der Konzentration und der Dissociation abhängen.

Nimmt man an, daß die Widerstandskraft, welche der Bewegung der Ionen entgegenwirkt, ganz überwiegend von dem Lösungsmittel herrührt, und daß der Einfluß des unzerlegten Elektrolyten, wie der freien Ionen hierbei vernachlässigt werden kann, so ergeben sich die $\mathfrak{l}_h$ mit der Masse des dissociierten Elektrolyten in der Volumeneinheit proportional. Bezeichnet ν die Anzahl der Grammmoleküle des Elektrolyten in der Volumeneinheit der Lösung und β den dissociierten Bruchteil, so wird man hiernach setzen können

209″) $$\mathfrak{l}_h = \beta \nu \mathfrak{l}_h^0, \quad \lambda_h = \frac{\mathfrak{l}_h}{\nu} = \beta \mathfrak{l}_h^0,$$

wobei $\mathfrak{l}_h^0$ nunmehr eine dem Ion (h) individuelle Konstante bezeichnet, und λ_h den Namen des molekularen Leitungsvermögens trägt. Wegen (209′) gilt dann auch

209‴) $$\mathfrak{l} = \beta \nu \mathfrak{l}^0, \quad \lambda = \beta \mathfrak{l}^0.$$

Bei sehr stark verdünnten Lösungen ist die Dissociation merklich vollständig, β also gleich Eins; hier wird $\mathfrak{l}$ einfach der Konzentration ν proportional, wie dies die Beobachtungen von F. Kohlrausch in der That gezeigt haben.[93])

Bezeichnet man den dem Grenzfall verschwindender Konzentration entsprechenden Wert von λ_h durch λ_h^0, so wird dies mit $\mathfrak{l}_h^0$ identisch sein; daher gilt

$$\lambda^0 = \lambda_1^0 + \lambda_2^0,$$

und bei Benutzung von (208″) auch

$$n_h^0 = \frac{\lambda_h^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0};$$

es ist daher möglich, durch die Beobachtung der Leitfähigkeit λ^0 und des Verhältnisses der Überführungszahlen die einzelnen λ_h^0 zu bestimmen.[94])

Daß die für sie gefundenen Zahlwerte sich von der Verbindung, in welcher das Ion (h) auftritt, bis zu einem gewissen Grade unabhängig ergeben, dient zur Stütze der auseinander gesetzten Auffassung. —

Über die Abhängigkeit des Dissociationsgrades β von der Verdünnung geben die Resultate von § 15 des III. Teiles Aufschluß.

Verstehen wir wieder unter ν die Anzahl Grammoleküle des Elektrolyten in der Volumeneinheit, unter ν_0 die der unzerlegten hiervon, unter ν_1 und ν_2 die der Ionen, endlich unter ν' diejenige des Lösungsmittels, und entstehen aus α_0 Grammolekülen des Elektrolyten α_1 und α_2 der beiden Ionen, so ergiebt die Formel (111″) auf S. 598 des I. Bandes unter Rücksicht auf das S. 602 über verdünnte Lösungen Gesagte, daß

$$\frac{\nu_1^{\alpha_1}\,\nu_2^{\alpha_2}}{\nu_0^{\alpha_0}\,\nu'^{(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_0)}}=k$$

eine nur von Druck und Temperatur der Lösung abhängige Größe sein muß.

In dem wichtigsten Falle, daß aus einem Grammolekül des Elektrolyten je eines von beiden Ionen entsteht, ist $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1$, $\nu_1=\nu_2$, und die letzte Formel ergiebt

$$\frac{\nu_1^2}{\nu_0\,\nu'}=k\,.$$

Führt man hierin den Dissociationsgrad β ein, indem man setzt

$$\nu_1=\nu_2=\beta\,\nu\,,\quad \nu_0=(1-\beta)\,\nu\,,$$

und definiert die relative Konzentration γ durch die Formel

$$\gamma=\frac{\nu}{\nu'}\,,$$

so erhält man

$$\frac{\beta^2\,\gamma}{(1-\beta)}=k\,,$$

worin k wegen $\gamma>0$, $1>\beta>0$ notwendig positiv sein muß. Von den beiden Wurzeln für β, die sich hieraus ergeben, genügt nur die eine der letzteren Ungleichung.

Setzt man für β den aus $\lambda_h=\beta\,\lambda_h^0$ folgenden Wert ein, so ergiebt diese Formel

$$k=\frac{\lambda_h^2\,\gamma}{\lambda_h^0\,(\lambda_h^0-\lambda_h)}\,,$$

und dies stellt die Abhängigkeit der molekularen Leitfähigkeiten λ_h resp. λ von der Konzentration γ dar, eine Abhängigkeit, deren Gesetzmäßigkeiten man leicht in allgemeinen Sätzen ausdrücken kann.[95]) —

Wir haben uns bisher nur mit dem speziellen und sehr seltenen Fall beschäftigt, daß beide Ionen sich, ohne weitere Reaktionen zu veranlassen, auf den Elektroden niederschlagen, weil hier die charakteristischen Erscheinungen fast vollkommen rein hervortreten; höchstens können sie durch die Diffusion, welche als Folge der Konzentrationsänderungen auftritt, und die wir weiter unten in Betracht ziehen wollen, quantitativ modifiziert werden. Außerdem ist allerdings zu bemerken, daß die Abscheidung der Ionen, indem sie einen neuen Körper zwischen Lösung und Elektrode schiebt, den Widerstand und die elektromotorische Kraft im Stromlauf — wie man sagt, durch elektrolytische Polarisation — verändert, und daß es besonderer Maßregeln bedarf, um demungeachtet die Stromstärke konstant zu erhalten.

Bedeutendere qualitative Änderungen treten gegenüber dem oben erörterten Grundschema auf, wenn sekundäre Reaktionen sich

über die Ausscheidung der Ionen lagern. Ein Beispiel liefert die Zerlegung des Wassers bei der Elektrolysierung wässeriger Lösungen von Säuren mittels unangreifbarer Elektroden durch Reaktion des negativen (Säure-)Ions mit dem Wasser der Lösung; eine anderen Charakters die Auflösung einer metallischen Elektrode in der elektrolysierten Lösung eines ihrer Salze.

In dem letztgenannten speziellen Falle stellen sich dann wiederum einfache Verhältnisse ein. Das negative Ion (2), welches nach S. 338 an der Elektrode (2) pro Zeit- und Flächeneinheit in der Menge $\mathrm{i}\, m_2$ auftritt, verbindet sich hier mit der elektrisch äquivalenten Menge der Substanz der Elektrode und liefert sonach der Lösung die mit $\pm\,\mathrm{i}$ geladene Menge des Elektrolyten; es kompensiert hierdurch nicht nur den auf S. 339 bestimmten Verlust, sondern bewirkt sogar, daß jetzt die $\pm\,\mathrm{i}_2$ tragende Quantität des Elektrolyten der Lösung zugeführt wird. Hier steigt also die Konzentration an der Elektrode (2) um ebenso viel, als sie gleichzeitig an der Elektrode (1) abnimmt; die Gesamtkonzentration bleibt deshalb in der Zersetzungszelle konstant. —

Nach der im Anfang des vorigen Paragraphen abgeleiteten Formel (197″) ist die Arbeit A'_{hi}, welche an der ponderabeln Substanz einer Übergangsschicht o_{hi} bei der Erhaltung einer von (h) nach (i) gehenden Stromstärke I_{hi} pro Zeiteinheit geleistet werden muß, gleich $-I_{hi}P_{hi}$, wenn P_{hi} die im gleichen Sinne wie I_{hi} gerechnete flächenhafte elektromotorische Kraft bezeichnet. Für die Energieänderung dieser Schicht ergiebt sich somit, falls Ω' die zugeführte Wärme bezeichnet,

$$\frac{dE_{hi}}{dt} = \Omega' - I_{hi}P_{hi}.$$

Wir wollen diese Formel auf die Summe der in den beiden Grenzschichten (h, i) und (i, k) zwischen einem Elektrolyten (i) und seinen Elektroden (h) und (k) stattfindenden Umsetzungen, und somit auf die ganze elektromotorische Kraft $P_{hi} + P_{ik} = L_0$ der Zersetzungszelle anwenden, soweit letztere in den Grenzflächen ihren Sitz hat; die in der Flüssigkeit selbst infolge wechselnder Konzentration entstehende Kraft, auf die wir unten eingehen werden, können wir, als gering neben L_0, hier außer Betracht lassen. Damit die Temperatur konstant bleibe, wird eine Wärmezufuhr oder -entnahme nötig sein, die mit I_{hi} oder I_{ik}, was wir kurz gleich I setzen wollen, proportional ist; schreiben wir $\Omega' = I\,\Omega'_0$, $E_{hi} + E_{ik} = E_0$, so wird hiernach

210) $$\frac{dE_0}{dt} = I(\Omega'_0 - L_0);$$

es ist also auch dE_0/dt mit I proportional.

Nun kann man dieselbe chemische Umsetzung, die in der Zelle stattfindet, direkt oder indirekt ohne Mitwirkung des elektrischen Stromes auch auf rein chemischem Wege bewirken; erfordert sie hier den Arbeitsaufwand $I A_1'$, den Wärmeaufwand $I \Omega_1'$ pro Zeiteinheit, so ist

$$\frac{d E_0}{I d t} = \Omega_1' + A_1' = \Omega_0' - L_0 . \tag{210'}$$

Spielt sich der chemische Prozeß nur zwischen festen und flüssigen Körpern ab, so ist A_1' verschwindend; man würde sonach $-\Omega_1' = L_0$, und damit eine Bestimmung der ganzen elektromotorischen Kraft der Flüssigkeitszelle erhalten, wenn Ω_0' gleich Null wäre, wenn also eine flächenhafte Wärmeaufnahme in den Übergangsschichten entweder nicht stattfände oder in Summa Null ergäbe.

Dieses findet aber nur in vereinzelten Fällen statt, und die Berechnung der elektromotorischen Kraft L_0 aus der Wärmetönung $-\Omega_1'$ ist somit im allgemeinen nicht möglich.

Indessen gelingt es doch, in einem Falle aus allgemeinen thermodynamischen Prinzipien einen Satz über das Verhalten der in einem System wirkenden elektromotorischen Gesamtkraft abzuleiten; nämlich dann, wenn der in dem System sich abspielende chemische Prozeß ein umkehrbarer ist, also durch die entgegengesetzte elektrische Strömung rückgängig gemacht werden kann. Systeme dieser Art sind die früher erwähnten galvanischen Elemente, welche aus zwei Metallen und zwei Flüssigkeiten zusammengesetzt sind, falls die beiden Elektrolyte das nicht metallische Ion gemeinsam haben; ein Beispiel bietet das DANIELL'sche Element, welches Kupfer in Kupfersulfat, Zink in Zinksulfat enthält. Hier löst ein von Zink zu Kupfer gehender Strom Zink auf und scheidet Kupfer ab; der umgekehrte leistet das Entgegengesetzte.

Wir gehen aus von der Energiegleichung für die Volumeneinheit des betrachteten Systemes, welche unter Voraussetzung eines umkehrbaren Prozesses lautet

$$d\varepsilon = d'\alpha + T d\eta ,$$

wenden sie, wie dies S. 324 mit der analogen Formel (200'''') geschehen ist, auf einen konstanten elektrischen Strom an, führen die Geschwindigkeit der freien Energie

$$\xi' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + T \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

ein und erhalten demgemäß

$$\frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{u}} = X', \quad \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{v}} = Y', \quad \frac{\partial \xi'}{\partial \mathfrak{w}} = Z', \quad \frac{\partial \xi'}{\partial T} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} .$$

Sollen die elektromotorischen Kräfte, und somit X', Y', Z' von der Strömung unabhängig sein, so muß $\mathfrak{x}'$ lineär von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ abhängen; dann wird aber $\mathfrak{x}'$ mit $\alpha' = \mathfrak{u}X' + \mathfrak{v}Y' + \mathfrak{w}Z'$ identisch, und es gilt

$$\omega' = + T\frac{\partial \eta}{\partial t} = - T\frac{\partial \xi'}{\partial T} = - T\frac{\partial \alpha'}{\partial T};$$

unter abermaliger Heranziehung der Energiegleichung folgt auch

$$\omega' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \alpha' = - T\frac{\partial \alpha'}{\partial T},$$

und bei Integration über ein beliebiges gleichmäßig temperiertes Bereich k

$$\Omega' = - T\frac{dA'}{dT}, \quad \frac{dE}{dt} = A' - T\frac{dA'}{dT}. \tag{210''}$$

Wir wählen für das Bereich k die Übergangsschichten zwischen den Elektrolyten und den Metallen der Kette — können auch die Grenzschicht zwischen den beiden Elektrolyten mit einbeziehen, die nur einen geringen Anteil zu dem Resultat liefert — und erhalten, indem wir, wie auf S. 342, die Änderung ihrer Energie mit dE_0/dt, die Summe der flächenhaften elektromotorischen Kräfte in ihnen mit L_0, die durch sie gehende Stromstärke mit I bezeichnen,

$$-\frac{dE_0}{dt} = I\left(L_0 - T\frac{dL_0}{dT}\right).$$

Gemäß den Betrachtungen auf S. 343 setzen wir hier

$$\frac{dE_0}{dt} = I(A_1' + \Omega_1'),$$

wobei A_1' und Ω_1' die Aufwendungen an Arbeit und Wärme bezeichnen, die erforderlich sind, um die von der Stromeinheit in der Zeiteinheit bewirkte chemische Umsetzung ohne Mitwirkung des Stromes hervorzubringen. Wir erhalten dadurch

$$-(A_1' + \Omega_1') = L_0 - T\frac{dL_0}{dT}. \tag{210'''}$$

Findet der letztere Vorgang nur zwischen festen und flüssigen Körpern statt, so ist A_1' zu vernachlässigen, und wir erhalten

$$-\Omega_1' = L_0 - T\frac{dL_0}{dT}, \tag{210''''}$$

was den gesuchten Satz und einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen der W ä r m e t ö n u n g $-\Omega_1'$ des chemischen Prozesses und der elektromotorischen Kraft ausspricht.[96]) Ist Ω_1' als Funktion von T bekannt, so kann man L_0 als ebensolche erhalten, da sich findet

$$\int \frac{\Omega_1' \, dT}{T^2} = C - \frac{L_0}{T},$$

wobei C eine Integrationskonstante bezeichnet. —

Während nach dem Vorstehenden die vollständige theoretische Bestimmung einer elektromotorischen Kraft aus allgemeinen thermodynamischen Prinzipien nicht gewonnen werden konnte, gelingt dieselbe in ziemlich allgemeinen Fällen mit Hilfe speziellerer Vorstellungen, zu deren Entwickelung wir nunmehr übergehen.

Mit der Elektrolyse steht in nahem Zusammenhang der Vorgang der Diffusion eines Elektrolyten innerhalb seines Lösungsmittels ohne Mitwirkung eines elektrischen Stromes, wenn seine Dichte eine Funktion des Ortes ist. Wir wollen denselben theoretisch verfolgen, uns dabei aber auf den Fall beschränken, daß die Konzentration in Ebenen normal zur Z-Axe konstant ist.

Benutzen wir die Bd. I, S. 59 u. f. über den osmotischen Druck angegebenen Resultate, so werden wir jedes der Ionen (h) annehmen müssen als unter der Wirkung seines osmotischen Partialdruckes p_h und unter der Wirkung des elektrischen Feldes stehend, welches die nicht streng gleiche Dichte des positiven und des negativen Ions an derselben Stelle verursacht, und dessen Kraftlinien im betrachteten Falle der Z-Axe parallel liegen.

Wir erhalten sonach durch Erweiterung von (207) für die Stromdichten $\mathfrak{i}_h$ der mit den ponderablen Ionen bewegten Ladungen

$$\mathfrak{i}_1 = \mathfrak{l}_1 \left(K - \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} \right), \quad \mathfrak{i}_2 = \mathfrak{l}_2 \left(K - \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z} \right). \tag{211}$$

Hierin bezeichnen die ϱ_h die räumlichen Dichten der an den Ionen haftenden Elektricitäten, d. h. die in der Volumeneinheit auf jedem von ihnen liegenden Ladungen; da das Ion (1) das positive, (2) das negative ist, so wird gelten $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 < 0$.

Die Größen ϱ_h stehen mit den oben eingeführten m_h in einem einfachen Zusammenhang. Bezeichnet ϱ_h' die ponderable Dichte des Ions (h) in der Lösung, so gilt ersichtlich

$$\frac{\varrho_1'}{m_1} = \varrho_1, \quad \frac{\varrho_2'}{m_2} = -\varrho_2;$$

es ist also jedes ϱ_h aus m_h und ϱ_h' bestimmbar, und die außerordentliche Kleinheit der m_h bedingt bei nicht ganz verschwindenden ϱ_h' eine höchst bedeutende absolute Größe der ϱ_h.

Infolge hiervon kann niemals ein Ion in merklichem Überschusse über das andere in einem Volumenelement der Lösung vorhanden sein; denn andernfalls würde ein elektrisches Feld von enormer

Stärke entstehen, dem Kräfte entsprechen, welche binnen kürzester Zeit die vorhandene Differenz beseitigen.

Demgemäß können wir einerseits die Summe der Dichtigkeiten ϱ_1 und ϱ_2 neben dem absoluten Wert einer jeden von ihnen vernachlässigen, andererseits auch die Summe der beiden Stromkomponenten $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ neben jeder einzelnen ignorieren; dies drückt sich aus in den Formeln

$$\varrho_1 = -\varrho_2 = \varrho\,, \quad \mathfrak{i} = \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_2 = 0.$$

Weiter benutzen wir, daß nach Bd. I, S. 607 in verdünnten Lösungen die osmotischen Partialdrucke p_h von der Anzahl Grammmoleküle ν_h der in der Volumeneinheit gelösten Substanzen (h) abhängen gemäß der Formel

$$p_h = R\,T\nu_h\,,$$

worin R eine universelle Konstante und T die absolute Temperatur bezeichnet. Es folgt hieraus, wenn die Dissociation vollständig ist, und $p = p_1 + p_2$ den ganzen osmotischen Druck und $\nu = \nu_1 + \nu_2$ die ganze Anzahl Grammoleküle in der Volumeneinheit der Lösung bezeichnet

$$p_1 = \frac{\nu_1}{\nu}p\,, \quad p_2 = \frac{\nu_2}{\nu}p\,;$$

die Gleichungen (211) aber nehmen, da die Verhältnisse ν_1/ν und ν_2/ν nach dem Obigen an allen Stellen die gleichen sein müssen, die Gestalt an

211') $$\mathfrak{i}_1 = -\mathfrak{i}_2 = \mathfrak{l}_1\left(K - \frac{\nu_1}{\nu\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = -\mathfrak{l}_2\left(K + \frac{\nu_2}{\nu\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Hieraus können wir K eliminieren und erhalten zunächst

$$\mathfrak{i}_1\left(\frac{1}{\mathfrak{l}_1} + \frac{1}{\mathfrak{l}_2}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Führen wir noch die Masse $m = m_1 + m_2$ des Elektrolyten ein, welche die elektrische Ladung ± 1 trägt, und setzen die Dichte der Strömung des Elektrolyten

$$\mathfrak{i}_1 m_1 - \mathfrak{i}_2 m_2 = \mathfrak{i}_1 m = j\,,$$

so gewinnnen wir

$$j = -\frac{m\,\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_2}{\varrho(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2)}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Weiter führen wir das Molekulargewicht μ des Elektrolyten durch die Beziehung

$$\mu\,\nu = \varrho'$$

ein, in der ϱ' die Dichte des Elektrolyten in der Lösung bezeichnet, die Ladung $\pm e$, welche ein Grammolekül desselben trägt, durch die andere

$$e = \mu / m\,,$$

und können dann, wegen $p = R\,T\,\nu$, auch schreiben

$$j = -\frac{\mathfrak{l}_1\,\mathfrak{l}_2\,R\,T}{\varrho\,e\,(\mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2)}\frac{\partial\,\varrho'}{\partial\,z}.$$

Bei Einführung der molekularen Leitfähigkeiten λ_h durch die Formel $\mathfrak{l}_h = \nu\,\lambda_h$, in der wegen der vollständigen Dissociation β gleich Eins gesetzt ist, folgt hieraus wegen der leicht erkennbaren Beziehung

$$\varrho / \nu = e$$

schließlich

$$j = -\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,R\,T}{e^2\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\frac{\partial\,\varrho'}{\partial\,z}. \qquad 211'')$$

Da nun ersichtlich bei der Diffusion

$$\frac{\partial\,\varrho'}{\partial\,t} = -\frac{\partial\,j}{\partial\,z} = +\frac{\lambda_1\,\lambda_2\,R\,T}{e^2\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\frac{\partial^2\,\varrho'}{\partial\,z^2}$$

ist, so stellt der Faktor von $\partial^2\,\varrho' / \partial\,z^2$ den Diffusionskoefficienten der Lösung dar, der durch diese Betrachtungsweise in eine merkwürdige Beziehung zu elektrischen Größen gebracht ist; eine Beziehung, die der Erfahrung ziemlich vollständig entspricht.[97] —

Die Formeln (211′) gestatten nun auch, die oben angekündigte wichtige Folgerung zu ziehen; durch Elimination von $\mathfrak{i}$ ergiebt sich nämlich nach Ersetzung der $\mathfrak{l}_h$ durch die λ_h

$$K = \frac{\nu_1\,\lambda_1 - \nu_2\,\lambda_2}{\nu\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\,\frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z}, \qquad 211''')$$

und hierdurch ist die räumliche elektromotorische Kraft, welche in der Lösung eines Elektrolyten von wechselnder Konzentration herrscht, bestimmt.

Vertauscht man in diesem Resultat ϱ mit seinem Wert $\nu e = p e / R T$, und K mit dem Potentialgefälle $-\partial\,\varphi / \partial\,z$, so erhält man

$$-\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z} = \frac{\nu_1\,\lambda_1 - \nu_2\,\lambda_2}{\nu\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\,\frac{R\,T}{p\,e}\,\frac{\partial\,p}{\partial\,z},$$

eine Gleichung, die sich sogleich integrieren läßt, da der erste Faktor rechts von z unabhängig ist, und T bei kleinen Temperaturänderungen auch als konstant betrachtet werden kann. Bezeichnet man die Grenzen der Integration durch die Indices α und β, so erhält man

$$\varphi_\beta - \varphi_\alpha = \frac{\nu_1\,\lambda_1 - \nu_2\,\lambda_2}{\nu\,(\lambda_1 + \lambda_2)}\,\frac{R\,T}{e}\,l\left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right). \qquad 211'''')$$

Dieses Resultat gestattet auch die Anwendung auf die Bestimmung des Potentialsprunges oder der flächenhaften elektromotorischen Kraft $P_{\alpha\beta} = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$, die in einer dünnen Übergangs-

schicht zwischen zwei Bereichen (α) und (β) konstanter Konzentrationen resp. konstanter osmotischer Drucke p_α und p_β stattfindet.

In dem speziellen Falle, daß aus einem Grammolekül des Elektrolyten nur je ein Grammolekül der Ionen entsteht, ist $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{2}\nu$.

Diese merkwürdigen Beziehungen, welche die erste Bestimmung einer elektromotorischen Kraft auf dem Wege der Theorie darstellen, verdankt man W. Nernst.[98]) Die Methode gestattet ersichtlich eine Erweiterung auf den Fall, daß in demselben Lösungsmittel gleichzeitig zwei Elektrolyte vorhanden sind, und somit auch auf die Bestimmung der elektromotorischen Kraft in der Grenze zwischen den Lösungen zweier Elektrolyte in demselben Mittel; denn nächst dieser Grenze findet eben eine Diffusion der beiden Lösungen ineinander statt. —

Eine analoge Bestimmung der flächenhaften elektromotorischen Kraft P_{hi} zwischen einem Metalle (h) und einem Elektrolyten (i) ist ohne neue spezielle Hypothesen nicht möglich. Relativ einfach liegen die Verhältnisse in dem Falle, daß die Berührung zwischen einem Metalle und der Lösung eines seiner Salze stattfindet. Man schließt seine Betrachtung möglichst nahe an die obigen Entwickelungen an, indem man die Vorstellung benutzt, daß zwischen den beiden Körpern ein stetiger Übergang stattfindet, das Metall also spurenweise in Lösung geht, und gemäß den Formeln (211) ausdrückt, daß eine merkliche Strömung des metallischen Ions nicht möglich ist, weil sonst starke Ladungen entständen, welche dieser Strömung entgegenwirken und ihr momentan ein Ziel setzen würden.

Es folgt hieraus, daß gelten muß

212) $$K - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,,$$

worin K die frühere Bedeutung hat, p den osmotischen Druck der Metall-Ionen, und ϱ die Dichte der mit ihnen verbundenen Ladungen innerhalb der Übergangsschicht bezeichnen.

Führt man, wie auf S. 346 u. f., ein

212') $$\varrho = \nu e\,, \qquad p = RT\nu\,,$$

worin ν die Anzahl der Grammoleküle des Metall-Ions in der Lösung, und e die Ladung eines jeden bezeichnet, so giebt dies

212'') $$K = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{RT}{pe}\frac{\partial p}{\partial x}\,,$$

also bei einer Integration über die Dicke der Übergangsschicht

$$P_{hi} = \frac{RT}{e} l\left(\frac{p_i}{p_h}\right); \qquad 212''')$$

hierin bezeichnet p_i den osmotischen Druck des Metall-Ions innerhalb des homogenen Elektrolyten, p_h seinen Wert im Metall, d. h. eine diesem individuelle Konstante, welche die Tendenz des Metall-Ions, in Lösung zu gehen, mißt und welche aus dem Experiment zu bestimmen ist.

Die direkteste Prüfung dieser Formeln liefert die Beobachtung der Potentialdifferenz P_{hi} bei verschiedener Konzentration derselben Lösung, wo p_i in einfacher Weise angebbar ist; dieselbe ist befriedigend ausgefallen. Hiernach sind also auch die elektromotorischen Gesamtkräfte von konstanten Elementen, welche zwei Metalle innerhalb wässeriger Lösungen ihrer Salze enthalten, theoretisch ziemlich vollständig angebbar.[99])

Es ist indessen zu betonen, daß die letzten über elektromotorische Kräfte erhaltenen Resultate wesentlich auf der Annahme ruhen, daß ein elektrischer Strom das System nicht durchsetzt. Diese Voraussetzung schließt nun zwar eine prüfende Messung nicht aus, wie die S. 314 entwickelte und hier anwendbare Beobachtungsmethode zeigt; aber eine Übertragung der erhaltenen Ausdrücke auf Fälle, wo ein Strom durch den Elektrolyten fließt, würde in hohem Grade hypothetisch sein. —

Wir schließen an die thermodynamischen Betrachtungen, welche in den beiden letzten Paragraphen eine so wesentliche Rolle spielen, noch eine allgemeine Bemerkung an.

Bisher ist als einzige Arbeitsleistung an dem stromdurchflossenen System diejenige angenommen, welche die elektrischen Kräfte bei der Strömung leisten, und welche durch die Gleichung (196''') bestimmt ist; es kann aber nach dem Inhalte der Paragraphen 25 bis 29 als sicher gelten, daß auch magnetische Kräfte eine Arbeit an dem System leisten, wenn dasselbe gegen andere Stromleiter oder gegen Magnete verschoben wird. Unterscheiden wir diese beiden Arbeiten als elektrische und magnetische durch die Indices e und m, so würde an Stelle der Gleichung (198''') jetzt treten

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \alpha_e' + \alpha_m' + \omega'.$$

Die Integration über ein endliches Bereich des Stromleiters liefert

$$\frac{dE}{dt} = A_e' + A_m' + \Omega', \qquad 213)$$

und, wenn das Bereich den ganzen Stromleiter umfaßt, wegen des hier stattfindenden Wertes $A'_e = 0$,

213′) $$\frac{dE}{dt} = A'_m + \Omega'.$$

Findet in dem System selbst keine Veränderung statt, besteht es z. B. nur aus Leitern erster Klasse, und wird es auf konstanter Temperatur erhalten, so ist $dE/dt = 0$, also

213″) $$A'_m + \Omega' = 0,$$

und die zugeführte Arbeit muß vollständig in der Gestalt von Wärme gewonnen werden.

Auf diese Beziehungen wird im folgenden Kapitel zurückzugreifen sein.

§ 35. Nicht-stationäre Ströme. Polarisations- und Konvektionsströme. Die allgemeinste Gestalt der elektromagnetischen Grundgleichungen.

Die Größen $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, die wir auf S. 216 durch die Gleichungen

214) $$\frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = \mathfrak{u}, \quad \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) = \mathfrak{v}, \quad \frac{v}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \mathfrak{w}$$

eingeführt hatten, genügen nach ihrer Definition der Grundformel

214′) $$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0$$

stationärer Strömungen. Es kann indessen nach dem an verschiedenen Stellen dieses Kapitels Bemerkten nicht zweifelhaft sein, daß den bisher betrachteten verwandte Vorgänge in der Natur vorkommen, die den Charakter stationärer Zustände nicht besitzen. Die auf S. 225 erwähnte Entladung von Konduktoren giebt ein Beispiel dafür. Es ist nun die Frage, in welcher Weise die obigen Formeln für $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ zu erweitern sind, um dergleichen Vorgänge mit zu umfassen. Bei ihrer Behandlung wollen wir in der früher benutzten Weise die sprungweisen Übergänge, die etwa in dem betrachteten körperlichen System vorkommen, durch stetige ersetzt denken.

Einen Fingerzeig zu ihrer Lösung geben uns die auf S. 225 u. f. angestellten Überlegungen, die zu dem Schlusse führten, daß laut der Beobachtung nicht-stationäre Ströme notwendig mit Veränderungen der Ladungsverhältnisse im durchflossenen Leiter verbunden sind, und daß demgemäß zwischen den wahren Stromkomponenten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ und der wahren elektrischen Dichte ϱ die Beziehung (153″) stattfinden muß. Wir schreiben diese letztere, indem wir die elektrischen wahren Dichten nunmehr zum Unterschied von den magnetischen durch den Index e auszeichnen, und indem wir nach S. 230 die Konstante k im wissenschaftlichen Maßsystem gleich Eins setzen:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_e}{\partial t} = 0. \qquad 214'')$$

Nun haben wir aber auf S. 62 einen Ausdruck für die wahre räumliche Dichte durch die Komponenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der elektrischen Polarisation $\mathfrak{K}$ abgeleitet, nämlich in Formel (41'') erhalten

$$4\pi \varrho_e = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, \qquad 214''')$$

was allerdings zunächst nur für Dielektrica Geltung hatte. Indessen haben wir durch die Überlegungen von S. 89 erkannt, daß die absolut isolierenden Dielektrica im Sinne der zweiten Hälfte des I. Kapitels ebensowohl ideale Grenzfälle sind, wie die absolut guten Leiter, mit denen wir uns in dessen erster Hälfte beschäftigt haben, und daß wahrscheinlich alle Körper gleichzeitig die elektrische Leitung und die dielektrische Polarisation zulassen.

Indem wir jetzt zuerst die wichtigen Konsequenzen aus jener Auffassung ziehen, betrachten wir die Beziehung (214''') als eine vollständig allgemeingültige und bringen, indem wir sie berücksichtigen, die Gleichung (214'') auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{u} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{v} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{w} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right) = 0. \qquad 215)$$

Dieselbe erscheint nunmehr als eine Erweiterung der Formel (214'), welche dadurch erhalten ist, daß die Größen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ vertauscht sind mit den Aggregaten

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{v} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{w} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \qquad 215')$$

die offenbar als Strömungskomponenten aufgefaßt werden können, da gleiches von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ gilt.

Die neue Strömung, deren Resultante wir mit $\mathfrak{j}$ bezeichnen, hat mit der früheren gemein, daß sie die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0 \qquad 215'')$$

erfüllt, welche aussagt, daß durch die Oberfläche eines jeden Volumens in jedem Zeitmoment das gleiche Quantum des bewegten Fluidums aus- und eintritt; sie ist aber in der Hinsicht von der früheren verschieden, daß die Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ selbst mit der Zeit variieren, und insofern kann sie stationär im gewöhnlichen Sinne des Wortes nicht genannt werden. Da sie aber in jedem Moment dem Gesetz (215'') einer stationären Strömung folgt, so kann man sie passend als quasi-stationär bezeichnen, und wir wollen diesen Namen weiterhin beibehalten.

Die quasi-stationäre Strömung $\mathfrak{j}$ beschränkt sich keineswegs auf Leiter, sondern erfüllt den ganzen Raum mit Ausnahme etwaiger Leiter, auf denen, — soweit dergleichen möglich ist — elektrisches Gleichgewicht herrscht; sie gestattet wegen der Gültigkeit der Bedingung (215″) jederzeit die Zerlegung in Stromfäden, die im Endlichen oder im Unendlichen geschlossen sein müssen, aber ihre Lage und Gestalt von Moment zu Moment ändern.

Den laut den Formeln (215′) unter Umständen zu dem Leitungsstrom i hinzutretenden neuen Teil, der, wie wir später zeigen werden, nur unter ganz speziellen Umständen merkliche Wirkungen giebt, nennt man kurz den Polarisationsstrom; über seine Eigenschaften geben die Werte seiner Komponenten nach den Koordinatenaxen Aufschluß.

Bezeichnet man nämlich die Resultierende aus den Polarisationsgeschwindigkeiten $\partial\mathfrak{X}/\partial t$, $\partial\mathfrak{Y}/\partial t$, $\partial\mathfrak{Z}/\partial t$ mit $\mathfrak{R}'$, setzt also

$$\mathfrak{R}'^2 = \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)^2,$$

so ist die Richtung des Polarisationsstromes mit $\mathfrak{R}'$ parallel, und seine Dichte gleich $\mathfrak{R}'/4\pi$.

Indem man sich vorstellt, daß in den Dielectrica elektrische Ladungen zwar nicht von Volumenelement zu Volumenelement wandern, aber innerhalb des Volumenelementes durch elektrische Kräfte verschoben werden können, und indem man weiter voraussetzt, daß die bei einer Änderung von $\mathfrak{R}$ durch die Querschnittseinheit normal zu $\mathfrak{R}'$ hindurchtretende Ladung gleich $\mathfrak{R}'/4\pi$ ist, kann man das Zustandekommen eines Polarisationsstromes sich veranschaulichen. Auf Grund dieser Deutung stellt man $\mathfrak{R}'/4\pi$ wohl auch als den Verschiebungsstrom dem Leitungsstrom i gegenüber. Indessen ist diese Auffassung nichts weiter, als eine andere Form des Ausdruckes für die Thatsache, daß, wie $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so auch $\partial\mathfrak{X}/\partial t$, $\partial\mathfrak{Y}/\partial t$, $\partial\mathfrak{Z}/\partial t$ in den Dielektrica einer gewissen Bedingungsgleichung genügen, und bietet, auf Leiter mit Polarisationen angewandt, der Vorstellung solche Schwierigkeiten, daß wir sie auch als Hilfsmittel für die Anschauung nicht benutzen wollen.

Mit den oben zusammengestellten Folgerungen aus der Grundformel (215) verbinden wir nun die fundamentale Hypothese, daß der Polarisationsstrom, der sich in der Gleichung (215) dem Leitungsstrom addiert, die nämlichen elektrischen und magnetischen Wirkungen übt, wie jener.[100])

In Bezug auf die magnetischen Kräfte, die uns in diesem Ab-

schnitt allein beschäftigen, drücken wir dies analytisch aus, indem wir die Formeln (214) durch die Zufügung der Polarisationsgeschwindigkeiten erweitern, also schreiben

$$\left.\begin{array}{c} v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = 4\pi \mathfrak{u} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad v\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) = 4\pi \mathfrak{v} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \\ v\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 4\pi \mathfrak{w} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}; \end{array}\right\} \quad 215''')$$

es nehmen dann die Ausdrücke (149″) für A, B, C die Form an

$$A = \frac{1}{v}\int\left[\left(\mathfrak{v}_1 + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial t}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \left(\mathfrak{w}_1 + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial t}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right] dk, \quad 215'''')$$

. . . .

Die so erhaltenen Formeln sind im Einklang sowohl mit den im ersten Kapitel entwickelten Gesetzen der Elektrostatik, als auch mit den in diesem Kapitel abgeleiteten für stationäre Zustände; denn in beiden Gebieten sind die Kräfte, und somit die Polarisationen, als zeitlich unveränderlich betrachtet. Die vorgenommene Erweiterung bringt also keinen Widerspruch mit einer der früher behandelten Thatsachen hervor.

Was die Prüfung des erhaltenen Resultates durch die Beobachtung angeht, so können Änderungen von K, wie sie hier vorausgesetzt sind, nämlich in einem ruhenden Volumenelement sich abspielend, nur durch Veränderungen im Außenraum bewirkt werden, am einfachsten durch Transport von wahren Ladungen. Die Beobachtungen von Hertz, welche einigermaßen, aber nicht genau, hierher gehören, haben Wirkungen der Art, wie die Formeln sie verlangen, nachgewiesen, gestatten aber keine quantitative Verwertung.[101]) —

Die im Vorstehenden ausgeführte Erweiterung unserer Grundformeln (214) hört auf zu genügen, wenn das körperliche System in Bewegung befindlich ist; denn in diesem Falle ist die Ausgangsformel (214″) offenbar unvollständig. Wenn nämlich an derselben Stelle des Raumes noch durch andere Ursachen, als infolge der Strömung, die Dichte variiert, so tritt an ihre Stelle die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z}\right) dk + \frac{d}{dt}(\varrho_e\, dk) = 0, \quad 216)$$

worin dk ein zu jeder Zeit dieselbe bestimmte Portion der ponderabeln Materie umfassendes Volumenelement bezeichnet, und der totale Differentialquotient nach t alle möglichen Ursachen der Veränderung von dk und ϱ_e berücksichtigt.

Von solchen Ursachen kommen in unserem Falle außer der früher allein behandelten zeitlichen Änderung von ϱ_e in jedem Raum-

punkt noch zwei als denkbar in Betracht: die Translation des Volumenelementes nach einer Stelle, wo gleichzeitig ein anderes ϱ_e herrscht, und die Dilatation, welche seine Ladung auf einen größeren Raum verteilt.

Bezeichnet man, wie früher, mit u', v', w' die Komponenten der Translationsgeschwindigkeit g' des Volumenelementes dk, mit ϑ' seine Dilatationsgeschwindigkeit, so wird die Formel (216) zu

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_e}{\partial x} u' + \frac{\partial \varrho_e}{\partial y} v' + \frac{\partial \varrho_e}{\partial z} w' + \varrho_e \vartheta' = 0$$

und läßt sich bei Rücksicht auf die Werte von ϱ_e und ϑ' auch schreiben

$$216') \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{u} + \varrho_e u' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{v} + \varrho_e v' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{w} + \varrho_e w' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Man kann hiernach die Grundgleichungen (215‴) auf eine Gestalt bringen, in welcher sie mit der Bedingung (216′) im Einklang sind, indem man den rechten Seiten noch die Glieder $4\pi\varrho_e u'$, $4\pi\varrho_e v'$, $4\pi\varrho_e w'$ hinzufügt. Dieselben würden aussprechen, daß einem Leitungsstrom in elektromagnetischer Hinsicht außer dem Polarisationsstrom auch äquivalent ist der Transport wahrer Ladungen mit den ponderabeln leitenden oder isolierenden Massen, an die sie gebunden sind, d. h. die sogenannte elektrische Konvektion, auf welche bereits S. 227 hingewiesen worden ist.

Die Stärke des Konvektionsstromes ergiebt sich gleich $\varrho_e g'$, seine Richtung ist der von g' parallel. In der wenigstens angenäherten Bestätigung dieses Gesetzes durch die Beobachtung liegt auch eine Prüfung für die Richtigkeit der theoretischen Schlüsse, durch welche wir zu demselben gelangt sind. —

Das erhaltene Resultat zeigt uns, daß man einen konstanten Strom herstellen kann, der ohne Arbeitsleistung andauert, indem man ein mechanisches System, das irgend welche elektrische Ladungen trägt, in eine stationäre Bewegung versetzt. Ströme von der genannten Eigenschaft müssen wir nach dem S. 263 Gesagten in Magneten stattfindend annehmen, wenn wir deren Wirkungen auf elektromagnetische Kräfte zurückführen wollen. Daß diese Ströme keine Leitungsströme sein können, ist schon früher ausgesprochen worden; es hindert aber nichts, sie als Konvektionsströme aufzufassen, welche durch die Bewegung der mit elektrischen Ladungen versehenen kleinsten Teilchen des Magneten hergestellt werden.[102])

Damit der Körper sich dabei elektrostatisch neutral verhalte, ist erforderlich, daß die positiven und die negativen Ladungen jedes Volumenelementes gleich groß seien; um trotzdem elektromagnetisch zu wirken, müssen sie verschiedene Bewegungen besitzen. Ein Paar materieller Punkte von verschiedenen Massen und mit entgegengesetzten elektrischen Ladungen, die sich unter dem Einfluß wechselwirkender Kräfte in geschlossenen Bahnen bewegen, würden ein System darstellen, das bei hinreichend kleiner Umlaufszeit auf ferne Punkte zwar nicht elektrostatische, wohl aber elektromagnetische Kräfte ausübt. Unmagnetische Körper stellen sich im Lichte dieser Auffassung als Systeme von molekularen Konvektionsströmen dar, deren Orientierung Gesetzmäßigkeiten nicht besitzt; der Akt der Magnetisierung besteht in einer Drehung der Axen der Strombahnen nach der Richtung der magnetisierenden Kraft hin, die in permanenten Magneten auch nach dem Verschwinden jener Kräfte andauert, in veränderlichen dagegen zurückgeht. —

Kehren wir zu den allgemeinen Entwickelungen zurück, welche die Veranlassung zu dieser Abschweifung boten, so ist zu betonen, daß die oben erwähnten Beobachtungen keineswegs hinreichend mannigfaltig und vollständig sind, um zu beweisen, daß die zuletzt eingeführten Zusatzglieder wirklich die gesamte Wirkung einer beliebigen Bewegung des unendlichen körperlichen Systemes enthalten; es ist vielmehr hervorzuheben, wie wenig Wahrscheinlichkeit dafür spricht, daß weder Rotation, noch Deformation innerhalb des Systemes magnetisch wirksam sein sollen, wenn die Translation sich als wirksam erweist.

Indessen fehlt es für die Erweiterung unserer Formeln nach dieser Richtung bisher anscheinend durchaus an einer sicheren Grundlage. Beobachtungen über hierher gehörige Wirkungen sind überaus schwierig, da auch unter ausgesucht günstigen Verhältnissen die Kräfte der Konvektion sehr gering sind, und eine plausible physikalische Hypothese über den Mechanismus des Vorganges ist noch nicht gefunden.

Ohne sich auf solche zu stützen, kann man im Grunde nur folgendes sagen.

Bezeichnet man die gesuchten Ergänzungsglieder für die rechten Seiten der Gleichungen (215″) mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, so müssen dieselben jedenfalls, um mit der Bedingung (216′) vereinbar zu sein, der Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial z} = 0$$

genügen; außerdem aber müssen sie sowohl mit der Feldstärke K,

als mit den Komponenten u', v', w' der Translationsgeschwindigkeit g' verschwinden, denn bei fehlender Bewegung treten die einfachen Formeln (215‴) in ihr Recht, und bei fehlenden elektrischen Kräften ist überhaupt keine Veranlassung zu magnetischen Wirkungen vorhanden.

Setzen wir voraus, daß $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, die nach ihrem Auftreten Vektorkomponenten darstellen, im ganzen Raume stetig sind, so ergiebt sich nach den Resultaten von Bd. I, S. 192, die auch für den ersten Paragraphen dieses Kapitels die Grundlage bildeten, daß sie auf die Form gebracht werden können

$$\mathfrak{p} = v\left(\frac{\partial C'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial z}\right), \quad \mathfrak{q} = v\left(\frac{\partial A'}{\partial z} - \frac{\partial C'}{\partial x}\right), \quad \mathfrak{r} = v\left(\frac{\partial B'}{\partial x} - \frac{\partial A'}{\partial y}\right).$$

Wir bemerken, daß die Formeln (215‴) hierdurch die Gestalt annehmen

$$v\left(\frac{\partial (C - C')}{\partial y} - \frac{\partial (B - B')}{\partial z}\right) = 4\pi(\mathfrak{u} + \varrho_e u') + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

daß die Größen A', B', C' sich also direkt als Anteile an den Werten der magnetischen Kräfte A, B, C darstellen, die infolge der Bewegung auftreten.

Die A', B', C' müssen, ebenso wie die $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, sowohl mit der Geschwindigkeit g', als mit der Feldstärke K verschwinden, und da alle andern Glieder der obigen Formel linear in den Komponenten dieser Größen sind, so liegt es nahe, die denkbar einfachste Verfügung zu treffen und A', B', C' bilineär in u', v', w' und X, Y, Z zu wählen.

Ein besonders einfacher Ansatz, der durch die Analogie mit später zu behandelnden Gleichungen empfohlen wird, ist der,

$$217)\qquad vA' = w'\mathfrak{Y} - v'\mathfrak{Z}, \quad vB' = u'\mathfrak{Z} - w'\mathfrak{X}, \quad vC' = v'\mathfrak{X} - u'\mathfrak{Y}$$

zu wählen; diese Ausdrücke führen keine neuen Konstanten in die Formeln ein, als die allgemeinen Dielektricitätskonstanten, und transformieren sich wie Vektorkomponenten, was offenbar stattfinden muß, um den Ansatz als zulässig erscheinen zu lassen. Sie sprechen die Erregung einer magnetischen Kraft R' aus, welche normal zu der Richtung der elektrischen Kraft K und derjenigen der Geschwindigkeit g' des Volumenelementes steht und die Größe besitzt

$$217')\qquad R' = \frac{g'K}{v}\sin(g', K).$$

Acceptieren wir jenen Ansatz, so nehmen unsere Gleichungen (215‴) die Gestalt an[103]):

$$\left.\begin{aligned}
v\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right) &= 4\pi(\mathfrak{u}+\varrho_e u')+\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial y}(v'\mathfrak{X}-u'\mathfrak{Y})-\frac{\partial}{\partial z}(u'\mathfrak{Z}-w'\mathfrak{X}),\\
v\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right) &= 4\pi(\mathfrak{v}+\varrho_e v')+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial z}(w'\mathfrak{Y}-v'\mathfrak{Z})-\frac{\partial}{\partial x}(v'\mathfrak{X}-u'\mathfrak{Y}),\\
v\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right) &= 4\pi(\mathfrak{w}+\varrho_e w')+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}(u'\mathfrak{Z}-w'\mathfrak{X})-\frac{\partial}{\partial y}(w'\mathfrak{Y}-v'\mathfrak{Z}),
\end{aligned}\right\}\quad 217'')$$

in welcher wir sie als die **allgemeinen Gleichungen des Elektromagnetismus** bezeichnen wollen, während die in ihnen auftretenden Aggregate

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{u}+\varrho_e u'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}=\mathfrak{x},\quad \mathfrak{v}+\varrho_e v'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}=\mathfrak{y},\\
\mathfrak{w}+\varrho_e w'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}=\mathfrak{z}
\end{aligned}\right\}\quad 217''')$$

im Anschluß an das S. 354 Entwickelte die **Gesamtkomponenten der wahren elektrischen Strömung in dem mit der Geschwindigkeit g' bewegten Volumenelement** heißen mögen. Es ist aber nicht zu vergessen, daß die letzten Zusatzglieder durch die Erfahrung noch nicht geprüft sind; deshalb sollen hier Folgerungen aus ihnen nicht gezogen, sondern nur im nächsten Kapitel bei Behandlung eines zweiten, gleichgestalteten und sicherer begründeten Systemes die dort abzuleitenden Resultate auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Ebenda wird sich auch ein Standpunkt gewinnen lassen, von dem aus die Richtigkeit und Vollständigkeit der vorstehenden allgemeinen Gleichungen mindestens sehr wahrscheinlich erscheint. —

Noch sei bemerkt, daß bei der Ableitung der Grundformeln (217″) über das Verhalten des Koordinatensystemes, auf welches dieselben bezogen sind, eine beschränkende Annahme nicht gemacht ist. Für gewisse Anwendungen, namentlich auf Fälle, wo die Bewegung nur im Endlichen stattfindet, wird es sich vorteilhaft erweisen, ein absolut ruhendes Koordinatensystem zu benutzen; unter anderen Umständen ist eines vorzuziehen, das, mit einem Teile des Systemes fest verbunden, dessen Bewegungen folgt. Im letzteren Falle be-

zeichnen dann u', v', w' die Komponenten der relativen, nicht der absoluten Geschwindigkeit nach den bewegten Koordinatenaxen. —

Zu Anwendungen giebt auch im einfachen Falle eines ruhenden Mediums das erhaltene Formelsystem zunächst noch wenig Möglichkeit, da uns bisher unbekannt ist, ob wir von den sechs abhängigen Variabeln X, Y, Z und A, B, C dieser Gleichungen ein System willkürlich mit Ort und Zeit veränderlich vorschreiben können. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß noch ein zweites System von Gleichungen zwischen denselben sechs Größen besteht, woraus sich ergiebt, daß eine willkürliche Verfügung in der angegebenen Richtung nicht zulässig ist.

Doch kann man eine Beziehung durch Elimination der A, B, C bilden, die wenigstens für ein ruhendes homogenes isotropes Medium ein anschauliches Resultat ergiebt. Differentiiert man die Formeln (215‴) nach x, y, z und addiert die Resultate, so gelangt man zu der Gleichung (214″) zurück, die aber unter den gemachten Voraussetzungen wegen der Beziehungen (151‴) und (39) die Gestalt annimmt

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} = -\frac{4\pi\mathfrak{l}}{\mathfrak{d}}\varrho_e.$$

Sie spricht aus, daß die Geschwindigkeit der Abnahme von ϱ_e in jedem Volumenelement des homogenen isotropen Körpers nur von dessen Zustand abhängig ist, und zeigt, wie ihr absoluter Wert sich durch die Konstanten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{d}$ des Mediums bestimmt.

Wir haben in diesem ganzen Abschnitt das betrachtete Medium als mit dem Ort stetig veränderlich angesehen und deshalb von Grenzbedingungen zu sprechen keine Veranlassung gehabt. Geht man aber in der früher angewandten Weise von stetigen zu längs gewisser Oberflächen unstetigen Änderungen über, so wird die Ableitung von speziellen Bedingungen für diese Oberflächen nötig. Wir werden dieselben im folgenden Kapitel nach Aufstellung des oben erwähnten zweiten Systemes von Hauptgleichungen für veränderliche Zustände gleichzeitig für alle beide Systeme und nach demselben Verfahren gewinnen.

IV. Kapitel.

Induktion.

§ 36. Grundthatsachen über die Induktion in linearen geschlossenen Leitern. Das Linienintegral der in einem ruhenden linearen Leiter durch einen bewegten permanenten Magneten induzierten elektrischen Kraft.

Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen des vorigen Kapitels bildete die Thatsache, daß sich aus Leitern, die das VOLTA'sche Spannungsgesetz nicht befolgen, durch Zusammenfügung Systeme bilden lassen, welche in ihrer Umgebung neben elektrischen auch magnetische Kräfte ausüben. Die Grundlage der Lehre von den Induktionserscheinungen bildet die von FARADAY gemachte Beobachtung, daß jeder beliebige Leiter die Fähigkeit, eigentümliche elektrische und magnetische Kräfte zu äußern, vorübergehend dadurch erhält, daß er zeitlich wechselnden magnetischen Kräften ausgesetzt wird.[104])

Diese sekundär erregten magnetischen Kräfte sind von denjenigen, die influenziertem Magnetismus ihren Ursprung verdanken, durchaus verschieden; einmal wirken sie, nach der direkten Beobachtung zu schließen, nicht, so lange die primär ausgeübten Kräfte zeitlich konstant sind, sondern nur, so lange jene sich ändern; sodann verschwinden sie nicht mit der Magnetisierbarkeit des untersuchten Leiters.

Insbesondere ist aber von Bedeutung, daß die absolute Stärke der sekundären magnetischen Kräfte in hohem Grade von der Leitungsfähigkeit des benutzten Körpers für Elektrizität abhängig ist; die Beobachtung erweist zuverlässig, daß bei homogenen isotropen Körpern von gleicher Gestalt und gleicher Größe bei Einwirkung gleicher und gleich veränderlicher primärer magnetischer Kräfte sekundäre Wirkungen entstehen, welche der spezifischen Leitfähigkeit l

direkt proportional sind. Dies führt auf die Vermutung, daß ähnlich, wie bei den im vorigen Kapitel betrachteten Vorgängen, im Innern des Leiters erregte elektrische Kräfte die nächste Ursache der ausgeübten magnetischen Wirkungen sein möchten. In der That verhalten sich Leiter, welche in der beschriebenen Weise veränderlichen magnetischen Kräften ausgesetzt sind, auch in anderer Hinsicht denen analog, von denen wir aussagen, daß in ihnen ein elektrischer Strom fließt; z. B. ändern sie ihre Temperatur und zeigen, im Falle sie Elektrolyten enthalten, auch chemische Umsetzungen.

Wir betrachten es daher als durch die Erfahrung erwiesen, daß in einem Leiter durch die Einwirkung zeitlich veränderlicher magnetischer Kräfte elektrische erregt, wie man sagt, induziert werden. Unsere nächste Aufgabe ist, den Zusammenhang zwischen den induzierenden magnetischen und den induzierten elektrischen Kräften aufzusuchen; da aber letztere nicht direkt beobachtbar sind, so werden wir aus den wahrgenommenen sekundär erregten magnetischen auf sie zurückschließen müssen.

Um dies zu können, müssen wir die Annahme machen, daß die induzierten elektrischen Kräfte von derselben Natur sind, wie die in einem aus verschiedenartigen Stücken zusammengesetzten Leitersystem nach § 22 entstehenden, daß also insbesondere die Fundamentalformeln (152‴) für den Zusammenhang zwischen elektrischen Kräften und Stromkomponenten ihre Geltung behalten, wenn die ersteren ganz oder zum Teil durch Induktion erregt sind, und daß auch noch die Formeln (149) die Stromkomponenten mit den sekundären magnetischen Kräften verbinden.

Ferner ist kein Grund vorhanden, die Gültigkeit der früher abgeleiteten und nach S. 207 auch im vorigen Kapitel beibehaltenen Stetigkeitseigenschaften der elektrischen und der magnetischen Kräfte, wie der mit ihnen in Verbindung stehenden Polarisationen bei den neuen Vorgängen anzuzweifeln. Ebenso nehmen wir für den Zusammenhang zwischen den Kräften, resp. den Polarisationen, und den freien, resp. den wahren, elektrischen und magnetischen Dichten die früheren Beziehungen — die für Magnetismen zuletzt in (141) und (141′) ausgedrückt sind — so lange als allgemein gültig an, als wir durch daraus fließende Folgerungen nicht auf Widersprüche mit der Erfahrung geführt werden. —

Da die Vorgänge, um die es sich hier handelt, fast ohne Ausnahme schnell ablaufende sind, so bietet es große Schwierigkeiten

durch die Beobachtung allein zu Sätzen über das Verhalten der elektrischen Kräfte zu kommen. Auch wenn man den S. 219 benutzten Kunstgriff wiederholt, zum Zwecke der Vereinfachung der Verhältnisse an linearen Leitern zu beobachten, gewinnt man keine Resultate, die ohne Zuhilfenahme von Hypothesen eine Deutung und Verwertung in dem angegebenen Sinne gestatten.

Um eine Vorstellung von der anzuwendenden Beobachtungsmethode zu erhalten, denken wir uns den linearen, unverzweigt angenommenen Leiter, etwa eine Drahtrolle, fest aufgestellt und durch zwei dicht nebeneinander hingeführte Drähte mit einem Galvanometer verbunden; letzteres wird passend in großer Entfernung sowohl von dem induzierten Leiter, als von dem induzierenden System angebracht, um von den primären magnetischen Kräften nicht merklich beeinflußt zu werden.

Bewegen wir nun das induzierende System, einen permanenten Magneten oder einen Stromlauf, in beliebiger Weise, so zeigt das Galvanometer eine in dem linearen Leiter fließende elektrische Strömung an, die aber im allgemeinen während der Bewegung des induzierenden Systemes variiert, so daß der Magnet des Galvanometers unter ihrer Einwirkung keine Ruhelage annimmt, sondern Bewegungen von höchst verworrener Art ausführt.

Die Beobachtung liefert klarere Resultate, wenn man die Bewegung des induzierenden Systemes so schnell ausführt, daß ihre Dauer neben der Dauer einer Schwingung des Galvanometermagneten vernachlässigt werden kann. Ruht beim Beginn des Prozesses dieser Magnet in seiner Gleichgewichtslage, so kann man nach S. 247 u. f. aus der Art der von ihm infolge der Induktionswirkung begonnenen Bewegung einfach und sicher auf das für die ganze Dauer der Induktion gebildete Zeitintegral der Strömung, den sogenannten Integralstrom,

$$\int I\,dt = J, \qquad 218)$$

zurückschließen.

Über dessen Wert geben also die Beobachtungen relativ zuverlässigen Aufschluß, und an die ihn betreffenden Resultate hat die Theorie anzuknüpfen.

Beiläufig möge bemerkt werden, daß die Dauer des Induktionsvorganges, wie sie oben eingeführt ist, zwar jedenfalls sehr nahe mit der Dauer der äußern Einwirkung, d. h. also hier der Bewegung des induzierenden Systemes zusammenfällt, daß dies aber doch nicht völlig strenge gilt; in der That haben feine Beobachtungen, auf die

wir weiter unten eingehen werden, sichergestellt, daß im allgemeinen eine elektrische Strömung — bald aperiodisch, bald in gedämpften Schwingungen, immer aber sehr schnell verklingend — auch noch nach dem Aufhören der äußern Einwirkung im Leiter zurückbleibt. Hier genüge es, wegen gewisser Folgerungen nur die Thatsache hervorzuheben. —

Als direkte Ursache des Stromes sind, wie gesagt, induzierte elektrische Kräfte zu betrachten; bezeichnen wir deren Komponente in einem Element des induzierten linearen Leiters s, nach dessen Richtung genommen, mit S, und wenden die Resultate von § 23, insbesondere die Formel (151') an, so finden wir die Stärke I des von ihr bewirkten Stromes gleich $\mathfrak{l} q S$. Die Stromstärke ist ebensowenig, wie S, innerhalb des Leiters konstant, und I wird daher nach S. 226 längs des Leiters s Ladungsänderungen und in Verbindung hiermit Potentialschwankungen bewirken, die ihrerseits auf die Strömung zurückwirken. Bezeichnen wir die elektrische Potentialfunktion auf ds mit φ', so erhalten wir für den Strom den ganz allgemeinen Ansatz

218') $$I = \mathfrak{l} q \left(S - \frac{\partial \varphi'}{\partial s}\right).$$

Auch dieser Ausdruck ist auf s weder zeitlich, noch räumlich konstant; indessen kann man, wenn die Strömung allein auf der Induktionswirkung beruht, behaupten, daß das Zeitintegral über die ganze Dauer des veränderlichen Vorganges $\int I dt = J$ für jede Stelle des induzierten und nach Annahme unverzweigten Leiters — inklusive der Windungen des angeschlossenen Galvanometers — konstant sein muß. Denn in diesem Falle ist, wie oben erörtert, nach Ablauf der Induktion der Gleichgewichtszustand wieder hergestellt, der vorher herrschte, und dies ist nach dem S. 226 Gesagten nur möglich, wenn durch jeden Querschnitt die gleiche Gesamtströmung J hindurchgegangen ist. Wir dürfen somit

218'') $$J = \mathfrak{l} q \int \left(S - \frac{\partial \varphi'}{\partial s}\right) dt$$

als von s unabhängig betrachten. Schreiben wir diese Formel in der Gestalt

$$J \frac{ds}{\mathfrak{l} q} = \left[\int S dt - \frac{\partial}{\partial s}\left(\int \varphi' dt\right)\right] ds,$$

so können wir über den ganzen Leiterkreis integrieren und erhalten, da φ', und somit $\int \varphi' dt$, nach ihrer Bedeutung einwertig sind,

$$J \int \frac{ds}{\mathfrak{l} q} = \int ds \int S dt = \int dt \int S ds.$$

Hierin steht links neben J nach der Definition (191'') der Widerstand W des linearen Leiterkreises, rechts das Zeitintegral der gesamten induzierten elektrischen Kraft; kürzen wir also die beiden resp. über den ganzen geschlossenen Leiterkreis und über die ganze Dauer der Induktion genommenen Integrale ab, indem wir setzen

$$\int S\,ds = L, \quad \int L\,dt = T, \tag{218'''}$$

so lautet das erhaltene Resultat

$$J W = T. \tag{218''''}$$

Diese Formel, die durchaus dem in (189''') enthaltenen Ohm'schen Gesetz entspricht, würde sich auch ergeben, wenn die Stromstärke I, und somit das Aggregat lqS, längs des ganzen induzierten Leiters konstant wäre; ihre Herleitung zeigt aber, daß man keineswegs aus ihrer Gültigkeit Rückschlüsse auf das Verhalten von I machen darf.

Eine wichtige Bemerkung ist an das Linienintegral $L = \int S\,ds$ der induzierten elektrischen Kraft zu knüpfen, das man kurz als die ganze induzierte elektromotorische Kraft bezeichnen kann.

Wenn die elektrische Kraft S eine einwertige Potentialfunktion besäße, wie dies für die im vorigen Kapitel vorausgesetzten stromerregenden elektrischen Kräfte ausnahmslos galt, so würde L verschwinden; da dies Verhalten aber das Verschwinden des Integralstromes J bedingen würde, so ist aus dem Zustandekommen eines solchen Stromes, von dessen Voraussetzung wir oben ausgegangen sind, zu schließen, daß die in dem linearen Leiter induzierte elektrische Kraft S entweder eine mehrwertige oder überhaupt keine Potentialfunktion besitzt. Wir werden auf dies Resultat später zurückgreifen. —

Im Vorstehenden haben wir so verfahren, als ob die beobachtete magnetische Wirkung ausschließlich von dem Leitungsstrom herrührte, während wir doch im vorigen Paragraphen gezeigt haben, daß, wenn jener nicht stationär ist, ein zweiter Strömungsvorgang, der Polarisationsstrom, einsetzt, von dem gleichfalls magnetische Kräfte ausgehen. Indessen ist der letztere auf das Integral der Wirkung, um das es sich im Vorstehenden allein handelte, in der That ohne Einfluß; denn da die Komponenten des Polarisationsstromes mit Differentialquotienten nach der Zeit proportional sind, so werden ihre Zeitintegrale durch die Differenz der Anfangs- und Endwerte der Polarisationen gemessen, sind also in dem oben vorausgesetzten Falle, wo beide Endzustände identisch sind, jedenfalls gleich Null. Wir dürfen demgemäß den Polarisationsstrom bei

diesen Entwickelungen außer Betracht lassen, kommen aber später ausführlich auf ihn zurück.

Nach diesen Resultaten giebt uns die Formel (218''') das Mittel zur Bestimmung des Zeit- und Linienintegrales T der elektrischen Kraft aus den experimentell leicht und sicher zu gewinnenden Werten von J und W.

Als Grundlage für die weiteren theoretischen Entwickelungen wollen wir die folgenden, so gewonnenen Eigenschaften von T benutzen, die für den Fall erhalten sind, daß der induzierte lineäre Leiter ruht, das induzierende System ein permanenter, in Bewegung gesetzter Magnet ist, und die Induktion im unbegrenzten leeren Raum — wofür auch der Luftraum zu setzen ist, — vorgenommen wird. Die Magnetisierbarkeit des lineären Leiters braucht nicht ausgeschlossen zu werden, da sie nach S. 271 auf die vom induzierten Strome geübte Wirkung keinen Einfluß übt.

Der Wert von T ist bei sonst gleichen Umständen unabhängig von der Substanz des induzierten lineären Leiters, sowie von der Stärke und der Richtung eines etwa in ihm stattfindenden konstanten Stromes.

Das Erstere kann man experimentell am einfachsten dadurch nachweisen, daß man in die Schließung eines Galvanometers hintereinander zwei identisch gestaltete lineäre Leiter von verschiedener Substanz, etwa zwei gleiche Rollen aus verschiedenen Drähten schaltet, und dann den induzierenden Magneten einmal gegen die eine, dann gegen die andere in identischer Weise bewegt. Man erhält dann am Galvanometer den gleichen Ausschlag als Beweis für gleiches J; da aber der Leiterkreis bei beiden Beobachtungen derselbe war, so entspricht gleichem J auch gleiches T.

Das Letztere läßt sich beweisen, indem man bei stattfindendem konstanten Strom die Nadel des Galvanometers, etwa durch einen geeignet aufgestellten permanenten Magneten, in die Position bringt, die sie ohne Strom einnahm, und hierauf die Induktion wirken läßt. Zieht man die durch den Magneten geänderte magnetische Feldstärke im Galvanometer in Rechnung, so gelangt man zu demselben Wert von J und daher von T, wie in dem Falle fehlenden konstanten Stromes.

Der Wert von T ist ferner bei sonst gleichen Umständen unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der ein und derselbe Lagenwechsel des induzierenden Magneten ausgeführt wird; er ist auch unabhängig von dem Wege, auf welchem jener stattfindet, solange die verglichenen Wege jedes

Punktes des Magneten ineinander übergeführt werden können, ohne den induzierten Leiter zu schneiden.

Man beweist dies am einfachsten, indem man den induzierenden Magneten einen beliebigen Kreisprozeß ausführen läßt; wie derselbe auch immer gewählt werde, jederzeit findet sich, falls nur die von allen Punkten des induzierenden Systemes zurückgelegten Wege den induzierten Leiter nicht umschlingen, J und demgemäß auch T gleich Null.

Hieraus folgt, daß bei demselben induzierten und induzierenden System und bei Bewegungen, die der gemachten Voraussetzung entsprechen, T allein von der relativen Lage beider Systeme am Anfang und am Ende der Veränderungen abhängen kann.

Das allgemeine Gesetz dieser Abhängigkeit ist zu kompliziert, um aus der Beobachtung erschlossen zu werden, es läßt sich aber aus Beobachtungen über die induzierende Wirkung eines einzelnen Magnetpoles ableiten, über dessen Herstellung S. 160 gesprochen ist. Diese ergeben nämlich, daß die durch die Bewegung eines Magnetpoles induzierte elektromotorische Kraft T proportional ist mit dem Zuwachs, welchen die Kegelöffnung von dem Pol nach dem induzierten linearen Leiter bei der Überführung aus der Anfangs- in die Endposition des Poles erhält.

Fügen wir endlich noch die Erfahrungsthatsache hinzu, daß die Integralkräfte T_h, welche durch gleichzeitige Bewegung mehrerer Pole (h) induziert werden, sich summieren, so ist damit die experimentelle Grundlage für die Ableitung eines wichtigen allgemeinen Gesetzes über die Induktion eines ruhenden linearen Leiters gewonnen.

Aus der zweiten der oben citierten Erfahrungsthatsachen können wir nämlich zunächst schließen, daß L sich von dem vollständigen Differentialquotienten einer allein von dem augenblicklichen Zustand des Systemes abhängigen Funktion χ' nach der Zeit nur um ein additives Glied unterscheiden kann, das, über die Dauer des ganzen Induktionsvorganges integriert, verschwindet; wir setzen demgemäß

$$L = \int S\,ds = \frac{d\chi'}{dt} + \chi, \tag{219}$$

worin also das Integral $\int \chi\,dt$, in der angegebenen Weise gebildet, stets gleich Null ist, und χ darum durch die bisherigen Beobachtungen nicht bestimmt wird.

Die erste Erfahrungsthatsache ergiebt dann, daß χ' von der Substanz des induzierten Leitersystemes unabhängig ist und somit

allein von seiner Konfiguration relativ zu dem induzierenden Magneten abhängen kann; die dritte und vierte bestimmt diese Funktion für den Fall der Induktion durch einen bewegten Magnetpol genauer als mit der Stärke m des Poles und mit der Öffnung ω des von ihm nach dem Leitersystem konstruierten Kegels proportional.

Wir setzen demgemäß, indem wir mit c_1 einen universellen konstanten und zwar positiven Faktor bezeichnen, für den speziellen Fall eines einzelnen Poles

$$\chi' = c_1 m \omega,$$

und erhalten daraus

219′) $$L_1 = \int S_1 \, ds = c_1 m \frac{\partial \omega}{\partial t} + \chi_1.$$

Das positive Vorzeichen des ersten Gliedes rechts entspricht der Erfahrung; denn wenn man die dem Pol zugewandte Seite der vom Strom umflossenen Fläche als ihre positive bezeichnet und wenn man demgemäß s und J positiv rechnet, falls sie diese Fläche positiv umkreisen, so bewirkt bei positivem m eine Vergrößerung von ω einen positiven Strom J.

Das erhaltene Resultat läßt sich noch anders darstellen, wenn man berücksichtigt, daß $m\omega/v$ nach S. 233 das Potential der Wechselwirkung zwischen dem Pol m und dem vom Strome $+1$ durchflossenen Leiterkreis ist; bezeichnen wir dasselbe mit Γ_1 und setzen $v c_1 = c$, so können wir schreiben

$$L_1 = \int S_1 \, ds = c \frac{\partial \Gamma_1}{\partial t} + \chi_1.$$

Wenden wir endlich noch den Satz über die Summation gleichzeitiger induzierender Wirkungen an, so erhalten wir für die in dem linearen Leiter durch die Bewegung eines beliebigen magnetischen Systemes induzierte elektromotorische Kraft die Formel

219″) $$L = \int S \, ds = c \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \chi,$$

worin Γ, das sogenannte virtuelle Potential der Wechselwirkung zwischen Magnet und Leiter, wie oben Γ_1, die Stromstärke $+1$ im Leiter voraussetzt, und χ dieselbe Bedeutung hat, wie in (219).

§ 37. Das Linienintegral der in einem ruhenden linearen Leiter durch beliebige Veränderungen induzierten elektrischen Kraft. Die Bestimmung der Induktionskonstanten. Dimensionen und Einheiten.

Die vorstehenden Entwickelungen waren auf den speziellen Fall der Induktion durch einen bewegten permanenten Magneten be-

schränkt; die erhaltenen Resultate lassen sich aber leicht auf zahlreiche andere Fälle der Induktion übertragen und erweitern.

Insbesondere ist leicht erkennbar, daß sie ungeändert gelten, wenn die zeitlichen Änderungen des virtuellen Potentiales Γ nicht durch eine Bewegung des induzierenden Magneten bewirkt werden, sondern durch eine Veränderung seines magnetischen Zustandes.

Um dies einzusehen, benutzen wir das S. 364 ausgesprochene Beobachtungsresultat, daß J von dem Wege, auf dem das induzierende System aus der Anfangs- in die Endlage übergeführt wird, unabhängig ist. Die induzierende Wirkung eines endlichen magnetischen Systemes ist daher die gleiche, wenn wir es ungeändert ins Unendliche rücken, als wenn wir zunächst im Endlichen seine einzelnen Volumenelemente so gegeneinander drehen, daß ein gewünschter neuer magnetischer Zustand (2) erzielt wird, hierauf das System ins Unendliche rücken und schließlich dort den ursprünglichen Zustand (1) wieder herstellen. Da die letztere im Unendlichen vorgenommene Veränderung nicht induzierend wirkt, so ist die Wirkung der in dem ruhenden Magneten vorgenommenen Veränderung die gleiche, als wenn der Magnet, mit der Differenz der spezifischen Momente in den Zuständen (1) und (2) versehen, ungeändert ins Unendliche gerückt würde.

Von besonderer Wichtigkeit sind die speziellen Fälle der Entstehung und der Vernichtung von Magnetismus in einem ruhenden Körper. Nach dem Vorstehenden kann man die Magnetisierung eines Körpers durch bloße Drehung seiner Volumenelemente aufheben, wenn man dieselbe so vornimmt, daß der ganze Körper zu einem System geschlossener homogener Linearmagneten wird, die ein virtuelles Potential auf den Leiter dann nicht ausüben, wenn der Leiter ihre Axen nicht umschlingt. Ebenso kann man umgekehrt für unsere Zwecke einen unmagnetischen Körper aus solchen Linearmagneten zusammengesetzt und die Magnetisierung durch Drehung der Volumenelemente aus dieser Anordnung bewirkt denken. Es folgt hieraus, daß die Erregung von Magnetismus in einem ursprünglich unmagnetischen Körper mit dem Transport des Körpers in seinem erregten Zustand aus Unendlich her, das Verschwinden von Magnetismus mit dem Transport des magnetischen Körpers nach Unendlich hin äquivalent ist.

Die vorstehenden Überlegungen verlieren anscheinend ihre Anwendbarkeit in den singulären Fällen, wo die vorausgesetzte Bewegung des Magneten nach dem Unendlichen hin durch die

Anordnung des Leiters gegen den Magneten unmöglich gemacht wird, so z. B. dann, wenn der Magnet selbst Ringgestalt hat und der lineäre Leiter durch ihn hindurchgeschlungen ist, z. B. eine über den Ring gewundene Rolle darstellt. Indessen hindert nichts daran, den Magneten in Stücke zerlegt aus den Windungen hinaus und nach Unendlich geführt zu denken. Somit ordnen sich auch jene singulären Fälle dem allgemeinen Gesetz der Magnetoinduktion unter. —

Die erhaltene Grundformel (219″) kann man ferner sogleich auf die Induktion eines ruhenden lineären Leiters durch ein bewegtes oder in gegebener Weise verändertes Stromsystem, d. h. auf die sogenannte Elektro- oder Voltainduktion, übertragen, wenn man die fundamentale Annahme macht, daß, wie bezüglich der elektromagnetischen und elektrodynamischen Wirkungen, auch bezüglich der induktorischen jedes Stromsystem, enthalte es nun nur Leitungsströme, oder auch Konvektions- und Polarisationsströme, durch dasselbe magnetische System ersetzbar ist, eine Annahme, die durch die Erfahrung vollkommen bestätigt wird. Es ist dann nur in der Formel (219″) Γ als das virtuelle magnetische Potential des induzierenden Stromsystemes auf das Leitersystem zu deuten.

Der in dem Leiter selbst erregte, mit der Zeit veränderliche Strom stellt gleichfalls ein induzierendes System dar; auch seine Wirkung wird durch die Formel (219″) umfaßt, wenn man nur Γ dementsprechend interpretiert. Allerdings liegt hier eine nicht unerhebliche prinzipielle Schwierigkeit vor, die uns weiter unten noch beschäftigen wird.

Eine noch weitere Ausdehnung des Gültigkeitsbereiches der Grundformel (219″) erhält man durch die Überlegung, daß, weil die Beobachtungsresultate auf S. 364 aus Experimenten geschlossen sind, bei denen die absolute Bewegung des induzierten und des induzierenden Systemes ganz unbekannt und jedenfalls nicht stets dieselbe gewesen ist, überhaupt nur die relative Bewegung beider Systeme gegeneinander die eintretende Induktion bedingen kann. Wir können demgemäß unsere Grundformel unmittelbar auf den Fall übertragen, daß das induzierte System relativ zur Erde beliebig, indessen stets wie ein starrer Körper bewegt wird, während das induzierende im Ganzen oder in Teilen bewegt sein kann. Sowie man ein mit dem induzierten System fest verbundenes Koordinatensystem einführt, hat man die früheren Verhältnisse vollständig wiederhergestellt.

Besteht der induzierte Leiter, wie oben angenommen, aus zwei Teilen — Induktionsrolle und Galvanometer — die durch zwei einander sehr nahe und parallel geführte Drähte verbunden sind, so kann man auch den einen Teil bewegen, den andern ruhen lassen; jeder von beiden läßt sich nämlich als ein geschlossener Leiter betrachten, da die in dem Verbindungsstück induzierte elektromotorische Kraft, als in benachbarten Leiterelementen gleich, aber entgegengesetzt wirkend, in dem Linienintegral $L = \int S\,ds$ sich zerstört.

Abschließend möge erwähnt werden, daß die Erfahrung die Gültigkeit der Grundformel (219″) auch in dem allgemeinsten, aber bis jetzt ausgeschlossenen Falle ergiebt, daß das induzierte System ganz beliebig verändert, z. B. deformiert wird. Wir werden hieraus aber erst gegen Ende dieses Kapitels Folgerungen ziehen. —

Auf Grund der im vorstehenden vorgenommenen Erweiterungen ihrer Anwendbarkeit schreiben wir jetzt die Grundformel (219″)

$$L = \int S\,ds = c\,\frac{d\Gamma}{dt} + \chi$$

und können nunmehr mit ihrer Hilfe auch Wichtiges über die unbekannte Funktion χ aussagen, von der wir bisher nur wissen, daß ihr Zeitintegral über die ganze Dauer der Induktion stets verschwindet.

Nach dem S. 368 Erörterten ist klar, daß mit dem primären Vorgang der Induktion eines linearen Leiters durch ein irgendwie veränderliches, magnetisch wirkendes System im allgemeinen noch sekundäre Vorgänge verbunden sind, darunter vor allem die Selbstinduktion des Leiters, wenn die in ihm induzierte Stromstärke zeitlich veränderlich ist. Wir haben Ursache, anzunehmen, daß jene nach Abschluß der äußeren Veränderungen noch andauernden Induktionserscheinungen, welche zu der Einführung der Funktion χ Veranlassung gaben, auf derartigen sekundären Vorgängen beruhen, und werden den Zusammenhang mit ihnen weiter unten ausführlich entwickeln.

Nun sind aber jene sekundären Vorgänge nicht wesentlich von den primären verschieden: es sind Induktionen durch zeitlich veränderliche Ströme und Magnete, nur ist das Gesetz dieser Veränderung nicht direkt vorgeschrieben. Infolgedessen dürfen wir annehmen, daß sie demselben Grundgesetz folgen, wie die primären, daß also auch χ die Gestalt $c\,d\Gamma'''/dt$ besitzt, worin Γ''' das virtuelle Potential derjenigen Ströme resp. Magnetismen auf den induzierten Leiter bezeichnet, die infolge der gegebenen Veränderungen $d\Gamma/dt$ entstehen.

Infolge dessen schreiben wir die Gleichung (219'') nunmehr [105]

$$L = \int S\,d\,s = c\,\frac{d(\Gamma + \Gamma'')}{d\,t} = c\,\frac{d\,\Gamma'}{d\,t}, \tag{220}$$

worin Γ' das ganze induzierend wirkende virtuelle Potential und der Differentialquotient seine vollständige zeitliche Änderung bedeutet; in Analogie mit früheren Bezeichnungen könnte man Γ' das freie virtuelle Potential nennen.

In dieser Gestalt, wo wir allerdings Γ'' zunächst als eine unbekannte Funktion führen müssen, wollen wir unser Endresultat besonders bei allgemeinen Entwickelungen benutzen; für spezielle Anwendungen ist diese Form nur dann geeignet, wenn infolge der speziellen Art der vorliegenden Probleme die Funktion Γ'' sich bestimmen läßt. Wir werden solche Fälle weiter unten anführen. —

Für die über die ganze Dauer des Induktionsvorganges gebildete Integralstromstärke J ergiebt die Gleichung (218'''') in Verbindung mit (220)

$$J\,W = T = \int L\,d\,t = c(\Gamma_2 - \Gamma_1), \tag{220'}$$

wobei die Indices (1) und (2) sich auf die Zustände vor und nach dem Induktionsvorgange beziehen; J ist von der Funktion Γ'' unabhängig.

Mitunter lassen sich die Verhältnisse so einrichten, daß in der Formel (220) $d\,\Gamma''/d\,t$ neben $d\,\Gamma/d\,t$ vernachlässigt werden kann; dann sind die sekundären Wirkungen unmerklich, und es gilt

$$L = c\,\frac{d\,\Gamma}{d\,t}. \tag{220''}$$

Zugleich kann man unter diesen Umständen jeden beliebigen Zeitabschnitt als Dauer eines selbständigen Induktionsvorganges betrachten und infolge hiervon die Formel (218'''') auch auf ein jedes Zeitelement $d\,t$ anwenden. Bezeichnen wir wieder mit I die induzierte Stromstärke, so ist $I\,d\,t$ der dem Integralstrom J für die Zeit $d\,t$ entsprechende Wert, und wir erhalten somit

$$I\,W = c\,\frac{d\,\Gamma}{d\,t}, \tag{220'''}$$

eine Formel, die, als zunächst nur auf ein Zeitelement $d\,t$ bezogen, das Gesetz des Differentialstromes genannt wird.

Die Formeln (220') bis (220''') setzen voraus, was ausdrücklich betont werden mag, daß der geschlossene lineäre Leiter andere als die induzierten elektromotorischen Kräfte nicht enthält. Im anderen Falle würden dieselben sich mit L additiv verbinden. —

Die oben abgeleiteten Resultate enthalten eine noch unbestimmte universelle positive Konstante c, die sogenannte Induktionskonstante, deren Bedeutung jetzt klarzustellen ist. Wir benutzen hierzu die Gleichung (220') für die Integralstromstärke, in der wir die Bedeutung aller sonst vorkommenden Glieder ausführlich erörtert haben.

Stellen wir uns zunächst auf den Standpunkt des S. 229 besprochenen elektromagnetischen Maßsystemes, das wir durch den Index $\varepsilon\mu$ charakterisierten, so ist in dieser Formel (220') zwar J und Γ nach Dimensionen und Einheiten bestimmt, nicht aber W. Wir haben also innerhalb des Rahmens der bisherigen Verfügungen die Möglichkeit, c beliebig festzusetzen, und es liegt nahe, dafür eine reine Zahl und zwar die Einheit zu wählen, also

$$[c_{\varepsilon\mu}] = 1 \text{ und } c_{\varepsilon\mu} = 1 \tag{221}$$

zu machen.[106])

Hierdurch ist nun auch Dimension und Einheit von W bestimmt. Wir haben nämlich nach (154'')

$$[I_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2}\, l^{1/2}\, t^{-1},$$

also

$$[J_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2}\, l^{1/2}; \tag{221'}$$

ferner ist $I\Gamma$ das wirkliche Potential Ψ der Wechselwirkung zwischen dem Strom I und dem induzierenden System, und es gilt stets

$$[\Psi] = m\, l^2\, t^{-2}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$[\Gamma_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1} \tag{221''}$$

und

$$[W_{\varepsilon\mu}] = l\, t^{-1}; \tag{221'''}$$

der elektrische Widerstand ist also im elektromagnetischen Maßsystem eine Geschwindigkeit.

Berücksichtigt man, daß bei Induktion durch einen Einheitspol im gleichen System Γ der Kegelöffnung ω nach dem linearen Leiter hin gleich ist, so erhält man als elektromagnetische Widerstandseinheit denjenigen Widerstand, innerhalb dessen der Einheitspol den Integralstrom Eins induziert, während ω um die Einheit zu- oder abnimmt. Als technische Widerstandseinheit wird das Ohm geführt, dessen Wert in absoluten Einheiten gleich 10^9 ist.

Das Ohm'sche Gesetz $IW = L$ verbindet die sogenannte elektromotorische Kraft L mit I und W, und man erhält aus ihm leicht die Dimensionalgleichung

$$[L_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-2}; \tag{222}$$

die technische Einheit der elektromotorischen Kraft heißt das Volt und beträgt 10^8 absolute Einheiten. Berücksichtigt man, daß nach S. 229 die technische Stromeinheit, das Ampère, gleich 10^{-1} absoluten Einheiten ist, so ergiebt sich, daß in einem geschlossenen lineären Leiter von 1 Ohm Widerstand eine elektromotorische Kraft von 1 Volt einen Strom von 1 Ampère bewirkt.

Da die elektromotorische Kraft durch Differenzen von Potentialfunktionen gegeben ist, so folgt

222′) $$[\varphi_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2} l^{3/2} t^{-2},$$

und da sie gleichzeitig als das Linienintegral der elektrischen Kraft K definiert ist, so erhält man auch

222″) $$[K_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2} l^{1/2} t^{-2}.$$

Die technische Einheit für φ ist das Volt, ebenso wie für L.

Was die Elektricitätsmenge oder Ladung E angeht, so definiert sie auch das elektromagnetische System durch die Beziehung (155)

$$I = dE/dt,$$

welche die elektrische Strömung mit der Bewegung einer elektrischen Ladung äquivalent setzt; dieselbe ergiebt sogleich

222‴) $$[E_{\varepsilon\mu}] = m^{1/2} l^{1/2},$$

und bei Kombination mit der Definition (10″) der Kapazität C auch

222⁗) $$[C_{\varepsilon\mu}] = l^{-1} t^2.$$

Als technische Einheit für E ist das Coulomb eingeführt, nämlich die Ladung 10^{-1}, welche der Strom von ein Ampère in einer Sekunde durch den Querschnitt des Leiters bewegt; als technische Einheit für C das Farad, nämlich die Kapazität 10^{-9}, die derjenige Leiter besitzt, der durch die Elektricitätsmenge 1 Coulomb auf das Potential 1 Volt geladen wird.

Man kann das elektromagnetische Maßsystem, das hiermit im wesentlichen abgeschlossen ist, als definiert ansehen durch die Verfügung über die Konstanten des Coulomb'schen magnetischen, des Biot-Savart'schen elektromagnetischen und des Neumann-schen Induktionsgesetzes; es folgt hieraus, daß dann die Konstante des Coulomb'schen elektrostatischen Elementargesetzes nicht mehr verfügbar ist, sondern eine durch die Beobachtung zu bestimmende Größe darstellt.

Eine hierzu verwendbare Messung ist die S. 248 erwähnte, welche dort zur Bestimmung der Konstante v benutzt worden ist

und jene gleich der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum ergab. Benutzen wir die Beziehung (155′)

$$I = v\, I_{\varepsilon\mu}\,, \tag{223}$$

so ergiebt die Gleichung $I = dE/dt$ auch

$$E = v\, E_{\varepsilon\mu}\,; \tag{223'}$$

hierbei sind, wie früher, die Werte I und E ohne Index in dem hier allgemein benutzten wissenschaftlichen Maßsystem ausgedrückt gedacht. Da aber in demselben System die mechanische Kraft K zwischen zwei Massenpunkten mit den Ladungen e_1 und e_2 im leeren Raum lautet

$$K = \frac{e_1\, e_2}{r^2}\,,$$

so ergiebt sich auch

$$K = v^2 \frac{(e_1\, e_2)_{\varepsilon\mu}}{r^2}\,; \tag{223''}$$

die Konstante dieses Gesetzes ist also im elektromagnetischen System gleich v^2. —

Gehen wir nun zu dem früheren wissenschaftlichen oder elektrostatisch-magnetischen System über, so ist zu berücksichtigen, daß dasselbe, wie S. 230 ausgeführt ist, alle Verfügungen aus den Kapiteln I und II beibehält; es ist demgemäß in demselben auch Dimension und Einheit des Widerstandes W bereits bestimmt. Sonach ist auch die Konstante c in Formel (219″) nicht mehr verfügbar; indessen bedarf es auch keiner neuen Beobachtung zu ihrer Bestimmung.

Nach (155″) ist nämlich zunächst

$$[I] = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-2}\,,$$

also wird

$$[J] = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-1}. \tag{224}$$

Multiplizieren wir ferner die Gleichung (220′) mit einer willkürlichen Stromstärke I und setzen wieder $I\Gamma = \Psi$, so wird

$$J\, I\, W = c(\Psi_2 - \Psi_1)\,,$$

und da Ψ, das wirkliche Potential der Wechselwirkung zwischen dem induzierten und induzierenden, vom Strom I durchflossenen System, von den elektrischen und den magnetischen Einheiten unabhängig ist, so kann man schreiben

$$J\, I\, W = c\,(J\, I\, W)_{\varepsilon\mu}$$

oder, da wegen (223) $J = v\, J_{\varepsilon\mu}$ ist, auch

$$v\, I\, W = c\,(I\, W)_{\varepsilon\mu}.$$

Nun ist IW die elektromotorische Kraft L, welche den Strom I im Leiter vom Widerstand W erhalten würde; es gilt somit auch

$$vL = c L_{\varepsilon\mu}.$$

Ferner ist L durch eine Summe von Sprüngen der Potentialfunktion φ definiert, und φ selbst durch das Verhältnis eines elektrischen Potentiales Φ und einer elektrischen Ladung E. Da aber Φ von den elektrischen Maßsystemen unabhängig ist, dagegen $E = v E_{\varepsilon\mu}$ gilt, so folgt

224′) $$vL = L_{\varepsilon\mu},$$

und durch Vergleichung der beiden letzten Formeln

224″) $$[c] = 1 \text{ und } c = 1;$$

in unserem wissenschaftlichen Maßsystem ist also die Induktionskonstante c eine reine Zahl und zwar der Einheit gleich.[107])

Da sich hiernach c im technischen und im wissenschaftlichen System gleich findet, so wollen wir den Wert $c = 1$ auch in unsere allgemeinen Formeln einführen.

Kombiniert man die Beziehungen (223) und (224′) mit der Definition des Widerstandes durch das Ohm'sche Gesetz $W = L/I$, so ergiebt sich sofort

224‴) $$W v^2 = W_{\varepsilon\mu}, \quad \mathfrak{l} = v^2 \mathfrak{l}_{\varepsilon\mu};$$

die Leitungsfähigkeit $\mathfrak{l}$ im wissenschaftlichen System ist also das v^2-fache des Wertes $\mathfrak{l}_{\varepsilon\mu}$ im technischen System. Damit ist das Mittel gegeben, auf einfache Weise die Größenordnung von $\mathfrak{l}$ zu bestimmen. Nach den Beobachtungen ist 1 Ohm, d. h. der Widerstand 10^9, gleich demjenigen eines Quecksilberfadens von 106 cm Länge und 0,01 cm² Querschnitt. Hiernach ist also die Leitungsfähigkeit $\mathfrak{l}'_{\varepsilon\mu}$ des Quecksilbers gleich $1{,}06 \cdot 10^{-5}$. Da aber v gleich $3 \cdot 10^{10}$ ist, so wird $\mathfrak{l}'$ sehr nahezu gleich 10^{16}.

Dieses Resultat ist von großer Tragweite.

In den allgemeinen elektromagnetischen Gleichungen (215‴) und (217″) treten in den Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der wahren elektrischen Gesamtströmung jederzeit nebeneinander und additiv miteinander verbunden die Komponenten des Leitungs-, des Konvektions- und des Polarisationsstromes auf, wie folgt

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \varrho_e u' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \ldots;$$

hierin ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l}_{11} X + \mathfrak{l}_{12} Y + \mathfrak{l}_{13} Z, \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{d}_{11} X + \mathfrak{d}_{12} Y + \mathfrak{d}_{13} Z,$$

. . . .

Die oben abgeleitete ungeheure Größe der Leitungskonstanten $\mathfrak{l}$ resp. $\mathfrak{l}_{hk}$ hat zur Folge, daß die beiden letzten Glieder in den Ausdrücken für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ neben dem ersten nur in speziellen Fällen merklich sind. Sehen wir z. B. von Konvektion ab, betrachten ein isotropes Medium und periodische Schwingungen der elektrischen Kraft nach dem Gesetz $X = A \sin \alpha (t + t_0), \ldots$, so ergiebt sich für die Amplituden des Leitungsstromes $\mathfrak{l} A, \ldots$, für die des Polarisationsstromes $\mathfrak{d} \alpha A / 4\pi, \ldots$ Die letzteren sind also nur in dem Falle mit den ersteren vergleichbar, wenn $\mathfrak{d} \alpha / 4\pi$ von derselben Größenordnung, wie $\mathfrak{l}$ ist; da die Dielektricitätskonstanten bei allen bekannten Körpern unterhalb 100 bleiben, so führt dies darauf, daß hierzu die Periode der Schwingungen von $X, \ldots$ etwa von der Ordnung von 10^{-14} sein muß.

Um Änderungen von solchen Geschwindigkeiten hervorzubringen, bedarf es besonderer Kunstgriffe, auf die wir später eingehen werden; jedenfalls sind sie nicht durch mechanische Mittel, wie sie z. B. bei der Induktion durch bewegte permanente Magnete in Anwendung kommen, zu erzielen. Wir werden uns demgemäß in den folgenden Abschnitten zunächst mit solchen Vorgängen beschäftigen, bei denen von der Berücksichtigung der Polarisations- und Konvektionsströme — und sonach im allgemeinen überhaupt von der Betrachtung der Dielektrica — abgesehen werden kann, also der Leitungsstrom allein, und zwar nach der S. 351 eingeführten Bezeichnung als quasistationär zu betrachten ist. Die abzuleitenden Gesetze gestatten jederzeit nachträglich zu beurteilen, wie die Umstände quantitativ zu wählen sind, damit die Geschwindigkeiten der eintretenden Veränderungen der gemachten Voraussetzung genügen.

§ 38. Die in einem geschlossenen linearen Leiter durch einen permanenten Magneten induzierten Ströme und die von ihnen ausgehenden magnetischen Kräfte. Die bei der Induktion aufgewandte Arbeit.

Bei Benutzung des oben erhaltenen Wertes der Induktionskonstante c nimmt die Grundformel (220) für das Linienintegral L der in einem geschlossenen linearen Leiter induzierten elektrischen Kraft die Gestalt an

$$L = \int S \, ds = \frac{d(\Gamma + \Gamma'')}{dt} = \frac{d\Gamma'}{dt}. \qquad 225)$$

Enthält der Leiter weiter keine elektromotorische Kraft als L, ist er z. B. homogen oder ausschließlich aus gleichtemperierten Leitern erster Klasse zusammengesetzt, so gilt bei Be-

schränkung auf die am Ende des vorigen Abschnittes festgelegte Größenordnung der Anderungsgeschwindigkeit der virtuellen Potentiale

225′) $$I W = L = \frac{d\Gamma'}{dt}.$$

Für **beliebige** Geschwindigkeiten gilt dagegen die Gleichung (220′) für den Integralstrom, welche jetzt lautet

225″) $$J W = T = \int L\, dt = \Gamma_2 - \Gamma_1$$

und Γ'' garnicht enthält.

Ist infolge der speziellen Bedingungen des Problemes Γ'' neben Γ zu vernachlässigen, so gilt — meist übrigens nur in ziemlich roher Annäherung —

225‴) $$I W = L = \frac{d\Gamma}{dt}.$$

Wir wollen zunächst nur die Induktion durch die relative Bewegung des linearen Leiters als eines starren Körpers gegen einen permanenten Magneten verfolgen und somit Ergänzungen geben zu dem, was in § 36 aus diesem Gebiet zum Zwecke der Ableitung der allgemeinen Gleichungen zusammengestellt ist. Hier ist unter Γ das virtuelle Potential des Magneten auf den Leiter zu verstehen, unter Γ'' dasjenige der in allen vorhandenen Leitern, also auch im Magneten, induzierten Ströme; die Magnetismen, welche vom Magneten influenziert sind, müssen in Γ, die von den Strömen herrühren, in Γ'' berücksichtigt werden. Γ'' ist in den allermeisten Fällen sehr schwierig zu bestimmen, aber wir bedürfen seiner nicht, wenn wir uns auf Fälle beschränken, wo es sich nur um die Beobachtung des **Integralstromes** handelt. —

Die denkbar einfachsten Verhältnisse treten ein, wenn das magnetische Feld ein **homogenes** ist und der als Ganzes bewegte Teil des induzierten linearen Leiters in einer Ebene verläuft. Bezeichnet man hier die Größe der umwundenen Fläche mit F, die Komponente der magnetischen Feldstärke R nach der positiven Normalen n auf F mit N, so ist der Wert des virtuellen Potentiales Γ nach (162‴) gegeben durch

226) $$\Gamma = -\frac{FN}{v},$$

oder wenn man die Komponenten A, B, C von R nach einem beliebigen festen Koordinatensystem X, Y, Z einführt, auch durch

$$\Gamma = -\frac{F}{v}\bigl(A\cos(n,x) + B\cos(n,y) + C\cos(n,z)\bigr).$$

Da Γ von dem Orte unabhängig ist, an dem sich der Leiter befindet, und nur mit dessen Orientierung variiert, so wirkt auch nur eine **Drehung** des Leiters induzierend.

Die obigen Verhältnisse liegen u. a. im Felde der erdmagnetischen Kraft vor. Legen wir die Z-Axe normal zur Erdoberfläche nach unten, die X-Axe im magnetischen Meridian nach Norden, so wird noch einfacher

$$\Gamma = -\frac{F}{v}\left(H\cos(n,x) + V\cos(n,z)\right), \tag{226'}$$

wobei H die horizontale, V die vertikale Komponente von R bezeichnet.

Ist der induzierte Leiter um eine in seiner Ebene liegende Axe drehbar, und steht diese Axe vertikal, so ist $\cos(n,z) = 0$; wird mit dem Leiter eine Drehung aus der Position $(n,x) = 0$ in die Position $(n,x) = \pi$ vorgenommen, so folgt hieraus

$$J_1 W_1 = T_1 = +\frac{2FH}{v}. \tag{226''}$$

Liegt die Axe normal zum magnetischen Meridian, und findet die Drehung aus der Position $(n,z) = 0$ in die Position $(n,z) = \pi$ statt, so ergiebt sich

$$J_2 W_2 = T_2 = +\frac{2FV}{v}. \tag{226'''}$$

Es folgt hieraus

$$\frac{J_2 W_2}{J_1 W_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{V}{H} = \operatorname{tg}\iota, \tag{226''''}$$

wobei ι den Inklinationswinkel der erdmagnetischen Kraft bezeichnet. Da nun T durch die Beobachtung relativ leicht und genau zu bestimmen ist, so geben die Formeln (226'') und (226''') wichtige Methoden zur Bestimmung von H und V; insbesondere aber liefert die Gleichung (226'''') eine höchst bequeme Methode zur experimentellen Bestimmung von ι, denn sie ist von F und v frei, und, wenn die Beobachtungen bei gleichem Gesamtwiderstand W des induzierten Leiters angestellt werden, auch von W; sie nimmt hier nämlich die Gestalt an

$$\frac{J_2}{J_1} = \operatorname{tg}\iota.$$

Ist H auf einem anderen Wege bestimmt, so giebt die Gleichung (226'') ein Mittel an die Hand, um W durch die Beobachtung zu finden; da im technischen Maßsystem $v = 1$ ist, so gilt dort unmittelbar $W_1 = 2FH/J_1$.[108]) —

Wir haben bisher den einfachsten Fall vorausgesetzt, daß das magnetische Feld homogen ist; der allgemeinere eines inhomogenen Feldes bietet zwar großes technisches Interesse, insofern die Bewegung eines linearen Leiters in einem solchen Felde den Grund-

gedanken der meisten elektromagnetischen oder elektrodynamischen Maschinen bildet; indessen ist seine theoretische Bedeutung gering, weil, wie schon im II. Kapitel hervorgehoben, das magnetische Feld eines gegebenen Systemes theoretisch nur selten einigermaßen bestimmbar ist. Man beschränkt sich daher für wissenschaftliche Zwecke meist auf so kleine Bereiche der magnetischen Felder, daß sie als angenähert homogen gelten können, oder benutzt Magnete, die nahezu als homogene Linearmagnete betrachtet werden dürfen.

Ersteres geschieht z. B. bei einer praktisch wichtigen Methode zur Bestimmung der Feldstärke an einem Punkte, wo man die Richtung der Kraftlinien nach der Konfiguration des magnetischen Systemes beurteilen kann, z. B. in einem spaltförmigen Raum zwischen den Polen eines Elektromagneten, wo sie normal zu den Polflächen verlaufen werden.

Bringt man in diesen Raum eine kleine flache Drahtrolle, welche durch lange parallele Zuleitungen mit einem Galvanometer verbunden ist, so wird nach (226)

$$\Gamma_1 = -\frac{FR}{v}$$

sein, wobei F, wie früher, die umlaufene Fläche und R die mittlere Feldstärke auf derselben ist; denn die Kraftlinien verlaufen normal zu F, es ist also N mit R zu vertauschen.

Führt man nun die Rolle mit einer schnellen Bewegung an eine Stelle, wo die Feldstärke verschwindend ist, oder bringt sie in eine Position, wo die Kraftlinien der Fläche F parallel verlaufen, so ist $\Gamma_2 = 0$, also wird

$$T = JW = \frac{FR}{v};$$

aus beobachtetem J, W und F läßt sich also R berechnen. —

Wenn es sich in unserem Falle der Induktion durch relative Bewegung gegen permanente Magneten nicht nur um den Integralstrom J, sondern auch um den Differentialstrom I handelt, so macht sich die Schwierigkeit der Bestimmung des virtuellen Potentiales Γ'' geltend. Dieselbe ist besonders groß, wenn körperliche Leiter vorhanden sind, und die bisherigen Entwickelungen geben noch nicht einmal die Hilfsmittel zu ihrer Bewältigung an die Hand; auch die später abzuleitenden führen der analytischen Schwierigkeiten wegen nur selten zu einem brauchbaren Resultat.

Man wird daher in der Praxis mehr nach Mitteln suchen, den Einfluß der Funktion Γ'' herabzudrücken, als ihn zu bestimmen. Dies geschieht einerseits, indem man körperliche Leiter von einiger

Ausdehnung dem induzierten System fern hält, etwa auch den induzierenden Magneten aus parallelen und gegeneinander isolierten Stahldrähten bildet, andererseits, indem man die Teile des induzierten Leiters einander nicht nahe kommen läßt, besonders nicht Stücke von ihm gleichsinnig parallel leitet, wie dies bei Rollen stattfindet.

Befindet sich z. B. ein einfacher Leiterkreis unter der Einwirkung des Erdmagnetismus, so kann man die Voraussetzungen, unter denen es gestattet ist, Γ'' zu vernachlässigen, als angenähert erfüllt betrachten. Rotiert der Kreis um eine vertikale Axe, und setzt man anschließend an die Bezeichnungen von S. 377 $(n, x) = \nu$, und $d\nu/dt = \nu'$, so ergiebt sich aus (226')

$$L = \frac{FH}{v}\nu' \sin \nu,$$

somit nach (225')

$$I = \frac{FH}{vW}\nu' \sin \nu.$$

Der Integralstrom über ein Vielfaches einer ganzen Umdrehung verschwindet; bringt man dagegen eine Vorrichtung an, welche in den Augenblicken, wo I verschwindet, die Verbindung des bewegten Teiles des Leiters mit dem ruhenden kommutiert, so wird für jeden Umgang $J = 4\,FH/v\,W$. Finden a Umgänge in der Zeiteinheit statt, und ist a hinreichend groß, so ist der Strom äquivalent mit einem konstanten von der Intensität

$$I = \frac{4\,a\,FH}{v\,W}. \text{ —}$$

Die Arbeit $d'A_i$, welche von der Wechselwirkung zwischen dem Magneten und dem vom Induktionsstrom durchflossenen Leiter bei einer Änderung ihrer relativen Lage geleistet wird, besitzt, wenn die Verschiebung langsam genug vor sich geht, um den Strom als einen stationären anzusehen, nach (160''') den Wert

$$d'A_i = -\,d_{MI}\,\Psi_{MI},$$

wobei das rechts stehende elektromagnetische Potential Ψ_{MI} von dem oben bestimmten Differentialstrom zu nehmen, und seine Variation bei konstantem magnetischen und elektrischen Zustand auszuführen ist. Die Arbeit $d'A_a$ der äußeren Kräfte, welche die inneren gerade kompensieren, wird demnach

$$d'A_a = +\,d_{MI}\,\Psi_{MI}.$$

Sind die Verhältnisse derart, daß die sekundären Wirkungen, und somit X'', vernachlässigt werden können, dann giebt dies bei Beziehung auf die Zeiteinheit

227) $$A_a' = \frac{d' A_a}{dt} = \frac{I d\Gamma}{dt} = IL;$$

bezeichnet q den Querschnitt des linearen Leiters, und sind $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die Komponenten der in ihm kreisenden Stromdichte $\mathfrak{i}$, so kann man hierfür wegen der Bedeutung $L = \int S ds$ auch schreiben

227′) $$A_a' = \int I S ds = \int (\mathfrak{u} X + \mathfrak{v} Y + \mathfrak{w} Z) q ds.$$

Der Vorgang findet also ebenso statt, als wenn pro Zeiteinheit an der Volumeneinheit die Arbeit

227″) $$\alpha_a' = \mathfrak{u} X + \mathfrak{v} Y + \mathfrak{w} Z$$

geleistet würde, deren Summe über das ganze System hier übrigens nach S. 363 nicht verschwindet.

Dieses Resultat ergänzt die auf S. 317 u. f. angestellten Überlegungen, indem es zeigt, daß wirklich Anordnungen existieren, bei denen durch mechanische Arbeit eine elektrische Strömung bewirkt werden kann, und daß der Zusammenhang zwischen dieser Arbeit und den Komponenten von $\mathfrak{i}$ und K gerade durch diejenige Formel (196′) vermittelt wird, welche früher allein nach Analogie mit rein mechanischen Vorgängen gebildet worden ist.

Setzt man in (227) für I seinen Wert aus (225‴), so erhält man auch

227‴) $$A_a' = \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)^2 \frac{1}{W} = I^2 W;$$

die Arbeit, welche erforderlich ist, um einen permanenten Magneten und einen an sich stromlosen linearen Leiter gegeneinander zu verschieben, ist also stets positiv, d. h., der induzierte Strom I setzt der vorgenommenen Verschiebung jederzeit einen Widerstand entgegen.[109]) Man kann die Gesamtkomponenten und die Momente dieses Widerstandes, welche jeder der beiden Körper des Systemes bei seiner Bewegung erfährt, nach den früher gegebenen Regeln leicht berechnen.

Wir wollen uns auf den speziellen Fall beschränken, daß die Bewegung in einer Rotation um die feste Z-Koordinatenaxe besteht; bezeichnen wir dann wieder den Drehungswinkel des bewegten Körpers mit ν, seine Rotationsgeschwindigkeit mit ν', so ergiebt sich aus der Formel

$$\delta' A_i = N \delta \nu = - \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \frac{\nu'^2 \delta t}{W}$$

das Drehungsmoment N jenes Widerstandes zu

227⁗) $$N = - \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)^2 \frac{\nu'}{W};$$

N ist somit der Rotationsgeschwindigkeit proportional mit jederzeit negativem Faktor. Hieraus folgt, daß, wenn der Leiter oder der Magnet um eine Axe drehbar ist, eine ihm erteilte Anfangsgeschwindigkeit durch die dämpfende Wirkung dieses Widerstandes allmählich zerstört wird.

$-\partial \Gamma / \partial v$ ist das virtuelle Drehungsmoment, d. h. dasjenige, welches auf den beweglichen Teil wirken würde, wenn in dem Leiter der Strom Eins flösse; nach (227'''') ist N dem Quadrat dieser Größe direkt, dem Widerstand des linearen Leiters indirekt proportional.

Man kann hiernach z. B. auf eine um die Vertikale drehbare Magnetnadel eine sehr große dämpfende Wirkung ausüben, wenn man sie mit einem starken Metallringe dicht umgiebt, dessen Ebene in den magnetischen Meridian fällt; denn hier ist $\partial \Gamma / \partial v$ gleichzeitig groß und W klein.

Andererseits kann man die Bestimmung von N aus der Beobachtung von durch Induktion gedämpften Schwingungen einer Magnetnadel benutzen, um bei bekanntem W das Moment $\partial \Gamma / \partial v$, bei bekanntem $\partial \Gamma / \partial v$ aber W zu berechnen.

Wir haben bei diesen Überlegungen das virtuelle Potential Γ'' der induzierten Ströme und influenzierten Magnetismen außer Betracht gelassen, obwohl es natürlich bei einigen der erwähnten Vorgänge sehr bedeutenden Einfluß zu üben vermag. Indessen überzeugt man sich leicht, daß seine Berücksichtigung die Resultate nur quantitativ, aber nicht qualitativ ändern würde. —

Das gefundene Resultat über die mechanische Arbeit, durch welche ein elektrischer Strom induziert werden kann, wollen wir nun noch benutzen, um die am Ende von § 34 angestellten Betrachtungen über die Umwandelung der Energie bei dem elektrischen Strome noch etwas zu erweitern.

Die vorstehenden Entwickelungen setzten ein Leitersystem voraus, innerhalb dessen keine anderen, als die induzierten elektromotorischen Kräfte wirken; es liegt hier also der Fall vor, der auf S. 350 zu der Formel (213'') führte. Diese Gleichung, die wir wegen der Identität des dortigen A'_m mit dem hier benutzten A'_a

$$A'_a + \Omega' = 0$$

schreiben, drückt aus, daß die ganze bei der Magnetoinduktion aufgewandte Arbeit in dem Leiter als Wärme gewonnen wird. Die letzten Betrachtungen zeigen nun aber genauer, auf welchem Wege diese Umwandelung aus mechanischer in thermische Energie geschieht; es wird nämlich zunächst ein elektrischer Strom induziert, dieser wird durch die Widerstände vernichtet, und erst die hierbei

auftretende JOULE'sche Wärme $-\Omega' = A'_a = I^2 W$ ist die Form, in welcher die umgewandelte Energie schließlich erscheint. —

Wir lassen jetzt die im Eingang dieses Paragraphen gemachte Beschränkung, daß der induzierte Leiter andere, als induzierte elektrische Kräfte nicht enthalten soll, fallen und setzen ausdrücklich voraus, daß in ihm, etwa infolge seiner Konstitution oder Temperierung, noch Kräfte von der in § 30 und 32 mit X', Y', Z' bezeichneten Art wirken; ihr Linienintegral L' sei kurz als die elektromotorische Kraft der Kette bezeichnet. L' bewirkt dann in dem Leiter einen Strom, auch wenn keine Induktion stattfindet, und wir haben somit eine Anordnung vor uns, die der im III. Kapitel vorausgesetzten entspricht.

Es tritt jetzt an Stelle von (225''') die allgemeinere Formel

228) $$I W = L' + \frac{d\Gamma}{dt};$$

wir multiplizieren sie mit I, ersetzen Γ durch seinen Wert Ψ_{MI}/I und erhalten auf diese Weise [110])

228') $$I^2 W - I L' = \frac{d_{MI}\,\Psi_{MI}}{dt},$$

wobei die Indices MI im früheren Sinne benutzt sind.

Hier stellt das erste Glied links wiederum die in dem ganzen induzierten Leiter gewonnene JOULE'sche Wärme $-\Omega'_i$ dar, das zweite Glied giebt nach (210) die Summe aus der Änderung $dE_\varkappa/dt$ der chemischen Energie in den Grenzschichten der Kette und der ebenda frei werdenden Wärme $-\Omega'_\varkappa$; das Glied rechts ist, wie früher, die äußere Arbeit A'_a. Die Formel (228') läßt sich sonach schreiben, falls man $\Omega'_i + \Omega'_\varkappa = \Omega'$ setzt,

228'') $$\frac{dE_\varkappa}{dt} - \Omega' = A'_a,$$

oder bei Beziehung auf die Zeit dt auch

228''') $$dE_\varkappa - d'\Omega = d'A_a;$$

sie zeigt in dieser Gestalt, daß die gegen die magnetischen Kräfte geleistete äußere Arbeit g a n z a u f g e h t i n c h e m i s c h e n u n d t h e r m i s c h e n P r o z e s s e n i n n e r h a l b d e s L e i t e r s. Sie liefert hiermit also die auf S. 283 in Aussicht gestellte Erklärung der merkwürdigen, dort gezeigten Thatsache, daß die gegenseitige Verschiebung von wahren Stromläufen und permanenten Magneten, obwohl sie Arbeit erfordert, doch keine Änderung der magnetischen Energie bewirkt, indem sie den anderweitigen Verbleib des Aufwandes nachweist.

§ 39. Die allgemeinen Formeln der Elektroinduktion in lineären geschlossenen Leitern. Energieumsetzungen bei dieser Induktion. Die Koefficienten der wechselseitigen und der Selbstinduktion. Einfluß der Magnetisierbarkeit des Leiters und seiner Umgebung.

Die Behandlung der durch elektrische Ströme bewirkten sog. Volta-Induktion lineärer Leiter kompliziert sich dadurch, daß hier jederzeit nicht einfache, sondern durch Rückwirkungen vervielfältigte Induktionsvorgänge vorliegen. Zwar traten diese Rückwirkungen streng genommen auch bei der Induktion durch permanente Magnete ein, indessen war es dort möglich, sie durch geeignete Anordnungen auf eine geringe Stärke herabzudrücken; hier ist dies nicht möglich, denn die Rückwirkung des induzierten Leiters auf den induzierenden ist von gleicher Ordnung, wie die primäre Induktion, also unter allen Umständen zu berücksichtigen. Wir müssen daher das Problem von vorn herein in der ganzen Allgemeinheit angreifen und wollen auch, da dies eine wesentliche Komplikation nicht bedingt, in den lineären Leitern andere, als induzierte elektromotorische Kräfte, nämlich solche thermischen oder chemischen Ursprunges, zulassen. Dagegen mag eine Magnetisierbarkeit der Leiter oder ihrer Umgebung zunächst ausgeschlossen bleiben.

Unter diesen Voraussetzungen wird die gesamte, in einem Leiter (k) eines Systemes von p Teilen wirksame elektromotorische Kraft L_k zusammengesetzt sein aus dem von der Induktion u n a b h ä n g i g e n Teil L_k' und dem durch die Induktion bewirkten von dem Betrage $d\Gamma_k'/dt$, worin Γ_k' das virtuelle Potential a l l e r Stromläufe auf den Leiter (k) bezeichnet. Schreibt man das Potential der Wechselwirkung Ψ_{hk} zwischen zwei Stromläufen (h) und (k) mit den Stromstärken I_h und I_k nach (174') in der Form

$$\Psi_{hk} = I_k \Gamma_{hk} = I_h I_k \Pi_{hk}, \tag{229}$$

so ist Γ_k' gegeben durch

$$\Gamma_k' = \Sigma_h \Gamma_{hk} = \Sigma_h I_h \Pi_{hk}, \tag{229'}$$

worin die Summe über alle Werte h i n k l u s i v e k zu erstrecken ist. Π_{hk} hat hierbei, wie Bd. I, S. 149, die Bedeutung des Potentiales der Wechselwirkung zwischen den lineären Leitern (h) und (k), wenn in b e i d e n die Stromstärke Eins stattfindet, und ist gegeben durch

$$\Pi_{hk} = -\frac{1}{v^2}\int\int \cos(s_h, s_k)\frac{d s_h\, d s_k}{r}. \tag{229''}$$

Da die Ströme I_k sich wie stationäre verhalten, so ist die

Formel (225‴) verwendbar und ergiebt hier, falls W_k den Widerstand des Leiters (k), und I_k die induzierte Stromstärke bezeichnet,

229″) $$I_k W_k = L_k = L_k' + \Sigma_h \frac{d\, I_h \Pi_{hk}}{d\, t},$$

worin h und k gleich 1, 2, ... p ist. Multipliziert man diese Formel mit I_k und summiert über alle k, so erhält man

229‴) $$\Sigma_k I_k^2 W_k = \Sigma_k I_k L_k' + \Sigma_k I_k \Sigma_h \frac{d\, I_h \Pi_{hk}}{d\, t}.$$

Von der zweiten Summe rechts nehmen wir zunächst die Glieder vor, die gleichem h und k entsprechen; sie lauten

$$\Sigma_k I_k \frac{d\, I_k \Pi_{kk}}{d\, t}$$

und lassen sich schreiben

$$\tfrac{1}{2} \Sigma_k \left(I_k^2 \frac{d\, \Pi_{kk}}{d\, t} + \frac{d}{d\, t} (I_k^2 \Pi_{kk}) \right).$$

Ähnlich lassen sich die übrigen, welche in dem Schema

$$\Sigma' \left(I_k \frac{d\, I_h \Pi_{hk}}{d\, t} + I_h \frac{d\, I_k \Pi_{kh}}{d\, t} \right)$$

enthalten sind, bei Berücksichtigung von $\Pi_{hk} = \Pi_{kh}$ umformen in

$$\Sigma' \left(I_h I_k \frac{d\, \Pi_{hk}}{d\, t} + \frac{d}{d\, t} (I_h I_k \Pi_{hk}) \right).$$

Benutzt man diese Umformung, so erhält man[111]) aus (229‴)

230) $$\Sigma_k I_k^2 W_k = \Sigma_k I_k L_k' + \tfrac{1}{2} \Sigma_h \Sigma_k I_h I_k \frac{d\, \Pi_{hk}}{d\, t} + \frac{d}{d\, t} (\tfrac{1}{2} \Sigma_h \Sigma_k I_h I_k \Pi_{hk}),$$

oder bei Einführung der Potentiale Ψ_{hk} der Wechselwirkungen und des inneren Potentiales $\Psi_I = \frac{1}{2} \Sigma_h \Sigma_k \Psi_{hk}$:

230′) $$\Sigma_k (I_k^2 W_k - I_k L_k') = \frac{d_I \Psi_I}{d\, t} + \frac{d\, \Psi_I}{d\, t}.$$

Hierin hat der Index I dieselbe Bedeutung, wie auf S. 276 und 282.

Die in dieser Gleichung links stehenden Glieder sind durchaus den in (228′) ebenda befindlichen entsprechend; sie stellen zusammen dar die Summe der in allen Leitern (k) frei werdenden Wärmemengen

$$- \Sigma \Omega_k' = - \Omega'$$

und der in allen Ketten stattfindenden Änderungen der chemischen Energie

$$\Sigma \frac{d\, E_k}{d\, t} = \frac{d\, E_0}{d\, t}.$$

Rechts steht nach (175‴) zunächst die bei den Verschiebungen innerhalb des Leitersystemes pro Zeiteinheit aufgewandte äußere

Arbeit A'_a, und sodann nach dem Inhalt von Formel (176″) der negative Differentialquotient der magnetischen Energie E_m des Systemes nach der Zeit. Infolge hiervon können wir statt (230′) schreiben

$$\frac{dE_0}{dt} - \Omega' = A'_a - \frac{dE_m}{dt}. \tag{230″}$$

Nun ist aber gleichzeitig

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d_I E_m}{dt} + \frac{d_a E_m}{dt},$$

wobei die Indices I und a resp. konstant erhaltene Stromstärken und konstant erhaltene Anordnung bezeichnen, oder anders geschrieben

$$\frac{dE_m}{dt} = -A'_a + \frac{d_a E_m}{dt}.$$

Die Kombination mit (230″) liefert

$$\frac{dE_0}{dt} + \frac{d_a E}{dt} - \Omega' = 2\,A'_a. \tag{230‴}$$

Wird speziell der Vorgang so geleitet, daß die Stromstärken konstant bleiben, so ist $d_a E/dt = 0$, also

$$\frac{dE_0}{dt} - \Omega' = 2\,A'_a, \tag{230⁗}$$

oder auf die Zeit dt bezogen,

$$dE_0 - d'\Omega = 2\,d'A_a.$$

Es erscheint also der doppelte Betrag der bei der Verschiebung geleisteten äußeren Arbeit in Gestalt von thermischer oder chemischer Energie innerhalb der Leiter. Hiermit ist die am Ende von § 29 aufgeworfene Frage nach dem Verbleib dieser Arbeit, die in Form magnetischer Energie nicht fortbestand, gleichfalls erledigt. —

Nach der Grundformel (229′) sind die für die gegenseitige Induktion linearer Leiter maßgebenden Funktionen die Potentiale Π_{hk} zwischen den von den Stromstärken Eins durchflossen gedachten Leitern (h) und (k). Da sie bei vielen, besonders wichtigen Fällen negative Größen sind, so setzt man der Anschaulichkeit halber

$$-\Pi_{hk} = +\frac{1}{\mathfrak{v}^2}\int\!\!\int \cos(s_h, s_k)\frac{ds_h\,ds_k}{r} = +Q_{hk} \tag{231}$$

und bezeichnet allgemein Q_{hk} als den Koefficienten der Induktion zwischen den Leitern (h) und (k), dagegen in dem Falle, daß beide in einen Leiter zusammenfallen, als den Koefficienten von dessen Selbstinduktion.[112])

Die Dimension des Induktionskoefficienten Q in wissenschaftlichen Einheiten folgt aus (229), da $[\Psi] = m\, l^2\, t^{-2}$ und $[I] = m^{1/2}\, l^{3/2}\, t^{-2}$ ist,

231′) $$[Q] = l^{-1}\, t^{+2};$$

in technischen Einheiten ergiebt sich, da für $[\Psi]$ der obige Wert giltig bleibt und $[I_{\epsilon\mu}] = m^{1/2}\, l^{1/2}\, t^{-1}$ ist,

231″) $$[Q_{\epsilon\mu}] = l.$$

Das Verhältnis der beiderseitigen Zahlwerte ist, wie leicht nachweisbar,

231‴) $$Q_{\epsilon\mu} = Q\, v^2.$$

Als technische Einheit für Q dient der Induktionskoefficient 10^9, welcher den Namen Quadrant führt. —

Die Berechnung des Induktionskoefficienten Q_{hk} für zwei lineäre Leiter (h) und (k) bietet prinzipielle Schwierigkeiten nicht, wenn (h) und (k) keine unendlich benachbarten Elemente besitzen, also wirklich als lineär betrachtet werden können. Dagegen verlangt der hiermit ausgeschlossene Fall, und ebenso die Bestimmung des Koefficienten der Selbstinduktion, eine durchaus abweichende Behandlung, weil hier der Leiter als körperlich betrachtet werden, und demgemäß auch das Gesetz der Verteilung des induzierten Stromes über seinen Querschnitt berücksichtigt werden muß. Dieses Gesetz abzuleiten haben wir aber bisher noch kein Mittel, und die später anzugebenden führen der großen analytischen Schwierigkeiten halber nur in wenigen speziellen Fällen zu verwendbaren Resultaten.

Wir sind somit zur Einführung einer Hypothese gezwungen und stützen uns bei deren Bildung darauf, daß nach der auf S. 375 getroffenen Festsetzung hier nur erst solche Vorgänge untersucht werden sollen, bei denen sich die induzierten Leitungsströme als quasi-stationäre verhalten. Eine Verteilung eines streng stationären Stromes in einem als lineär zu betrachtenden Leiter haben wir nun früher kennen gelernt: nämlich die, bei welcher die Stromstärke sich über jeden Querschnitt gleichförmig verteilt. Wir wollen annehmen, daß bei hinreichend kleiner Änderungsgeschwindigkeit die induzierten quasi-stationären Ströme diesem Gesetz gleichfalls folgen; einen Beweis für die Zulässigkeit dieses Verfahrens werden wir später liefern.

Indem wir diese Annahme machen, können wir die Bestimmung der Induktionskoefficienten an die allgemeine Formel (175) für das Potential der Wechselwirkung zwischen zwei wahren Stromsystemen (h) und (k) im leeren Raume anknüpfen, welche lautet

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{hk} &= -\frac{1}{v^2}\int\int(\mathfrak{u}_h\,\mathfrak{u}_k + \mathfrak{v}_h\,\mathfrak{v}_k + \mathfrak{w}_h\,\mathfrak{w}_k)\,\frac{d\,k_h\,d\,k_k}{r}\\ &= -\frac{1}{v}\int(U_k\,\mathfrak{u}_h + V_k\,\mathfrak{v}_h + W_k\,\mathfrak{w}_h)\,d\,k_h\,,\end{aligned}\right\}\qquad 232)$$

und worin

$$U_k = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{u}_k\,d\,k_k}{r}\,,\ \text{u. s. f.}$$

die Vektorpotentiale der wahren Strömung (h) darstellen.

Besitzen nämlich die linearen Stromläufe die Querschnitte q_h und q_k, über welche sich die Stromstärken I_h und I_k gleichmäßig verteilen, so ist für beide die resp. Stromdichte gleich I_h/q_h und I_k/q_k, und man kann schreiben

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{hk} &= -\frac{I_h}{v}\int\int(U_k\,d\,x_h + V_k\,d\,y_h + W_k\,d\,z_h)\,\frac{d\,q_h}{q_h}\,,\\ U_k &= \frac{I_k}{v}\int\int\frac{d\,x_k\,d\,q_k}{r\,q_k}\,,\ V_k = \frac{I_k}{v}\int\int\frac{d\,y_k\,d\,q_k}{r\,q_k}\,,\ W_k = \frac{I_k}{v}\int\int\frac{d\,z_k\,d\,q_k}{r\,q_k}\,,\end{aligned}\right\}\qquad 232')$$

wobei $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ die Projektionen des Axenelementes $d\,s$ des betreffenden Stromfadens bezeichnen.

Hieraus folgt, daß Q_{hk} gegeben ist durch die Formel

$$Q_{hk} = +\frac{1}{v}\int\int(U_k'\,d\,x_h + V_k'\,d\,y_h + W_k'\,d\,z_h)\,\frac{d\,q_h}{q_h}\,,\qquad 232'')$$

worin kurz gesetzt ist

$$U_k/I_k = U_k',\quad V_k/I_k = V_k',\quad W_k/I_k = W_k'.\qquad 232''')$$

Einer der einfachsten Fälle ist der, daß die Querschnitte der beiden Leiter konstant sind, und ihre Axen in Rechtecken verlaufen, deren Ebenen normal zu einander stehen, und von deren Seiten zwei Paare parallel zu einander liegen; denn, da nach Formel (231) die zu einander normalen Seiten keinen Anteil zu Q_{hk} geben, so reduziert sich der Ausdruck auf die von den parallelen Seiten herrührenden Glieder. Sind außerdem von den vier parallelen Seiten zwei den verschiedenen Leitern angehörige einander besonders nahe, so daß ihr Anteil an dem Integral den aller übrigen überwiegt, so wird, falls die parallelen Seiten gleiche Längen b und den Abstand d besitzen,

$$Q_{hk} = \frac{1}{v^2}\int_0^b\int_0^b\frac{d\,s_h\,d\,s_k}{\sqrt{d^2 + (s_h - s_k)^2}}\,,$$

was nach einfacher Rechnung liefert

$$Q_{hk} = \frac{1}{v^2}\left[b\,l\left(\frac{\sqrt{b^2 + d^2} + b}{\sqrt{b^2 + d^2} - b}\right) + 2\,d - 2\sqrt{d^2 + b^2}\right].\qquad 233)$$

Ist d sehr klein neben b, so kann man die Formel durch Entwickelung vereinfachen und erhält [113])

233′) $$Q_{hk} = \frac{2b}{v^2}\left(l\left(\frac{2b}{d}\right) - 1\right);$$

dieser Ausdruck darf mit Wahrscheinlichkeit auch auf zwei beliebig, nur stetig, gekrümmte Leiter übertragen werden, deren Querschnitte klein, und deren Krümmungsradien groß sind gegen ihren konstanten normalen Abstand d, wenn man nur b mit der Länge der parallelen Zweige vertauscht. —

An das erhaltene Resultat schließt sich naturgemäß die Bestimmung der Selbstinduktion eines sehr langen Cylinders, der durch einen allseitig sehr ausgedehnten Leiter zu einem Ring vervollständigt ist, z. B. mit seiner Axe in einen Durchmesser einer leitenden Hohlkugel von großer Wandstärke fällt. Eine den Cylinder vom negativen zum positiven Ende durchfließende Strömung wird dann in dieser Kugelschale zurückfließen und dort eine so weite Verteilung besitzen, daß man ihre Induktion ignorieren und der Betrachtung den Cylinder allein unterwerfen kann.

Für zwei Elementarfäden (h) und (k) kann man dann, wenn b die Länge des Cylinders bezeichnet, das soeben erhaltene Resultat anwenden und erhält demgemäß für die Konstante der Selbstinduktion

233″) $$Q = \frac{1}{q^2}\int\int Q_{hk}\, dq_h\, dq_k,$$

wo beide Integrationen über den Cylinderquerschnitt zu erstrecken sind. Hat der Cylinder kreisförmigen Querschnitt und den Radius a, so giebt die Ausführung der Integration [114])

233‴) $$Q = \frac{2b}{v^2}\left(l\left(\frac{2b}{a}\right) - \frac{3}{4}\right).$$

Für zwei der Z-Axe parallele unendliche Cylinder (1) und (2), die von dem gleichen Gesamtstrom in entgegengesetzter Richtung und in gleichförmiger Verteilung durchflossen werden, ergiebt die Formel (232″), da hier $dx = dy = 0$ ist,

$$(Q) = \frac{1}{v^2}\left\{\int\int\frac{dz_1\,dq_1}{q_1}\left(\int\int\frac{dz_1\,dq_1}{r\,q_1} - \int\int\frac{dz_2\,dq_2}{r\,q_2}\right)\right.$$
$$\left. - \int\int\frac{dz_2\,dq_2}{q_2}\left(\int\int\frac{dz_1\,dq_1}{r\,q_1} - \int\int\frac{dz_2\,dq_2}{r\,q_2}\right)\right\}.$$

Auf die gegen die Querdimensionen und den Abstand der Cylinder sehr große Länge b bezogen, liefert diese Formel

$$(Q) = \frac{b}{v^2}\left\{\frac{1}{q_1^2}\int dq_1\int dq_1\; l(e_{11}) - \frac{1}{q_1\,q_2}\int dq_1\int dq_2\, l(e_{12})\right.$$
$$\left. - \frac{1}{q_1\,q_2}\int dq_2\int dq_1\; l(e_{21}) + \frac{1}{q_2^2}\int dq_2\int dq_2\, l(e_{22})\right\},$$

wobei die Integrationen über zwei in einer Ebene liegende Querschnitte q_h und q_k auszudehnen sind, und e_{hk} den Abstand zwischen ihren Elementen $d q_h$ und $d q_k$ bezeichnet.

Diese Formel ist unter Benutzung der früheren Bezeichnung identisch mit

$$(Q) = Q_{11} + Q_{22} - 2\,Q_{12};$$

sind beide Cylinder gleich dem oben betrachteten, so kann man für Q_{11} und Q_{22} den in (233‴), für Q_{12} den in (233′) gegebenen Ausdruck einsetzen und erhält so[115])

$$(Q) = \frac{4\,b}{v^2}\left(l\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{1}{4}\right). \qquad 233''''$$

Dieser Wert kann auch auf einen linearen Leiter angewandt werden, der kreisförmigen Querschnitt besitzt und dessen Axe ein Rechteck von den sehr langen Seiten b und den sehr kurzen d bildet, da hier die Wechselwirkung zwischen den kurzen und den langen Seiten streng verschwindet und die zwischen den beiden kurzen neben der zwischen den beiden langen ausgeübten vernachlässigt werden kann.

Die Vergleichung der Ausdrücke (233‴) und (233⁗) ergiebt, daß man die Konstante der Selbstinduktion eines linearen Leiters sehr bedeutend verkleinern kann, wenn man denselben, statt ihn geradlinig auszuspannen, in zwei parallelen Zweigen führt, die von einem Strom in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden, oder, anders ausgedrückt, nach den drei Seiten $b\,d\,b$ des oben betrachteten Rechteckes biegt. Indessen zeigt (233⁗) zugleich, daß es nicht möglich ist, auf diese Weise — etwa unter gleichzeitiger Verminderung der Dicke des Leiters — seine Selbstinduktion beliebig klein zu machen. Denn da der Grenzwert für d gleich $2\,a$ ist, so ist der erreichbare kleinste Wert von Q gegeben durch

$$(\bar{Q}) = \frac{4\,b}{v^2}\left(l(2) + \frac{1}{4}\right). —$$

Für die Berechnung der praktisch so überaus wichtigen Induktionskoefficienten von Drahtrollen kann man die einzelnen Windungen angenähert als Kreisringe auffassen; handelt es sich um die Induktion zwischen zwei verschiedenen Rollen, so kann man auch die zwischen den Drähten liegende Isolierschicht vernachlässigen und den ganzen Querschnitt der Rolle als gleichmäßig von dem Strom durchflossen betrachten. Liegen in der Rolle (h) auf der Querschnittseinheit ξ_h Windungen, so wird die einem Strom I_h entsprechende Stromdichte $i_h = \xi_h I_h$ sein.

Infolge hiervon ergiebt sich aus der Gleichung (232″) für die Induktion zwischen den beiden Rollen (h) und (k) der Koefficient

$$(Q_{hk}) = \frac{\xi_h \xi_k}{v} \int\int (U'_k\, d x_h + V'_k\, d y_h + W'_k\, d z_h) \frac{d q_h}{q_h},$$

worin

$$U'_k = \frac{1}{v} \int\int \frac{d x_k\, d q_k}{r\, q_k} \text{ u. s. f.}$$

ist, und die Integrationen nach q_h und q_k über den ganzen Querschnitt der bezüglichen Rollen zu erstrecken sind. Bei gleicher äußerer Gestalt und bei gleicher relativer Lage der Rollen ist somit der Induktionskoefficient (Q_{hk}) mit dem Produkt $\xi_h \xi_k$ der Windungszahlen proportional.

Diese Überlegung ist auf die Selbstinduktion einer Rolle im allgemeinen nicht anwendbar, weil hier die Isolierschichten zwischen den Windungen nicht ignoriert werden können.

Eine angenäherte Geltung würden die Formeln behalten, wenn die Drähte rechteckigen Querschnitt hätten, und das von den Isolierschichten eingenommene Volumen klein wäre neben dem von den Drähten erfüllten Raum; hier würde dann (Q_{hh}) mit ξ_h^2 proportional werden. Haben aber die Drähte kreisförmigen Querschnitt, so ist das obige Verfahren durchaus unanwendbar. Hier ist mitunter eine zweite Art des Annäherungsverfahrens praktisch, welches die Ströme in den Axen der Windungsdrähte, also lineär im strengen Sinne des Wortes verlaufend annimmt.

Allgemein läßt sich nur etwa folgendes behaupten. Die ganze in einer Rolle stattfindende Induktion zerfällt in zwei Teile; die Summe der Selbstinduktionen aller Drahtelemente, bei der jedes für sich als ein Cylinder der S. 388 behandelten Art betrachtet werden kann, und die Summe der wechselseitigen Induktionen zwischen verschiedenen Elementen.

Von dem ersten Teil kann man nach dem oben erhaltenen Resultat erwarten, daß er von der Art der Wickelung der Rolle wenig abhängig und bei großer Länge b des Drahtes angenähert mit dem Produkt $b\, l(b)$ proportional sein wird. Von dem zweiten Teil kann man schließen, daß er bei gleicher Gestalt der Rolle angenähert dem Quadrat der Zahl ξ der durch die Querschnittseinheit gehenden Windungen und der Größe einer einzelnen proportional wachsen muß. Denn alle Elemente einer Windung sind gleichwertig, und da die unmittelbar anliegenden Nachbarwindungen die stärkste Induktion liefern, so sind, mit Ausnahme der oberflächlich liegenden, auch alle Windungen nahezu gleichwertig; endlich aber ist die In-

duktion, die jede einzelne Windung von der Summe aller übrigen erfährt, mit der Dichte, in welcher jene sie umgeben, also mit ξ angenähert proportional.

Da weiter das Produkt der Zahl ξ in die Länge einer Windung und den Querschnitt der Rolle die gesamte Länge b des aufgewundenen Drahtes ergiebt, so werden wir schreiben können

$$(Q_{hh}) = \frac{2b}{v^2}\left(l\left(\frac{2b}{a}\right) + m\,\xi\right),$$

wobei a den Radius des Drahtes bezeichnet, und m von der Gestalt und Größe der Rolle abhängen muß. Bei sehr großer Windungszahl wird das zweite Glied das erste überwiegen.

Dies Resultat genügt für manche qualitative Folgerungen. Die genaue rechnerische Bestimmung von (Q_{hh}) bietet dagegen stets erhebliche Schwierigkeiten. —

Die vorstehenden Betrachtungen gestatten eine wichtige Erweiterung durch Berücksichtigung der Magnetisierbarkeit des Stoffes der linearen Leiter und etwaiger in ihrer Nähe befindlicher anderer Körper.

Sind jene Teile magnetisierbar, so bewirkt ein jeder Strom eine magnetische Verteilung, deren spezifische Momente α, β, γ — abgesehen von den S. 186 erörterten Ausnahmen — mit der influenzierenden Stromstärke proportional sind, bei deren Änderung also selbst variieren und deshalb auf die linearen Leiter induzierend wirken.

Diese sekundäre Magneto-Induktion läßt sich relativ einfach berücksichtigen, wenn man die influenzierten Magnetismen durch die äquivalenten Ströme ersetzt, und somit statt der wahren die in § 22 definierten freien Ströme einführt. Da, wie die Momente, auch die äquivalenten Ströme mit der sie erregenden Stromstärke I_h proportional sind, so wird das Potential Ψ'_{hk} der freien Strömung (h) auf einen linearen Leiter (k), der die Stromstärke I_k enthält, die frühere Form

$$\Psi'_{hk} = I_h I_k \Pi'_{hk} = - I_h I_k Q'_{hk} \qquad 234)$$

besitzen, und Q'_{hk} wird den Koefficienten der Induktion von (h) auf (k) bei Berücksichtigung der Magnetisierbarkeit darstellen.

Es ist übrigens zu bemerken, daß hier die Beziehung $Q'_{hk} = Q'_{kh}$ nicht mehr allgemein gültig ist.

Wenn nicht nur die linearen Leiter magnetisierbar sind, sondern auch noch andere in ihrer Umgebung befindliche Körper, so ergiebt aber die obige Überlegung die stattfindende Induktion in dem Falle noch nicht vollständig, daß jene Körper Elektricitätsleiter sind. Denn unter diesen Umständen erregen die auch in ihnen wirkenden

elektrischen Kräfte in ihrem Innern induzierte räumliche Ströme, die sekundär auf die linearen Leiter zurückwirken und in den obigen Betrachtungen nicht berücksichtigt sind. Ihre Theorie bietet erhebliche Schwierigkeiten und wird uns später beschäftigen; wir können ihre Wirkung vernachlässigen, wenn der in jenen Körpern influenzierte Magnetismus eine bedeutend stärkere Induktion übt, als die in ihnen induzierten Ströme. Hierzu ist erforderlich, daß die Magnetisierungszahlen jener Körper sehr groß und ihre elektrischen Leitungsfähigkeiten mäßig sind; man kann dies beim Eisen als angenähert erfüllt betrachten. —

Um allgemeine Formeln für die Induktionskoefficienten bei Berücksichtigung der Magnetisierbarkeit zu bilden, wollen wir von dem allgemeinen Ausdruck (175‴) für das Potential eines Stromsystemes auf sich selbst ausgehen, welcher lautete

$$\Psi' = -\frac{1}{2v}\int(\mathfrak{u}\,\mathfrak{U} + \mathfrak{v}\,\mathfrak{V} + \mathfrak{w}\,\mathfrak{W})\,dk;$$

in ihm bezeichnen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Komponenten der wahren Strömung, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Vektorpotentiale der freien Strömung; die Integration nach k ist über alle Räume auszudehnen, in denen wahre Ströme fließen. Da wir quasi-lineäre Ströme voraussetzen, so können wir auch schreiben, indem wir wieder mit dx_k, dy_k, dz_k die Projektionen des Axenelementes ds_k, mit q_k den Querschnitt des Leiters (k) bezeichnen,

$$234')\qquad \Psi' = -\frac{1}{2v}\sum I_k \int\int(\mathfrak{U}\,dx + \mathfrak{V}\,dy + \mathfrak{W}\,dz)_k\frac{dq_k}{q_k},$$

wo dann in der That jeder Strom I_k über den bezüglichen Querschnitt q_k gleichförmig verteilt ist.

Die freien Ströme setzen sich aus den wahren I_k und denjenigen scheinbaren zusammen, welche mit den durch sie influenzierten Magnetismen äquivalent sind.

Da die letzteren lineäre Funktionen der wahren Ströme sind, so gilt gleiches auch von den $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, und wir können daher setzen

$$\mathfrak{U} = \sum I_h\,\mathfrak{U}_h', \quad \mathfrak{V} = \sum I_h\,\mathfrak{V}_h', \quad \mathfrak{W} = \sum I_h\,\mathfrak{W}_h'.$$

Hieraus folgt

$$234'')\quad \Psi' = -\frac{1}{2v}\sum_h\sum_k I_k I_h \int\int(\mathfrak{U}_h'\,dx_k + \mathfrak{V}_h'\,dy_k + \mathfrak{W}_h'\,dz_k)\frac{dq_k}{q_k},$$

und da $\Psi' = \frac{1}{2}\sum_h\sum_k \Psi_{kh}'$ ist, so erhalten wir für den Wert des Koefficienten der Induktion des Leiters (h) auf (k) unter Berücksichtigung etwaiger Magnetisierbarkeit nach (234)

$$Q'_{hk} = + \frac{1}{v} \int\!\!\int (\mathfrak{U}'_h\, d x_k + \mathfrak{V}'_h\, d y_k + \mathfrak{W}'_h\, d z_k) \frac{d q_k}{q_k}. \qquad 234''')$$

Bezeichnen (h) und (k) zwei verschiedene Leiter, die keine unendlich nahen Linienelemente besitzen, so ist die Integration über q_k ausführbar, und es resultiert einfacher

$$Q'_{hk} = \frac{1}{v} \int (\mathfrak{U}'_h\, d x_k + \mathfrak{V}'_h\, d y_k + \mathfrak{W}'_h\, d z_k); \qquad 234'''')$$

den Koefficienten Q'_{hh} oder Q' der Selbstinduktion erhält man, indem man in (234''') die Integration nach $d q_k\, d s_k$ über den linearen Leiter h erstreckt. —

Bestehen die hier betrachteten linearen Leiter aus einer homogenen isotropen magnetisierbaren Substanz, und befinden sie sich in einer solchen, die sich nach allen Seiten ins Unendliche erstreckt, so ändert dies nach S. 276 das Potential ihrer Wechselwirkung, und somit den Koefficienten ihrer wechselseitigen Induktion nur um einen konstanten Faktor, der die magnetische Permeabilität des sie umgebenden Mediums darstellt. Anders verhält es sich dagegen mit ihrem Selbstpotential, und demgemäß mit ihrer Selbstinduktion; hier geben auch die im Innern der Leiter influenzierten Magnetismen im allgemeinen einen merklichen Einfluß, und es sind daher die Vektorpotentiale der freien, statt derjenigen der wahren Ströme zu benutzen.

Wir wollen einen homogenen isotropen Kreiscylinder vom Radius a und der gegen a sehr großen Länge b betrachten, der durch einen in großer Entfernung geführten Leiter von großem Querschnitt zu einem geschlossenen System ergänzt ist; er besitze eine magnetische Permeabilität $\mathfrak{m}_i$ und er sei umgeben von einem Medium mit der Permeabilität $\mathfrak{m}_a$. Dann kommen für die Berechnung der Selbstinduktion nur die in dem Cylinder fließenden wahren, und die in und auf ihm fließenden äquivalenten Ströme in Betracht, die sämtlich parallel der Z-Axe verlaufen; es ist somit von den virtuellen Vektorpotentialen der freien Ströme $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{W}'$ nur das letzte, und zwar nur für den Kreiscylinder zu berechnen.

Die freien Ströme, welche einem wahren Strom von der konstanten Dichte $\mathfrak{i}$ im Cylinder entsprechen, sind nach S. 269 einmal räumliche von der Dichte

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}\, \mathfrak{m}_i = \frac{I \mathfrak{m}_i}{q},$$

wo $q = \pi a^2$ bedeutet; sodann flächenhafte von der Dichte

$$\mathfrak{i}^0 = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{i}\, a (\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i) = \frac{I}{p} (\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i),$$

wobei $p = 2 \pi a$ ist.

Versteht man wieder unter dq das Element des Querschnittes, unter dp das der Peripherie, so wird hiernach

235) $$\mathfrak{W}' = \frac{1}{v}\int\left[\frac{\mathfrak{m}_i}{q}\int\frac{dq}{r} + \frac{\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i}{p}\int\frac{dp}{\bar{r}}\right] dz;$$

dabei stellen r und $\bar{r}$ die Abstände des Punktes im Innern des Cylinders, auf den sich $\mathfrak{W}'$ bezieht, von dem Raumelement $dq\,dz$ und dem Oberflächenelement $dp\,dz$ dar.

Der Ausdruck (235) läßt sich auch schreiben

$$\mathfrak{W}' = \frac{1}{v}\int\left[\frac{\mathfrak{m}_a}{q}\int\frac{dq}{r} + (\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_a)\left(\frac{1}{q}\int\frac{dq}{r} - \frac{1}{p}\int\frac{dp}{\bar{r}}\right)\right] dz,$$

und diese Form ist für die Berechnung am geeignetsten. Setzt man nämlich $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_a = 1$, so nimmt man damit die Magnetisierbarkeit verschwindend an, und das resultierende Glied

$$\mathfrak{W}_0' = \frac{1}{v}\int\frac{dz}{q}\int\frac{dq}{r}$$

muß daher dasjenige darstellen, was bei weiterer Verfolgung den Ausdruck (233''') für Q liefert. Setzt man noch

235') $$\mathfrak{W}_1' = \frac{\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_a}{v}\int\left(\frac{1}{q}\int\frac{dq}{r} - \frac{1}{p}\int\frac{dp}{\bar{r}}\right) dz,$$

so wird

$$\mathfrak{W}' = \mathfrak{m}_a\,\mathfrak{W}_0' + \mathfrak{W}_1',$$

und für Q' erhält man

235'') $$Q' = \mathfrak{m}_a\,Q + Q_1,$$

wobei Q_1 der Anteil an Q' ist, der ebenso aus $\mathfrak{W}_1'$ folgt, wie Q aus $\mathfrak{W}_0'$.

Die spezielle Form der Funktion $\mathfrak{W}_1'$ gestattet nun aber, bei der Berechnung den Cylinder als unendlich lang zu betrachten; da nämlich gilt

$$\frac{1}{q}\int dq = \frac{1}{p}\int dp,$$

so kann $\mathfrak{W}_1'$ aufgefaßt werden als das logarithmische Potential einer Verteilung von der Gesamtmasse Null.

Wir erhalten demgemäß aus (235') nach Bd. I, S. 197

$$\mathfrak{W}_1' = (\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_a)\left(\frac{a^2 - a_0^2}{v\,a^2}\right),$$

wobei a_0 den Abstand von der Cylinderaxe bezeichnet.

Berechnet man hieraus gemäß (234''') bei verschwindendem $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{V}'$ den Anteil Q_1, so erhält man

$$Q_1 = \frac{b}{2\,v^2}(\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_a),$$

und zieht man noch den Wert (233''') von Q heran, so ergiebt sich nach (235'')

$$Q' = \frac{2b}{v^2}\left[\mathfrak{m}_a\left(l\left(\frac{2b}{a}\right) - 1\right) + \frac{1}{4}\mathfrak{m}_i\right]. \qquad 235''')$$

Ist das äußere Medium nicht magnetisierbar, so wird einfacher [116])

$$Q' = \frac{2b}{v^2}\left(l\left(\frac{2b}{a}\right) - 1 + \frac{1}{4}\mathfrak{m}_i\right). \qquad 235'''')$$

Die Selbstinduktion des Kreiscylinders wird also durch seine Magnetisierbarkeit vergrößert, aber keineswegs etwa in dem Verhältnis seiner Magnetisierungszahl zu Eins. —

Bei den vorstehenden Betrachtungen waren überall die influenzierten Magnetismen durch die äquivalenten elektrischen Ströme ersetzt; mitunter gewinnen indessen die Probleme in formaler Hinsicht an Einfachheit, wenn man entweder die freie oder die wahre Strömung oder auch beide zugleich durch die äquivalenten Magnetismen ersetzt.

Man benutzt dann als Ausgangspunkt die Formel (160')

$$\Psi_{10} = -\int(\alpha A + \beta B + \gamma C)\,dk,$$

welche das Potential der Wechselwirkung zwischen einer magnetischen Verteilung von den spezifischen Momenten α, β, γ und einem Magnete oder Stromsystem darstellt, welches durch die innerhalb dk ausgeübten magnetischen Komponenten A, B, C charakterisiert ist.

Es lassen sich dann α, β, γ als die einem gegebenen wahren linearen Strom von der Stärke I_k äquivalenten magnetischen Momente auffassen, und man kann demgemäß setzen

$$\alpha = I_k \alpha'_k, \quad \beta = I_k \beta'_k, \quad \gamma = I_k \gamma'_k; \qquad 236)$$

ferner kann man A, B, C als von einem wahren linearen Strom I_h und den durch ihn influenzierten Magnetismen ausgehend denken, und demgemäß schreiben

$$A = I_h A'_h, \quad B = I_h B'_h, \quad C = I_h C'_h. \qquad 236')$$

Dann gilt

$$Q'_{hk} = +\int(\alpha'_k A'_h + \beta'_k B'_h + \gamma'_k C'_h)\,dk = \int \mu'_k R'_h \cos(R_k, \lambda_h)\,dk, \quad 236'')$$

und zwar ist das Integral über alle Volumina auszudehnen, innerhalb deren zugleich $\alpha'_k, \ldots$ und $A'_h, \ldots$ von Null verschiedene Werte haben; μ, R, λ haben dabei die frühere Bedeutung.

Natürlich kann man auch umgekehrt A, B, C mit dem wahren, α, β, γ mit dem freien Stromsystem in Verbindung bringen.

Ein besonders einfaches Beispiel giebt ein magnetisierbarer

fadenförmiger Ring von der Permeabilität $\mathfrak{m}$, über den zwei Solenoide (1) und (2) gewickelt sind. Das Solenoid (1) sei das innere, dem Kern direkt aufliegende, (2) das äußere, das strenggenommen nicht unmittelbar auf (1) aufliegen darf, weil sonst die Windungen nicht als linear betrachtet werden können.

Das Solenoid (2) ist äquivalent mit einer axialen Magnetisierung seines Hohlraumes k_2 vom spezifischen Moment

$$\mu_2 = I_2 \zeta_2 / v,$$

falls I_2 die Stromstärke, ζ_2 die Windungszahl des Solenoides (2) pro Längeneinheit bezeichnet.

Das Solenoid (1) inklusive der im Kern influenzierten Magnetismen liefert in seinem Hohlraum k_1 eine magnetische Kraft R_1 parallel der Axe von der Stärke

$$R_1 = 4\pi I_1 \zeta_1 \mathfrak{m}/v,$$

wobei I_1 und ζ_1 Stromstärke und Windungszahl des Solenoides (1) bedeuten; in dem äußeren Raum giebt das Solenoid (1) keine Wirkung.

Sonach ist das Integrationsgebiet der magnetisierbare Kern, d. h. k_1 allein, gegen den der von den Windungen erfüllte Raum vernachlässigt werden darf; innerhalb k_1 ist R_1 und μ_2 konstant und R_1 mit λ_2 parallel; man erhält deshalb ohne weiteres für die Induktion des inneren auf das äußere System [117])

236''') $$Q'_{12} = \frac{4\pi\mathfrak{m}}{v^2} k_1 \zeta_1 \zeta_2 .$$

Die wechselseitige Induktion ist hier also der Permeabilität des Kernes direkt proportional.

Die im Vorstehenden behandelte Anordnung hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der des sog. Rhumkorff'schen Funkeninduktors, der aus einem cylindrischen Eisenkern und zwei über ihn und übereinander gewundenen Drahtrollen besteht. Durch die innere Rolle (1) wird ein häufig unterbrochener Strom geschickt, der in der äußeren Rolle (2) eine elektromotorische Kraft induziert; die Stärke der letzteren ist nach dem im Eingang dieses Paragraphen Gesagten mit dem Koefficienten Q'_{12} proportional. Wenn nun auch das oben behandelte Problem von dem beim Funkeninduktor vorliegenden wesentlich abweicht, so kann man es doch, da eine strenge Theorie des Induktors große Schwierigkeiten bietet, vorteilhaft heranziehen, um die bedeutende Steigerung zu illustrieren, welche die Induktion durch die Anwesenheit des Eisenkernes erfährt. —

Für die Berechnung der Selbstinduktion eines linearen Leiters bei Anwesenheit magnetisierbarer Körper kann unter Um-

ständen auch der Ausdruck für die magnetische Energie E_m des Systemes, welche nach S. 282 mit dem Negativen seines inneren Potentiales Ψ' zusammenfällt, vorteilhaft benutzt werden.

Es gilt nämlich

$$E_m = -\Psi' = \frac{1}{8\pi}\int (A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C})\,dk,$$

und da sowohl die Polarisationen, als die Kräfte mit der sie verursachenden Stromstärke proportional sind, so kann man schreiben

$$A = IA', \dots \quad \mathfrak{A} = I\mathfrak{A}', \dots \tag{237}$$

und erhält für den Koefficienten der Selbstinduktion

$$Q' = \frac{1}{4\pi}\int (A'\mathfrak{A}' + B'\mathfrak{B}' + C'\mathfrak{C}')\,dk = \frac{1}{4\pi}\int R'\mathfrak{R}'\cos(R,\mathfrak{R})\,dk; \tag{237'}$$

hierbei ist bereits berücksichtigt, daß das innere Potential sich durch den Faktor $^1/_2$ von dem Potential der Wechselwirkung zwischen den wahren und den freien Strömen unterscheidet, von dem nach S. 385 direkt der Koefficient Q' abgeleitet ist.

Für ein isotropes System gilt noch spezieller

$$Q' = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{m} R^2\,dk, \tag{237''}$$

wobei $\mathfrak{m}$ die frühere Bedeutung hat.

Wir machen hiervon die Anwendung auf die Bestimmung der Selbstinduktion eines einfachen, über einen magnetisierbaren Kern gewickelten Solenoides. Hier kann als Integrationsgebiet der Kern allein gewählt werden. Der von den Windungen eingenommene Raum ergiebt nämlich einen mit der Länge, und somit der Windungszahl ζ des linearen Leiters proportionalen Betrag, während der Kern einen mit ζ^2 proportionalen liefert; im äußeren Raum aber sind A, B, C, und somit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, gleich Null.

Nun ist innerhalb des Kernes

$$R = 4\pi\zeta / v,$$

somit konstant, und man erhält, falls man mit k das Volumen des Kernes bezeichnet, sofort

$$Q' = \frac{4\pi\mathfrak{m}}{v^2} k\zeta^2. \tag{237'''}$$

Dies Resultat kann auch aus (236''') erhalten werden, wenn man, wie hier, die in dem linearen Leiter selbst stattfindende Induktion vernachlässigt. —

Es geht aus dem Vorstehenden hervor, daß die für die ganze Behandlung der Induktion in linearen Leitern so wichtigen Induktionskoefficienten Q_{hk} auch in den prinzipiell unbedenklichen Fällen meist

nur umständlich zu berechnen sind, in vielen anderen aber kaum in roher Annäherung gewonnen werden können. Um so wichtiger würden Methoden sein, welche die theoretische Bestimmung durch eine experimentelle ersetzten. Wir werden aber sehen, daß auch auf diesem Wege große Schwierigkeiten einer wirklich strengen Lösung der Aufgabe entgegenstehen.

§ 40. Der Einfluß der Selbstinduktion auf die quasi-stationäre Strömung in einem geschlossenen linearen Leiter. Elektrische Schwingungen. Gegenseitige Induktion zwischen zwei linearen Leitern.

Von den im vorigen Paragraphen abgeleiteten allgemeinen Formeln wollen wir nunmehr einige Anwendungen auf Probleme von allgemeinerem Interesse machen.

Wir betrachten zunächst einen einzigen, ruhenden, unverzweigten linearen Leiter unter der Wirkung einer gegebenen elektromotorischen Kraft L' und derjenigen der Selbstinduktion. L' kann von einer eingeschalteten galvanischen Kette herrühren, es kann aber auch die Induktionswirkung eines bewegten permanenten Magneten darstellen. Die Magnetisierbarkeit des Leiters ist zugelassen; sind in seiner Nähe andere magnetisierbare, gleichfalls ruhende Körper vorhanden, so soll die in ihnen induzierte wahre Strömung vernachlässigt werden. Es gilt dann nach (229''')

$$IW = L' - Q\frac{dI}{dt}, \tag{238}$$

wo Q den Selbstinduktionskoefficienten des Leiters, und zwar im Falle vorhandener Magnetisierbarkeit in dem S. 391 erörterten allgemeineren Sinne bezeichnet.

Das allgemeine Integral dieser Formel ist, wenn c eine Konstante bedeutet,

$$I = \left(c + \frac{1}{Q}\int L' e^{\frac{Wt}{Q}}\,dt\right) e^{-\frac{Wt}{Q}}. \tag{238'}$$

Ist L' für $t < 0$ selbst gleich Null, für $t > 0$ aber konstant, und ist I gleich Null für $t = 0$, wie dies z. B. stattfindet, wenn der Leiter eine galvanische Kette enthält, und diese zur Zeit $t = 0$ geschlossen wird, so giebt dieser Ausdruck

$$I = \frac{L'}{W}\left(1 - e^{-\frac{Wt}{Q}}\right) = I_\infty\left(1 - e^{-\frac{Wt}{Q}}\right), \tag{238''}$$

wobei I_∞ die nach unendlich langer Zeit eintretende Stromstärke

bezeichnet. Wirkt dagegen keine Kraft L', war aber zur Zeit $t=0$ die Stromstärke gleich I_0, wie z. B., wenn die galvanische Kette zu dieser Zeit — etwa durch eine sehr kurze Nebenschließung — aus dem Leiter ausgeschaltet wird, dann gilt

$$I = I_0 e^{-\frac{Wt}{Q}} = \frac{L'}{W} e^{-\frac{Wt}{Q}}. \tag{238'''}$$

Das Anwachsen und das Abklingen des Stromes findet also um so schneller statt, je größer der Widerstand und je kleiner die Selbstinduktion des Leiters ist. Ist der Leiter zu einer engen Rolle gewunden, so ist Q/W angenähert seiner Länge proportional, da Q mit deren Quadrat, W mit deren erster Potenz wächst. Magnetisierbarkeit des Leiters oder eines benachbarten Körpers vergrößert nach S. 395 die Selbstinduktion Q.

Vergleicht man die beiden Formeln (238'') und (238'''), so erkennt man, daß der Anteil der Induktion an der ganzen Stromstärke, der sogenannte Extrastrom, resp. gleich

$$\mp \frac{L'}{W} e^{-\frac{Wt}{Q}}$$

ist, in beiden Fällen also die gleiche absolute Größe, aber die entgegengesetzte Richtung besitzt. Der ihm entsprechende Integralstrom ist

$$J = \mp \frac{L' Q}{W^2}.$$

Hat L' den Wert

$$L' = a \sin \alpha t,$$

— unter a und α Konstanten verstanden — wie derselbe etwa durch einen in der Nähe des Leiters rotierenden permanenten Magneten bewirkt werden könnte, so wird, wenn wieder c eine Konstante bezeichnet,

$$I = c e^{-\frac{Wt}{Q}} + \frac{a(W \sin \alpha t - \alpha Q \cos \alpha t)}{\alpha^2 Q^2 + W^2}.$$

Mit wachsendem t verschwindet das erste Glied, und es bleibt ein Ausdruck von der Form

$$I = A \sin \alpha (t - \delta)$$

übrig, worin

$$A^2 = \frac{a^2}{\alpha^2 Q^2 + W^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha \delta = \frac{\alpha Q}{W}$$

ist. Die Phase der Schwingung von I ist also um so mehr von derjenigen von L' verschieden, je größer Q, je kleiner W ist. Die Amplitude A von I wird für kein endliches α ein Maximum, der Leiter

zeigt also unter den vorausgesetzten Umständen nichts der Resonanz ähnliches. Da a die Amplitude der elektromotorischen Kraft L' angiebt, so entspricht die Formel

$$A = \frac{a}{\sqrt{W^2 + \alpha^2 Q^2}}$$

einigermaßen dem OHM'schen Gesetz (189'''); sie zeigt aber, daß der im Nenner rechts auftretende Widerstand, den die quasi-stationäre elektrische Schwingung findet, von demjenigen, den ein streng stationärer Strom zu überwinden hat, um so mehr abweicht, je größer die Schwingungszahl von L' und je größer die Selbstinduktion des Leiters ist. —

Wir haben bisher einen unverzweigten linearen Leiter vorausgesetzt, können aber auch verzweigte der Theorie unterwerfen, wenn nur in jedem Zweig der Teil, in dem die Induktion überwiegend zustande kommt, als angenähert in sich geschlossen betrachtet werden kann, z. B. aus einer Drahtrolle mit relativ kurzen Zuleitungen besteht. Dann können wir nämlich sowohl die Selbstinduktion, als auch die Induktion durch äußere permanente Magnete nach den früheren Formeln berechnen und, da die Strömung als sehr nahe stationär gelten soll, die beiden KIRCHHOFF'schen Sätze (192) und (192') anwenden, wenn wir nur für die elektromotorischen Kräfte neben den von konstanten Ketten herrührenden auch die auf Induktion beruhenden einsetzen. Wechselseitige Induktion zwischen verschiedenen Zweigen soll, dem obigen Grundproblem gemäß, ausgeschlossen sein.

Wir erhalten so die beiden Formeln

239) $$\mathsf{S}\left(I_{\mu\nu} W_{\mu\nu} - L'_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \frac{d I_{\mu\nu}}{d t}\right) = 0\,, \quad \Sigma_\lambda I_{\lambda\mu} = 0\,,$$

wobei die Indices λ, μ, ν die Knotenpunkte charakterisieren, zwischen denen die betreffenden Zweige verlaufen. Die Summe in der ersten Formel ist über alle Teile eines geschlossenen Kreises unter Rücksicht auf die Umlaufungsrichtung, die zweite über alle in dem Knotenpunkt μ zusammenhängenden Zweige zu erstrecken.

Handelt es sich in den betrachteten Zweigen nur um die Extraströme, die nach dem zur Zeit $t = 0$ eintretenden Verschwinden der elektromotorischen Kräfte ablaufen, so erhält man aus (239), indem man mit dt multipliziert und von 0 bis ∞ integriert,

239') $$\mathsf{S}\,(J_{\mu\nu} W_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu} I^0_{\mu\nu}) = 0\,, \quad \Sigma_\lambda J_{\lambda\mu} = 0\,.$$

Hierin bezeichnet $I^0_{\mu\nu}$ eine zur Zeit $t = 0$ in dem Zweige (μ, ν) vor-

handene Stromstärke, die etwa eine Folge nur der elektromotorischen Kräfte L' gewesen sein, und somit einem vorherigen stationären Zustande des Systemes entsprochen haben kann.

Wir wollen diese Formeln anwenden auf einen Vorgang, der zur experimentellen Bestimmung der Selbstinduktion eines geschlossenen linearen Leiters, z. B. einer Rolle, dienen kann und der daher eine gewisse Wichtigkeit besitzt.[118]

Sei ein System von Leitern nach Art der Wheatstone'schen Brückenkombination zwischen vier Knotenpunkten (α), (β), (γ), (δ) erstreckt; die vier Zweige $(\alpha\beta)$, $(\beta\gamma)$, $(\alpha\delta)$, $(\delta\gamma)$ mögen Drahtrollen, der Zweig $(\beta\delta)$, die Brücke, ein Galvanometer von zu vernachlässigender Selbstinduktion, der Zweig $(\alpha\gamma)$ eine Kette enthalten, welche dem Knotenpunkt (α) den Strom I^0 zuführt, der aus (γ) wieder entnommen wird. Die Brücke sei so angeordnet, daß ein Strom in ihr nicht fließt; dann muß nach (194')

$$W_{\alpha\beta} : W_{\alpha\delta} = W_{\gamma\beta} : W_{\gamma\delta} \tag{239''}$$

sein, außerdem gilt

$$I^0_{\alpha\beta} = I^0_{\beta\gamma} = \frac{I^0(W_{\alpha\delta} + W_{\delta\gamma})}{W}, \quad I^0_{\alpha\delta} = I^0_{\delta\gamma} = \frac{I^0(W_{\alpha\beta} + W_{\beta\gamma})}{W}, \tag{239'''}$$

worin $W = W_{\alpha\beta} + W_{\beta\gamma} + W_{\gamma\delta} + W_{\delta\alpha}$ ist. Nun werde die Kette geöffnet, so daß I^0 verschwindet. Es entstehen dann in allen Zweigen Induktionsströme, und die Anwendung der ersten Formel (239') auf die zwei Leiterkreise $(\alpha\beta\delta\alpha)$ und $(\gamma\beta\delta\gamma)$ ergiebt die Formeln

$$J_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta} + J_{\beta\delta} W_{\beta\delta} + J_{\delta\alpha} W_{\delta\alpha} - Q_{\alpha\beta} I^0_{\alpha\beta} - Q_{\delta\alpha} I^0_{\delta\alpha} = 0,$$
$$J_{\gamma\beta} W_{\gamma\beta} + J_{\beta\delta} W_{\beta\delta} + J_{\delta\gamma} W_{\delta\gamma} - Q_{\gamma\beta} I^0_{\gamma\beta} - Q_{\delta\gamma} I^0_{\delta\gamma} = 0;$$

dagegen folgt aus der zweiten Gleichung (239')

$$J_{\beta\alpha} + J_{\beta\gamma} + J_{\beta\delta} = 0, \quad J_{\delta\alpha} + J_{\delta\beta} + J_{\delta\gamma} = 0,$$
$$J_{\alpha\beta} + J_{\alpha\delta} = 0, \quad J_{\gamma\beta} + J_{\gamma\delta} = 0.$$

Setzt man kurz

$$I^0_{\alpha\beta} = I^0_{\beta\gamma} = I_1, \quad I^0_{\alpha\delta} = I^0_{\delta\gamma} = I_2,$$
$$J_{\alpha\beta} = J_{\delta\alpha} = J_1, \quad J_{\gamma\beta} = J_{\delta\gamma} = J_2, \quad J_{\beta\delta} = J,$$

so ergiebt sich hieraus

$$J_1(W_{\alpha\beta} + W_{\alpha\delta}) + J W_{\beta\delta} = Q_{\alpha\beta} I_1 - Q_{\alpha\delta} I_2,$$
$$J_2(W_{\gamma\beta} + W_{\gamma\delta}) + J W_{\beta\delta} = -Q_{\gamma\beta} I_1 + Q_{\delta\gamma} I_2,$$
$$J = J_1 + J_2.$$

Benutzt man noch die Beziehungen (239'') und (239'''), so kann man J durch I^0 ausdrücken und erhält

239'''') $$J = \frac{I^0 W_{\alpha\beta} W_{\gamma\delta} \left(\frac{Q_{\alpha\beta}}{W_{\alpha\beta}} - \frac{Q_{\beta\gamma}}{W_{\beta\gamma}} + \frac{Q_{\gamma\delta}}{W_{\gamma\delta}} - \frac{Q_{\delta\alpha}}{W_{\delta\alpha}}\right)}{W_{\beta\delta} W + (W_{\alpha\beta} + W_{\alpha\delta})(W_{\gamma\beta} + W_{\gamma\delta})}.$$

Ist das System völlig symmetrisch, d. h., ist

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\gamma}, \quad Q_{\delta\alpha} = Q_{\gamma\delta}, \quad W_{\alpha\beta} = W_{\beta\gamma}, \quad W_{\delta\alpha} = W_{\gamma\delta},$$

so ist J gleich Null. Ist hingegen die Selbstinduktion zweier in (β) oder in (δ) zusammenstoßender Zweige verschieden, ist etwa bei gleichen Widerständen $Q_{\alpha\beta}$ von $Q_{\beta\gamma}$ verschieden, aber $Q_{\delta\alpha} = Q_{\delta\gamma}$, so reduziert sich die Klammer im Zähler auf $(Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\gamma})/W_{\alpha\beta}$; die Beobachtung von I^0, J und den Widerständen gestattet also die Berechnung der Differenz $Q_{\alpha\beta} - Q_{\beta\gamma}$, welche aber nur in dem Falle, daß $Q_{\beta\gamma}$ sehr klein neben $Q_{\alpha\beta}$ ist, den Schluß auf ersteres erlaubt.

Sind die Zweige $(\alpha\delta)$ und $(\gamma\delta)$ nach Widerstand und Selbstinduktion gleich, und sind $Q_{\alpha\beta}$ und $Q_{\beta\gamma}$ konstant gegeben, $W_{\alpha\beta}$ und $W_{\beta\gamma}$ in meßbarer Weise veränderlich, so verschwindet J, wenn

$$\frac{Q_{\alpha\beta}}{W_{\alpha\beta}} = \frac{Q_{\beta\gamma}}{W_{\beta\gamma}}$$

ist; diese Gleichung giebt ein Mittel an die Hand, um Verhältnisse von Induktionskoefficienten zu bestimmen. Eine Kombination dieser Beobachtungsmethode mit der früheren gestattet dann auch die Ableitung einzelner Induktionskoefficienten in einwurfsfreier Weise; doch ist dabei im Auge zu behalten, daß die Ausgangsformeln (239) nur unter gewissen Annahmen zulässig sind. —

Weitere praktisch interessante Verhältnisse erhält man, wenn der unverzweigte lineäre Leiter nicht geschlossen ist, sondern an Konduktoren von hinreichender Kapazität endigt, die zu einer bestimmten Zeit gegebene Ladungen tragen und nun durch den Leiter entladen werden.

Hier sind die Leitungsströme für sich offenbar nicht geschlossen; es treten deshalb jedenfalls Polarisationsströme ein, und diese sind, als von mit jenen vergleichbarer Stärke, bei der Induktion in Rechnung zu ziehen. Dies wird im allgemeinen dadurch erschwert, daß ihr Verlauf von vornherein nicht angebbar ist; überdies fehlen uns bisher auch die Mittel, ihre Gesetze abzuleiten.

Es giebt aber einen Fall, in welchem diese Schwierigkeit vollkommen verschwindet; er tritt ein, wenn die Konduktoren die einander sehr nahen Platten irgend eines Kondensators sind. Hier sind in dem Raume zwischen den Platten die von ihrer Wechselwirkung herrührenden Polarisationen viel größer, als im Außenraum, und es darf daher der Polarisationsstrom, welcher den Leitungsstrom

in dem lineären Leiter schließt, als vollständig zwischen den Platten verlaufend angesehen werden.

Sind weiter, wie in Praxi stets, die Kondensatorplatten sehr groß gegen den Querschnitt des lineären Leiters, so ist die Dichte des Polarisationsstromes sehr klein gegen die des Leitungsstromes, der Anteil des Kondensators an der Selbstinduktion des Systemes also verschwindend. Ist endlich noch die Länge des Leiters groß gegen den Abstand der Kondensatorplatten, so kommt für die Selbstinduktion der Kondensator überhaupt nicht in Betracht; die Induktion kann vielmehr berechnet werden, indem man den lineären Leiter durch den Kondensator hindurch lineär geschlossen denkt.

Der eingeschaltete Kondensator beeinflußt den Vorgang im übrigen nach zwei Richtungen hin. Einerseits repräsentiert die Differenz der auf den Platten herrschenden Potentialwerte P_1 und P_2 eine elektromotorische Kraft L', die in dem lineären Leiter, von der Platte (1) nach (2) positiv gerechnet, sich darstellt zu

$$L' = P_1 - P_2. \tag{240)}$$

Andererseits steht die Veränderung der Ladungen E_1 und E_2 der Platten mit der momentanen, gleichfalls von (1) nach (2) positiv gerechneten Stromstärke I in der aus S. 226 und S. 230 folgenden Beziehung

$$I = -\frac{d(E_1 - E_2)}{2\,d\,t}. \tag{240')}$$

Über den Zusammenhang zwischen der Ladungs- und der Potentialdifferenz geben uns die allgemeinen Gleichungen (12') Aufschluß, welche lauten

$$E_1 = C_{11} P_1 + C_{12} P_2, \quad E_2 = C_{21} P_1 + C_{22} P_2;$$

in ihnen bezeichnen die C_{hk} die sogenannten Kapazitätskoefficienten, die allgemein auf S. 34 definiert sind. Für letztere gilt nach (15') stets

$$C_{12} = C_{21};$$

ist das Konduktorensystem (1, 2) symmetrisch, wie wir annehmen wollen, so gilt auch noch

$$C_{11} = C_{22},$$

und wir erhalten für die Differenz der Ladungen

$$E_1 - E_2 = (C_{11} - C_{12})(P_1 - P_2). \tag{240'')}$$

Bilden die beiden Konduktoren einen Kondensator, d. h., stellen sie zwei parallele, einander außerordentlich nahe Platten dar, so ist C_{11} merklich gleich $-C_{12}$; denn wenn man die eine Platte (2) zur Erde

ableitet, also $P_2 = 0$ macht, so wird auf ihr nahezu die gleiche und entgegengesetzte Ladung gebunden, wie sie sich auf (1) befindet.

Setzen wir noch $C_{11} = C$, so wird

240''') $$E_1 - E_2 = 2\,C(P_1 - P_2),$$

und es ergiebt sich aus (240) und (240')

240'''') $$I = -\,C\frac{d(P_1 - P_2)}{dt} = -\,C\frac{dL'}{dt}.$$

Differentiiert man (238) nach t, so kann man mit Hilfe dieser Beziehung L' eliminieren und erhält

241) $$W\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} + Q\frac{d^2 I}{dt^2} = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$I = a_1 e^{p_1 t} + a_2 e^{p_2 t},$$

worin die a_h und die p_h reelle oder komplexe Konstanten bezeichnen; die p_h sind bestimmt durch

241') $$2\,Qp = -\,W \pm \sqrt{W^2 - \frac{4\,Q}{C}},$$

während die a_h sich aus den Anfangsbedingungen des Problemes ableiten.

Da Q, wie C, positiv ist, so kann der Ausdruck unter der Wurzelgröße sowohl positiv, als negativ sein, es können somit die Werte p_h sowohl reell negativ, als komplex konjugiert werden.

Um reelle p_h zu erhalten, wird man einen sehr langen und dünnen, nicht zu einer Rolle gewundenen, sondern am besten in der S. 389 besprochenen Weise doppelt geführten Draht und einen Kondensator von großer Kapazität C kombinieren müssen. In diesem Falle verläuft die elektrische Strömung aperiodisch, d. h. durchaus in einem Sinne allmählich abklingend.

Wird dagegen, etwa durch Aufwinden des Schließungsdrahtes zu einer Rolle, Q derartig vergrößert, und eventuell C gleichzeitig verkleinert, daß die Wurzeln p_h konjugiert komplex werden, so wird die Stromstärke I durch einen Ausdruck von der Form

$$I = a\,e^{-\lambda t}\sin\alpha(t + t_0)$$

gegeben, die eine gedämpfte Schwingung darstellt. Hierin bezeichnen a und t_0 aus den obigen a_1 und a_2 folgende Konstanten; das logarithmische Dekrement λ und die Periode τ der Schwingung sind bestimmt durch

241'') $$\lambda = \frac{W}{2\,Q}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{1}{2\,Q}\sqrt{\frac{4\,Q}{C} - W^2}.$$

Man kann in praxi die Verhältnisse leicht so einrichten, daß W^2 neben $4\,Q/C$ vernachlässigt werden kann, und erhält dann

$$\tau = 2\,\pi\sqrt{Q\,C}. \qquad 241''')$$

Dieses Gesetz findet sich bei Entladungen von Leydener Flaschen durch Drähte von der Länge einer mäßigen Zahl von Metern, wie dieselben zuerst von FEDDERSEN beobachtet worden sind, durch die Erfahrung sehr gut bestätigt [119]); es muß daher bei diesem Vorgang die Voraussetzung einer längs der Schließung konstanten Stromstärke trotz der unter bequem herstellbaren Verhältnissen außerordentlich kleinen Periode der Schwingungen von einigen Hunderttausendteln einer Sekunde nahezu erfüllt sein.

Da man Hilfsmittel besitzt, auch Perioden von solcher Kleinheit sehr genau zu messen, so giebt die Formel (241''') eine wichtige Methode an die Hand, die Selbstinduktion eines lineären Leiters unter gewissen Bedingungen zu bestimmen; über die Ableitung der hierzu nötigen Größe der Kapazität C ist an einer anderen Stelle gesprochen.

Umgekehrt kann man die Beobachtung von τ bei demselben lineären Leiter auch benutzen, um die Kapazitäten verschiedener Kondensatoren, oder aber diejenigen desselben Kondensators bei Erfüllung mit verschiedenen Dielektrica zu vergleichen. Im letzteren Falle gelangt man zu einer Bestimmung der bezüglichen Dielektricitätskonstanten, und diese Methode besitzt bedeutende Vorzüge, weil sie mit schnell wechselnden Ladungen operiert, und demgemäß vom Einfluß der elektrischen Leitfähigkeit ziemlich vollständig befreit. [120]) —

Wenn neben der Ladung zweier, an die Enden des lineären Leiters gehängten Konduktoren noch eine zeitlich wechselnde elektromotorische Kraft $L_1^{\cdot}$ wirkt, so nimmt die Formel (241) die Gestalt an

$$W\frac{d\,I}{d\,t} + \frac{I}{C} + Q\frac{d^2\,I}{d\,t^2} = \frac{d\,L_1^{\cdot}}{d\,t} \qquad 242)$$

und wird integriert durch

$$I = \frac{e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}\left(\int\frac{d\,L_1^{\cdot}}{d\,t}\,e^{-p_1 t}dt + c_1\right) + \frac{e^{p_2 t}}{p_2 - p_1}\left(\int\frac{d\,L_1^{\cdot}}{d\,t}\,e^{-p_2 t}dt + c_2\right), \qquad 242')$$

worin p_1 und p_2 dieselbe Bedeutung haben, wie oben, und c_1 und c_2 die Integrationskonstanten bezeichnen, die sich durch den Anfangszustand bestimmen.

Wir wollen eine periodische äußere Einwirkung voraussetzen, also

$$L_1^{\cdot} = a \sin \alpha\,t$$

wählen, wobei die Periode τ gegeben ist durch $\alpha = 2\,\pi/\tau$; wenn die

Einwirkung bereits sehr lange Zeit andauert, sind die vom Anfangszustand herrührenden Glieder in (242′) sehr klein und können vernachlässigt werden.

Wir genügen dann der Differentialgleichung durch den Ansatz

$$I = a_1 \cos \alpha t + a_2 \sin \alpha t = a_0 \sin \alpha (t + t_0),$$

worin a_0 als die Amplitude, αt_0 als die Phasendifferenz von I gegen L_1' bezeichnet werden kann; dabei gilt

$$242'') \qquad a_0^2 = \frac{a^2 \alpha^2}{W^2 \alpha^2 + \left(Q\alpha^2 - \frac{1}{C}\right)^2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha t_0 = -\frac{Q\alpha^2 - \frac{1}{C}}{W\alpha}.$$

Der erste Wert zeigt, daß a_0^2 ein Maximum erreicht für $\alpha = \bar{\alpha}$, wobei

$$242''') \qquad \bar{\alpha} = \frac{2\pi}{\bar{\tau}} = \frac{1}{\sqrt{QC}} \text{ oder } \bar{\tau} = 2\pi\sqrt{QC};$$

die Größe dieses Maximums ist

$$\bar{a}_0 = \frac{a}{W},$$

es folgt also anscheinend dem Ohm'schen Gesetz. Ist die Bedingung (242‴) des Maximums erfüllt, so folgt aus der zweiten Formel (242″)

$$t_0 = 0;$$

die Schwingungen von I und von L_1' geschehen hier also in gleicher Phase.

Da die durch (242‴) bestimmte singuläre Periode $\bar{\tau}$ mit der in (241‴) unter einer gewissen Vernachlässigung erhaltenen Periode τ der Eigenschwingung des Leiters zusammenfällt, so ergiebt sich das wichtige Resultat, daß der mit einem Kondensator verbundene offene lineäre Leiter am stärksten induziert wird durch eine Kraft L_1', welche die Periode seiner Eigenschwingung besitzt.

Diese Beziehung kann unter andern zur Bestimmung der einen der beiden Perioden τ oder $\bar{\tau}$ dienen, wenn die andere in bekannter Weise veränderlich ist. —

Nahe Verwandtschaft mit den vorstehenden Problemen besitzt der Vorgang der Schwingungen innerhalb eines geschlossenen Leiters, der ausser einer periodisch wirkenden elektromotorischen Kraft L' eine Zelle mit einer zersetzbaren Flüssigkeit und zwei gleichen Elektroden enthält. Wenn der Strom durch die Zelle hindurchgeht, so scheiden sich, wie in § 34 ausgeführt ist, die Zersetzungsprodukte in einer der Stromdichte proportionalen Menge auf den Elektroden ab und verwandeln hierdurch die Flüssigkeitszelle mit den ursprünglich

gleichartigen Elektroden in eine galvanische Kette, deren elektromotorische Kraft dem sie erzeugenden Strom entgegenwirkt. Die Stärke dieser Gegenkraft ist bei geringer Dichte der Niederschläge mit der Dicke derselben, und somit angenähert mit der ganzen Strommenge proportional, welche die Zelle bis zu dem betrachteten Moment passiert hat.

Bezeichnen wir also mit k eine Konstante, so können wir aus Formel (238) folgern

$$I W = L' - k \int_0^t I \, d t - Q \frac{d I}{d t},$$

also

$$W \frac{d I}{d t} = \frac{d L'}{d t} - k I - Q \frac{d^2 I}{d t^2}.$$

Diese Formel stimmt mit (242) vollständig überein; die Wirkung der elektro-chemischen Gegenkraft ist also ganz dieselbe, wie die eines eingeschalteten Kondensators von der — wohl stets sehr großen — Kapazität $C = 1/k$. —

Auch die vorstehenden Entwickelungen gestatten eine Erweiterung von dem zunächst vorausgesetzten Fall unverzweigter Leiter auf den verzweigter. Wie eine einfache Überlegung zeigt, läßt sich die Gleichung (242) auf den zwischen den Knotenpunkten (μ) und (ν) verlaufenden Zweig übertragen, wenn man nur die dort wirkende elektromotorische Kraft $L'_{\mu\nu}$ durch die Potentialdifferenz $P_\mu - P_\nu$ zwischen den Knotenpunkten ergänzt. Dabei soll, wie früher, die wechselseitige Induktion verschiedener Zweige ignoriert werden.

Man erhält so

$$W_{\mu\nu} \frac{d I_{\mu\nu}}{d t} + \frac{I_{\mu\nu}}{C_{\mu\nu}} = \frac{d}{d t} (L'_{\mu\nu} + P_\mu - P_\nu) - Q_{\mu\nu} \frac{d^2 I_{\mu\nu}}{d t^2};$$

bei Summation dieser Formel über alle Teile eines beliebigen, in dem System enthaltenen, geschlossenen Kreises ergiebt sich dann

$$\mathrm{S}\left(W_{\mu\nu} \frac{d I_{\mu\nu}}{d t} + \frac{I_{\mu\nu}}{C_{\mu\nu}} - \frac{d L'_{\mu\nu}}{d t} + Q_{\mu\nu} \frac{d^2 I_{\mu\nu}}{d t^2} \right) = 0. \qquad 243)$$

Für Zweige, welche keinen Kondensator enthalten, ist die Kapazität $C_{\mu\nu}$ gleich unendlich zu setzen, um auf die für diesen Fall geltende Formel (239) zurückzukommen.

Ist die Selbstinduktion $Q_{\mu\nu}$ klein, so kann unter Umständen das letzte Glied neben den übrigen ignoriert werden, und die obige Formel nimmt dann eine mit (239) verwandte Gestalt an, gestattet auch eine ähnliche Verwendung.

Mit (243) ist, wie früher, als für jeden Knotenpunkt gültig zu kombinieren die Gleichung

243') $$\Sigma_\lambda I_{\lambda\mu} = 0\,.$$

In dem Falle, daß die Anordnung mit derjenigen der WHEATSTONEschen Brücke übereinstimmt, daß in den Zweigen $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\delta)$ Kondensatoren nicht liegen, daß dagegen $(\alpha\gamma)$ eine periodisch wirkende elektromotorische Kraft enthält, genügt die Anwendung der Formel (243) auf die beiden Kreise $(\alpha\beta\delta\alpha)$ und $(\gamma\beta\delta\gamma)$, sowie diejenige der Formel (243') auf die Knotenpunkte (β) und (δ), um die Bedingung für das Verschwinden des Stromes in der Brücke zu erhalten.

Setzt man

$$I_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ipt},$$

so ergiebt sich

$$A_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{C_{\alpha\beta}} + ip\,W_{\alpha\beta}\right) = A_{\alpha\delta}\left(\frac{1}{C_{\alpha\delta}} + ip\,W_{\alpha\delta}\right),$$

$$A_{\gamma\beta}\left(\frac{1}{C_{\gamma\beta}} + ip\,W_{\gamma\beta}\right) = A_{\gamma\delta}\left(\frac{1}{C_{\gamma\delta}} + ip\,W_{\gamma\delta}\right),$$

$$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\gamma}, \quad A_{\alpha\delta} = A_{\delta\gamma},$$

woraus folgt

$$\left(\frac{1}{C_{\alpha\beta}} + ip\,W_{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1}{C_{\gamma\delta}} + ip\,W_{\gamma\delta}\right) = \left(\frac{1}{C_{\gamma\beta}} + ip\,W_{\gamma\beta}\right)\left(\frac{1}{C_{\alpha\delta}} + ip\,W_{\alpha\delta}\right);$$

d. h. aber

243'') $$\begin{cases} \dfrac{1}{C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta}} - p^2 W_{\alpha\beta} W_{\gamma\delta} = \dfrac{1}{C_{\gamma\beta}C_{\alpha\delta}} - p^2 W_{\gamma\beta} W_{\alpha\delta}, \\ \dfrac{W_{\alpha\beta}}{C_{\gamma\delta}} + \dfrac{W_{\gamma\delta}}{C_{\alpha\beta}} = \dfrac{W_{\gamma\beta}}{C_{\alpha\delta}} + \dfrac{W_{\alpha\delta}}{C_{\gamma\beta}}. \end{cases}$$

Bei gleichen Widerständen der vier Zweige muß also

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}, \quad C_{\gamma\beta} = C_{\gamma\delta}$$

sein, damit der Strom in der Brücke verschwindet.

Dieses Resultat giebt abermals ein Verfahren zur Bestimmung von Dielektricitätskonstanten an die Hand, welches analoge Vorzüge besitzt, wie das auf S. 405 besprochene.[121]) —

Die obigen Entwickelungen bedürfen einer Korrektion, wenn die in die Kondensatoren eingeführten Dielektrica eine merkliche Leitfähigkeit besitzen.

Wir betrachten den in dem Zweig $(\mu\nu)$ liegenden Kondensator und nennen seine (μ) zunächst liegende Platte μ', die (ν) zugewande ν', ihre Ladungen und Potentialwerte entsprechend $E_{\mu'}, E_{\nu'}, P_{\mu'} P_{\nu'}$.

Dann ist, wenn keine elektromotorische Kraft in dem Zweige $(\mu\nu)$ liegt,

244) $$P_\mu - P_{\mu'} = I_{\mu\mu'} W_{\mu\mu'}, \quad P_{\mu'} - P_{\nu'} = I_{\mu'\nu'} W_{\mu'\nu'}, \quad P_{\nu'} - P_\nu = I_{\nu'\nu} W_{\nu'\nu};$$

zugleich gilt $I_{\mu\mu'} = I_{\nu'\nu} = I_{\mu\nu}$, denn der Strom von μ nach ν ist im Kondensator durch Leitungs- und Polarisationsstrom geschlossen; dagegen ist nicht $I_{\mu\nu} = I_{\mu'\nu'}$, weil $I_{\mu'\nu'}$ nur den Leitungsstrom im Kondensator angiebt.

Weiter gilt, da nach (240''') auch $E_{\mu'} - E_{\nu'} = 2\,C_{\mu\nu}(P_{\mu'} - P_{\nu'})$ ist, gemäß (240'''')

$$C_{\mu\nu}\frac{d(P_{\mu'} - P_{\nu'})}{d\,t} = I_{\mu\nu} - I_{\mu'\nu'};$$

kombiniert man hiermit die obige Formel (244) für $I_{\mu'\nu'}$ und setzt kurz

$$P_{\mu'} - P_{\nu'} = \pi_{\mu\nu}, \quad W_{\mu'\nu'} = w_{\mu\nu}, \tag{244'}$$

so giebt dies

$$C_{\mu\nu}\frac{d\,\pi_{\mu\nu}}{d\,t} + \frac{\pi_{\mu\nu}}{w_{\mu\nu}} = I_{\mu\nu}. \tag{244''}$$

Hierzu kommt, gleichfalls aus (244) zu gewinnen, wenn man

$$W_{\mu\mu'} + W_{\nu\nu'} = W_{\mu\nu}$$

setzt,

$$P_\mu - P_\nu = I_{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu};$$

summiert man dies über einen geschlossenen Kreis, so folgt

$$\mathsf{S}\,(I_{\mu\nu} W_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu}) = 0. \tag{244'''}$$

Die Gleichung

$$\Sigma_\lambda I_{\lambda\mu} = 0 \tag{244''''}$$

für die Knotenpunkte (μ) bleibt ungeändert.

Für den speziellen Fall periodischer Schwingungen setzen wir

$$I_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ipt}, \quad \pi_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} e^{ipt},$$

und erhalten aus (244'')

$$B_{\mu\nu}\left(ip\,C_{\mu\nu} + \frac{1}{w_{\mu\nu}}\right) = A_{\mu\nu},$$

aus (244''')

$$\mathsf{S}\,(A_{\mu\nu} W_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) = 0,$$

und durch Kombination beider Formeln

$$\mathsf{S}\,A_{\mu\nu}\left(W_{\mu\nu} + \frac{w_{\mu\nu}}{1 + i\,p\,C_{\mu\nu} w_{\mu\nu}}\right) = 0; \tag{245}$$

endlich aus (244'''')

$$\Sigma_\lambda A_{\lambda\mu} = 0. \tag{245'}$$

Diese allgemeinen Formeln wollen wir wieder auf die nach S. 408 modifizierte Wheatstone'sche Brückenkombination anwenden und erhalten in der S. 401 angedeuteten Weise als Bedingung für das Verschwinden des Stromes in der Brücke, falls kurz

$$W_{\mu\nu} + w_{\mu\nu} \frac{(1 - i p C_{\mu\nu} w_{\mu\nu})}{1 + p^2 C_{\mu\nu}^2 w_{\mu\nu}^2} = M_{\mu\nu} - i N_{\mu\nu}$$

gesetzt wird,

$$M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta} - N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = M_{\gamma\beta} M_{\alpha\delta} - N_{\gamma\beta} N_{\alpha\delta},$$
$$M_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} + M_{\gamma\delta} N_{\alpha\beta} = M_{\gamma\beta} N_{\alpha\delta} + M_{\alpha\delta} N_{\gamma\beta}.$$

Sei nun in den Zweigen $(\gamma\beta)$ und $(\gamma\delta)$ kein Kondensator eingeschaltet, also nach S. 407 $C_{\gamma\beta}$ und $C_{\gamma\delta}$ unendlich gesetzt, dann ist $N_{\gamma\beta}$ und $N_{\gamma\delta}$ gleich Null, $M_{\gamma\beta} = W_{\gamma\beta}$, $M_{\gamma\delta} = W_{\gamma\delta}$; somit gilt hier, wenn wir noch $W_{\gamma\delta} = W_{\gamma\beta}$ machen,

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\delta}, \text{ d. h.}$$

245′′) $$W_{\alpha\beta} + \frac{w_{\alpha\beta}}{1 + p^2 C_{\alpha\beta}^2 w_{\alpha\beta}^2} = W_{\alpha\delta} + \frac{w_{\alpha\delta}}{1 + p^2 C_{\alpha\delta}^2 w_{\alpha\delta}^2};$$

ferner

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\delta}, \text{ d. h.}$$

245′′′) $$\frac{C_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta}^2}{1 + p^2 C_{\alpha\beta}^2 w_{\alpha\beta}^2} = \frac{C_{\alpha\delta} w_{\alpha\delta}^2}{1 + p^2 C_{\alpha\delta}^2 w_{\alpha\delta}^2}.$$

In praxi werden die Widerstände $w_{\alpha\beta}$ und $w_{\alpha\delta}$ in den Dielektrica der Kondensatoren immer groß sein gegen die $W_{\alpha\beta}$ und $W_{\alpha\delta}$ der übrigen Teile der betreffenden Zweige; bei hinreichend kleinem p, $C_{\alpha\beta}$ und $C_{\alpha\delta}$ wird man daher in Formel (245′′) die ersten Glieder rechts und links neben den zweiten vernachlässigen können und schreiben

$$\frac{w_{\alpha\beta}}{1 + p^2 C_{\alpha\beta}^2 w_{\alpha\beta}^2} = \frac{w_{\alpha\delta}}{1 + p^2 C_{\alpha\delta}^2 w_{\alpha\delta}^2}.$$

Kombiniert man dies Resultat mit (245′′′), so erhält man

$$C_{\alpha\beta} w_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta} w_{\alpha\delta};$$

in Rücksicht hierauf liefert die vorige Formel

$$w_{\alpha\beta} = w_{\alpha\delta},$$

und die letzte ergiebt jetzt

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\delta}.$$

Macht man die Kapazität und den Widerstand des Kondensators in dem Zweige $(\alpha\delta)$ in meßbarer Weise veränderlich, so kann man zugleich $C_{\alpha\beta}$ und $w_{\alpha\beta}$, und damit für das in den betreffenden Kondensator eingeschaltete Dielektricum sowohl die Konstante der Permeabilität, als diejenige der Leitfähigkeit bestimmen, indem man die Werte $C_{\alpha\delta}$ und $w_{\alpha\delta}$ aufsucht, welche den Strom in der Brücke zum Verschwinden bringen. Die Resultate haben nach dem S. 89 Gesagten eine große prinzipielle Bedeutung.

Man erkennt übrigens leicht, daß die vorstehende Entwickelung anwendbar bleibt, wenn der Widerstand $w_{\alpha\beta}$ nicht von dem Dielektricum des Kondensators geliefert wird, sondern von einem beliebigen, zwischen die Kondensatorplatten geschalteten, induktionsfreien Leiter herrührt. Bei den erwähnten Anwendungen benutzt man passend eine Flüssigkeitssäule von veränderlicher Länge.[122]

Wesentliche Vorbedingung für die Anwendbarkeit dieser Methode ist die Zulässigkeit der oben in (245″) eingeführten Vernachlässigung. —

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der wechselseitigen Induktion zweier lineärer Leiter, die mit (1) und (2) bezeichnet werden mögen.

Die allgemeinen Grundformeln (229‴) nehmen hier die Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} I_1 W_1 &= L_1' - \frac{d}{dt}(I_2 Q_{12}) - \frac{d}{dt}(I_1 Q_{11}), \\ I_2 W_2 &= L_2' - \frac{d}{dt}(I_1 Q_{21}) - \frac{d}{dt}(I_2 Q_{22}). \end{aligned}\right\} \tag{246}$$

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß beide Leiter ruhen, daß die Induktion also nur durch Änderungen der Stromstärken I_1 und I_2 bewirkt wird; dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} I_1 W_1 &= L_1' - Q_{12}\frac{dI_2}{dt} - Q_{11}\frac{dI_1}{dt}, \\ I_2 W_2 &= L_2' - Q_{21}\frac{dI_1}{dt} - Q_{22}\frac{dI_2}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{246'}$$

Durch Elimination von je einem der I_h kann man für das andere eine Differentialgleichung zweiter Ordnung erhalten; so gilt für I_1

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 I_1}{dt^2}(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2) + \frac{dI_1}{dt}(W_2 Q_{11} + W_1 Q_{22}) + I_1 W_1 W_2 \\ = L_1' W_2 - Q_{12}\frac{dL_2'}{dt} + Q_{22}\frac{dL_1'}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{246''}$$

eine Formel, die mit (241) wesentlich gleich gestaltet ist.

Trotzdem zeigt das aus zwei Leitern kombinierte System keine Eigenschwingungen. Setzt man nämlich die beiden L_h' gleich Null und

$$I_1 = c e^{pt} + c' e^{p't},$$

so erhält man für die p

$$\left.\begin{aligned} &2(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)\,p \\ &= -(W_2 Q_{11} + W_1 Q_{22}) \pm \sqrt{(W_2 Q_{11} - W_1 Q_{22})^2 + 4 W_1 W_2 Q_{12}^2}, \end{aligned}\right\} \tag{246'''}$$

und hierin ist die Größe unter dem Wurzelzeichen stets positiv. Die p sind also reell und, wie man leicht erkennt, beide negativ.

Demgemäß tritt ohne Einwirkung veränderlicher L_h' eine Stromstärke ein, deren Gesetz durch die Superposition von zwei, mit verschiedenen Geschwindigkeiten abnehmenden Gliedern gegeben ist.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß, nachdem für $t<0$ beide Stromstärken gleich Null gewesen sind, zur Zeit $t=0$ in dem einen Leiter, der mit (1) bezeichnet werden mag, eine konstante elektromotorische Kraft L_1' eingeschaltet wird, während L_2' dauernd gleich Null bleibt.

Bezeichnen wir jetzt die beiden Wurzeln für p, die aus (246''') bei positivem und bei negativem Vorzeichen folgen, mit p und p', so ergiebt die einfache Rechnung

$$246'''') \quad \begin{cases} I_1 = \dfrac{L_1'}{W_1}\left[1 - \dfrac{(W_1 + Q_{11}p')\,p\,e^{pt} - (W_1 + Q_{11}p)\,p'e^{p't}}{W_1(p-p')}\right], \\ I_2 = \dfrac{L_1'(W_1 + Q_{11}p')(W_1 + Q_{11}p)}{W_1^2\,Q_{12}(p-p')}\left(e^{pt} - e^{p't}\right) \\ \quad = -\dfrac{L_1'\,Q_{12}(e^{pt} - e^{p't})}{(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)(p-p')}. \end{cases}$$

I_1 nähert sich also, von Null ansteigend, asymptotisch dem Grenzwert $I\infty = L_1'/W_1$; I_2 wächst bis zu einem Maximum, für welches Zeitpunkt und Größe leicht angebbar ist, und nimmt dann bis Null ab.

Für den Integralstrom in (2) findet man

$$J_2 = \int_0^\infty I_2\,dt = -\frac{Q_{12}L_1'}{W_1 W_2} = -\frac{Q_{12}I\infty}{W_2},$$

ein Resultat, das man am kürzesten aus der zweiten Formel (246') ableiten kann, indem man sie bei verschwindendem L_2' nach Multiplikation mit dt von $t=0$ bis $t=\infty$ integriert und die Grenzwerte von I_1 und I_2 berücksichtigt.

Versteht man unter J_1' den in (1) fließenden Integralstrom, abzüglich des nach dem Ohm'schen Gesetz aus der konstanten elektromotorischen Kraft L_1' folgenden Anteiles, so ergiebt sich

$$J_1' = \int_0^\infty\left(I_1 - \frac{L_1'}{W_1}\right)dt = -\frac{Q_{11}L_1'}{W_1^2} = -\frac{Q_{11}I\infty}{W_1};$$

dieser Betrag kann als die Stärke des i n d u z i e r t e n Integralstromes bezeichnet werden.

Ströme der vorstehend besprochenen Art werden in den S. 396 erwähnten Rhumkorff'schen Funkeninduktoren bei jeder S c h l i e ß u n g der primären, die Kette enthaltenden Rolle in der sekundären induziert.

Die beim Öffnen der primären Rolle eintretenden Vorgänge sind komplizierter. Da die Enden der primären Leitung mit den Platten eines Kondensators verbunden zu sein pflegen, so setzen nach der Öffnung in dieser allmählich abklingende Schwingungen ein, die einerseits auf die sekundäre Rolle induzierend wirken, andererseits durch die dort auftretenden Ströme rückwärts modifiziert werden. Die Formeln sind durch eine Erweiterung, welche den Kondensator berücksichtigt, aus (246′) sogleich zu bilden und leicht zu integrieren. —

Bei diesem Apparat, wie bei manchen andern Anordnungen zur Beobachtung von Induktionserscheinungen pflegt einer der lineären Leiter eine kürzere oder längere Unterbrechung zu besitzen, in der die induzierten Ströme Funken erregen. Die Bedingungen an solchen Unterbrechungsstellen oder Funkenstrecken sind noch wenig aufgeklärt. Wahrscheinlich finden nach einander zwei ganz verschiedene Vorgänge statt. Erst wirkt die Lücke wie der Zwischenraum in einem Kondensator, und es bildet sich eine wachsende Potentialdifferenz zwischen den beiden Leiterenden aus; hat dieselbe eine bestimmte Größe erreicht, so schlägt ein Funke über, und die durch ihn erhitzte Luftstrecke stellt eine kurze Zeit hindurch eine leitende Verbindung her, deren Widerstand mit wachsender Abkühlung zunimmt, und dadurch eine wieder allmählig ansteigende Spannung zwischen den Enden bewirkt, die schließlich durch eine neue Entladung vernichtet wird.

Das Zusammenwirken dieser Vorgänge mit den im übrigen Leiter sich abspielenden kompliziert natürlich die Erscheinungen bedeutend und kann unter Umständen ihren ganzen Charakter verändern. Dies fällt umsomehr ins Gewicht, als namentlich bei Schwingungen der Stromstärke eben jene Funkenentladungen in vielen Fällen den eigentlichen Gegenstand der Beobachtung bilden.

Um den störenden Einfluß überhaupt möglichst klein zu machen, würde man die Funkenstrecke so kurz wählen müssen, als mit der deutlichen Wahrnehmung der Funken irgend verträglich ist; indessen ist dann aus der Periode der Funken nicht einfach auf die der elektrischen Schwingung zurückzuschließen; letztere kann vielmehr die erstere weit übertreffen. Die sicherste Übereinstimmung beider Perioden würde umgekehrt dann erhalten werden, wenn man die Funkenstrecke möglichst lang wählte; denn dann wird der Funke nur bei dem stärksten überhaupt auftretenden Potentialgefälle in der Unterbrechungsstelle einsetzen, und dieses kommt in jeder ganzen Schwingung nur zweimal vor. Aber hier wird voraussichtlich der ganze Vorgang im Leiter durch die Funkenstrecke außerordentlich

beeinflußt. Eine vollständige Überwindung der hierin liegenden Schwierigkeiten ist noch nicht gelungen.

Bei den oben erwähnten FEDDERSEN'schen Schwingungen scheint der Vorgang relativ einfach so zu verlaufen, daß sehr bald nach dem Beginn der Entladung der erste Funke erscheint, und daß während der ersten halben Periode, in welcher I das erste positive Maximum erreicht, die Funkenstrecke unter der Wirkung der einmaligen Erwärmung durch den Funken und der andauernden durch den folgenden Strom leitend bleibt; am Ende der halben Periode, wo I wieder den Wert Null erreicht, hört die Leitung auf, und es setzt gleich darauf der neue Funke ein, der wiederum für die ganze nächste Periodenhälfte die Funkenstrecke leitend macht.

Daß dem so ist, und daß somit hier die Funkenstrecke nur in relativ verschwindenden Zeiträumen wirklich nicht leitend ist, kann man allerdings nur aus der Übereinstimmung des beobachteten Wertes der Periode mit dem durch (241''') gegebenen schließen; von vornherein wäre dieses Resultat nicht wahrscheinlich zu machen gewesen, und auch der gezogene Schluß entbehrt nicht der Bedenken. —

Zum Schluß dieses auf lineäre Leiter bezüglichen Teiles mag noch auf die Beziehungen aufmerksam gemacht werden, welche eine merkwürdige allgemeine Theorie, die in § 18 des ersten Teiles auseinandergesetzt ist, zwischen den Grundgleichungen der Induktion in lineären Leitern und den allgemeinen Prinzipien der Mechanik herstellt. Insbesondere stimmen die Formeln (156) daselbst — abgesehen von der Bezeichnung — mit den obigen Gleichungen (246) für die gegenseitige Induktion zweier lineärer Leiter durchaus überein, während die Formeln (162') dort die Gesetze der Magnetoinduktion eines lineären Leiters unter Rücksicht auf seine Selbstinduktion im Einklang mit den Resultaten von S. 376 und S. 382 hier angeben.

§ 41. Allgemeine Gesetze der in körperlichen Leitern und Dielektrica induzierten elektrischen Kräfte. Die Energie im elektromagnetischen Felde.

Die Überlegungen der §§ 36 und 37 haben uns zwar in der Formel

247) $$L = \int S\,d\,s = \frac{d\,\Gamma}{d\,t}$$

das Gesetz für das Linienintegral der induzierten elektrischen Kraft über einen geschlossenen lineären Leiter geliefert; sie geben uns aber keinen Aufschluß über den Wert von S in seinen einzelnen

Elementen, noch weniger über die Größe und die Richtung der resultierenden elektrischen Kraft K ebenda, von der S nur die Komponente nach der Richtung des Leiterelementes ds ist.

Die Bestimmung dieser Größen ist selbstverständlich auf Grund des bisher über Induktion Beigebrachten nicht möglich; es gelingt indessen, über sie einen allgemeinen Satz abzuleiten mit Hilfe der Annahme, daß K, wie von der Substanz, so auch von dem Querschnitt und von der Orientierung des Leiterelementes unabhängig ist, innerhalb dessen es wirkt.

Man könnte diese Annahme dadurch beweisen, daß man um einen geschlossenen linearen Leiter einen zweiten von beliebiger Substanz und beliebigem Querschnitt so windet, daß der zweite sich nirgends merklich vom ersteren entfernt, ihn aber in beliebigen Windungen umgiebt, und dann beide Leiter widersinnig hintereinander in die Schließung eines Galvanometers einschaltet.

Induziert man das System, etwa durch einen bewegten Magneten, wobei Sorge zu tragen ist, daß eine merkliche Wirkung nur auf den Doppelleiter geübt wird, so kann sich im Galvanometer nur dann ein Strom ankündigen, wenn die Gesamtkraft K am gleichen Orte für beide Leiter verschieden ist. Schreibt man nämlich den Ausdruck für L folgendermaßen:

$$L = \int S\,ds = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \qquad 247')$$

so erkennt man, daß das Integral über den aus obigen beiden unendlich nahen Leitern gebildeten, nahezu geschlossenen Kreis verschwindet, falls X, Y, Z nur Funktionen des Ortes sind. Denn sowohl der eine, wie der andere Leiter ist nach der Formel (247') dann ersetzbar durch dieselbe sich ihm unendlich nahe anschließende Zickzacklinie, deren Elemente abwechselnd den drei Koordinatenaxen parallel sind, und in denen das eine und das andere Mal die gleichen elektrischen Kräfte wirken.

Um diese Thatsache zu verwerten, sehen wir wieder alle Induktion des betrachteten linearen Leiters als Elektroinduktion an, ersetzen also alle Magnetismen durch die äquivalenten Ströme. Ferner benutzen wir den Ausdruck für das Potential eines beliebigen freien Stromsystemes (1) auf einen geschlossenen linearen Leiter mit der Stromstärke I, der aus (175'') folgt und lautet

$$\Psi'_{10} = -\frac{I}{v}\int (\mathfrak{U}\,dx + \mathfrak{V}\,dy + \mathfrak{W}\,dz),$$

um den Wert des virtuellen Potentiales $X' = \Psi'_{10}/I$ auf den linearen Leiter zu bilden. Den erhaltenen Wert setzen wir in (247) ein,

berücksichtigen, daß, weil der lineäre Leiter ruht, nur $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ Funktionen der Zeit sind, und kombinieren schließlich die beiden Ausdrücke (247) und (247') für L. Das Resultat ist die Formel

$$-\frac{1}{v}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}dx+\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}dy+\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}dz\right)=\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

welche für jede Gestalt des lineären Leiters gelten soll; sie zerfällt daher in die drei Gleichungen[123])

247'') $$X=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t},\quad Y=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}-\frac{1}{v}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t},\quad Z=-\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}-\frac{1}{v}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t},$$

in denen $\mathfrak{F}$ eine einwertige Funktion von x, y, z bezeichnet, über deren Wert wir nichts aussagen können, da sie bei Bildung des Linienintegrales $\int S ds$ verschwindet, die aber offenbar den Charakter der Potentialfunktion elektrischer Ladungen besitzt.

Eliminieren wir $\mathfrak{F}$ aus den vorstehenden Gleichungen, so erhalten wir den angekündigten Satz über die Komponenten X, Y, Z, der sich besonders einfach schreibt, wenn man die Beziehungen (142) benutzt, welche lauten

$$\mathfrak{A}=\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},\quad \mathfrak{B}=\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x},\quad \mathfrak{C}=\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y};$$

man erhält so[124])

248) $$\begin{cases} v\left(\dfrac{\partial Y}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t},\quad v\left(\dfrac{\partial Z}{\partial x}-\dfrac{\partial X}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t},\\ v\left(\dfrac{\partial X}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial\mathfrak{C}}{\partial t}.\end{cases}$$

Nach Bd. I, S. 192 stellen hierin die links stehenden Ausdrücke bis auf einen konstanten Faktor die Drehungsmomente um die Koordinatenaxen dar, welche eine sehr kleine, mit positiver Elekricität homogen geladene Kugel an der Stelle x, y, z durch die elektrischen Kräfte X, Y, Z erleiden würde; die rechts stehenden Differentialquotienten sind die Änderungsgeschwindigkeiten der Komponenten der an derselben Stelle bestehenden magnetischen Polarisation $\mathfrak{R}$. Beide Größenarten lassen sich als Vektorkomponenten zu Resultierenden zusammensetzen; die Resultierende der links stehenden Größen wird dem ganzen elektrischen Drehungsmoment proportional sein und mag als Wirbelstärke der elektrischen Kraft bezeichnet werden; die Resultierende

$$\mathfrak{R}'=\sqrt{\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial t}\right)^2}$$

mag die Änderungsgeschwindigkeit der magnetischen Polarisation, oder kürzer die magnetische Polarisationsgeschwindigkeit heißen.

Unter Rücksicht hierauf können wir den Inhalt der Formeln (248) dahin aussprechen, daß mit jeder Änderung der magnetischen Polarisation nach Größe und Richtung verbunden sind Wirbel elektrischer Kräfte, deren Axe in die Richtung der Polarisationsgeschwindigkeit $\mathfrak{R}'$ fällt, und deren Intensität mit $\mathfrak{R}'$ proportional ist. Dabei umkreisen die elektrischen Wirbel die Richtung der positiven magnetischen Polarisationsgeschwindigkeit in negativem Sinne.

Unsere definitiven Formeln (248) bringen die elektrische Kraft K an einer beliebigen Stelle des Leiters in Verbindung allein mit der Polarisationsgeschwindigkeit $\mathfrak{R}'$ an derselben Stelle. Da überdies K von der Substanz und von der Konfiguration des Leiters unabhängig ist, so können wir sie von einem linearen sofort auf einen körperlichen, von einem homogenen auf einen stetig veränderlichen Leiter übertragen. Außerdem entspricht es genau der S. 89 zuerst erörterten und S. 351 wieder benutzten Vorstellung von dem stetigen Übergang zwischen den Qualitäten von Leitern und Nichtleitern, sie auf Dielektrica in derselben Weise anzuwenden, wie auf Leiter.

Wir bezeichnen sie in dieser verallgemeinerten Bedeutung als die allgemeinen Induktionsformeln für ruhende Körper und betrachten sie, unabhängig von dem Wege, auf dem sie gefunden sind, als eine stets gültige Beziehung zwischen den Komponenten der magnetischen und der elektrischen Feldstärke, welche, je nach den Umständen, ebensowohl zur Bestimmung der ersteren, wie der letzteren dienen kann, wenn je die anderen Größen gegeben sind. Beide zu bestimmen, reicht das System nicht aus; hierzu ist noch das System (215″) der elektromagnetischen Gleichungen für ruhende Körper heranzuziehen, welches lautete

$$\left.\begin{aligned} v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{u}, \quad v\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{v},\\ v\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{w}, \end{aligned}\right\} \quad 248')$$

und in welchem $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, die Komponenten des wahren Leitungsstromes, durch die Formeln (152‴) definiert sind.

Der Anwendungen wegen bemerken wir, daß für einen isotropen Körper die Gleichungen (248) und (248′) die Gestalt

$$\left.\begin{aligned} v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \mathfrak{m}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = \mathfrak{d}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}X,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad 248'')$$

annehmen, die sich für den leeren Raum noch vereinfacht zu

$$248''')\quad \begin{cases} v\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=\frac{\partial A}{\partial t}, & v\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)=\frac{\partial X}{\partial t}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{cases}$$

An das letzte Formelsystem wollen wir eine allgemeine Bemerkung knüpfen.[125])

Verstehen wir unter u, v, w, wie schon mehrfach, die Komponenten der Verrückung s in einem nichtstarren Körper, unter l, m, n die Komponenten der sie begleitenden Drehung d, so gilt

$$l=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad m=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad n=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Die u, v, w, wie die l, m, n sind Vektorkomponenten, denn sie folgen den für solche geltenden Transformationsformeln; sie unterscheiden sich jedoch dadurch, daß die ersteren bei Umkehrung aller Koordinatenrichtungen ihr Zeichen wechseln, die letzteren aber nicht, wie dies aus ihrer Definition ersichtlich ist. Es hängt das beiläufig damit zusammen, daß durch Umkehrung aller Axen aus einem direkten Koordinatensystem ein inverses entsteht, also auf letzteres bezogen, eine in Bezug auf das ursprüngliche System negative Drehung nunmehr positiven Charakter besitzt.

Mit den Definitionen von l, m, n stimmen die obigen Gleichungen (248''') für $\partial A/\partial t, \dots$ und $\partial X/\partial t, \dots$ formal überein; sie ergeben daher, daß eine der beiden Geschwindigkeiten R' und K', und somit eine der Kräfte R und K den polaren Charakter von s, die andere den axialen Charakter von d haben muß; denn legt man dem einen Komponentensystem die bezügliche Eigenschaft bei, so zeigen die Formeln für das andere System die entgegengesetzte an.

Indessen bleibt hier zunächst unbestimmt, ob R oder K als polar oder als axial zu betrachten ist, und die Entscheidung kann nur durch Beobachtungsthatsachen gegeben werden. Solche Thatsachen sind nun bereits in früheren Kapiteln angeführt worden, und es genügt, an sie zu erinnern. Es kommt in Betracht: erstens das Vorkommen piezoelektrischer und das Fehlen piezomagnetischer Erregung in acentrischen Krystallen, über welches S. 205 gehandelt ist; zweitens die Äquivalenz von Magneten und Stromsystemen, deren Gesetze S. 232 u. f. gegeben sind; drittens der rotatorische Charakter des Hall-Phänomens, auf den S. 302 hingewiesen ist.

Alle diese Thatsachen ergeben übereinstimmend, daß der elektrischen Kraft polarer, der magnetischen axialer Charakter eignet, und wir wollen sie demgemäß weiter betrachten. —

Die Formelsysteme (248) und (248′) enthalten die elektrischen und die magnetischen Kraftkomponenten nebeneinander. Man kann aber ganz allgemein die magnetischen Komponenten eliminieren und ein Gleichungssystem bilden, welches nur die elektrischen Komponenten enthält; da Gleiches, wenigstens bei Leitern, für die magnetischen Kräfte nicht ausführbar ist, so erhalten die elektrischen Kräfte hier eine gewissermaßen ausgezeichnete Stellung. Im Falle eines Dielektricums, wo die Leitfähigkeitskonstanten, und also die Stromkomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ verschwinden, kann man indessen beide Gattungen ganz gleichmäßig behandeln.

Ordnet man, wie auf S. 281, den Gleichungen (123) für die magnetischen Polarisationen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{m}_{11} A + \mathfrak{m}_{12} B + \mathfrak{m}_{13} C,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

das reziproke System zu

$$A = \mathfrak{n}_{11} \mathfrak{A} + \mathfrak{n}_{12} \mathfrak{B} + \mathfrak{n}_{13} \mathfrak{C},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

so erhält man leicht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} \\ &= v^2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mathfrak{n}_{31} \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \mathfrak{n}_{32} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \mathfrak{n}_{33} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathfrak{n}_{21} \left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \right) + \mathfrak{n}_{22} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \right) + \mathfrak{n}_{23} \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) \right) \right], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad 249)$$

Für homogene isotrope Medien geht dies über in[126])

$$\mathfrak{m}\left(\mathfrak{d} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 4\pi \mathfrak{l} \frac{\partial X}{\partial t} \right) = v^2 \left(\triangle X - \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right), \qquad 249')$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

wobei

$$\Theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

ist, und aus (248″) folgt

$$\mathfrak{d} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + 4\pi \mathfrak{l} \Theta = 0, \ \text{ also } \Theta = \Theta_0 e^{-\frac{4\pi \mathfrak{l} t}{\mathfrak{d}}}.$$

Schließt man Anteile an X, Y, Z aus, welche den Charakter von Θ haben, und daher mit wachsender Zeit in Leitern verschwinden, in Nichtleitern konstant bleiben, beschränkt man sich etwa auf periodische Werte der X, Y, Z, so ergiebt sich

249'') $$\mathfrak{m}\left(\mathfrak{d}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 4\pi\mathfrak{l}\frac{\partial X}{\partial t}\right) = v^2 \triangle X,$$

. . . .

Für den leeren Raum wird noch spezieller

249''') $$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = v^2 \triangle X, \ldots$$

Die Formeln (249'') für die Komponenten X, Y, Z, auf einen Nichtleiter angewandt, zeigen dieselbe Gestalt, wie die Bd. I, S. 379 angegebenen für die Verrückungen u, v, w in einem isotropen elastischen Körper, falls derselbe die Eigenschaft besitzt, eine räumliche Dilatation

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

nicht zuzulassen.

Bei vorhandener Leitfähigkeit treten in diesen Gleichungen Glieder auf, welche den Charakter von Widerstandskräften haben, die neben den elastischen wirken. Ist die spezifische Leitfähigkeit $\mathfrak{l}$ so groß, und sind die Veränderungen der X, Y, Z derart, daß neben dem mit $\mathfrak{l}$ proportionalen Glied das in $\mathfrak{d}$ multiplizierte vernachlässigt werden kann, so nimmt jede der Gleichungen (249'') die Form der Bedingung an, der nach Bd. I, S. 556 die Temperatur in einem isotropen Wärmeleiter folgt. Auf diesen wichtigen speziellen Fall werden wir weiter unten näher eingehen. —

Zu den Hauptgleichungen (248) und (248') kommen, wenn die Übergänge innerhalb des körperlichen Systemes nicht als stetig, sondern als sprungweise stattfindend betrachtet werden, und demgemäß nicht nur räumliche, sondern auch flächenhafte Ladungen vorhanden sind, noch spezielle Bedingungen für jene ausgezeichneten Flächen, die wir, wie früher, stets als Grenzen o_{hi} zwischen verschiedenen Teilen (h) und (i) des Systemes betrachten wollen. Diese Oberflächenbedingungen gewinnen wir in wiederholt angewandter Weise durch Grenzübergang aus den Hauptgleichungen selbst.

Wir betrachten hierzu das Element einer sehr dünnen Schicht, innerhalb deren der Wechsel des physikalischen Verhaltens sich schnell, wenngleich stetig, vollzieht, und innerhalb deren endliche räumliche Ladungen sich befinden. Wir legen die XY-Ebene der Tangentialebene an die Schicht parallel und nehmen an, daß in dem betrachteten Element die magnetischen Kraftkomponenten sämtlich, von den elektrischen die tangentialen X, Y und die Differenz $Z - Z^0$ der normalen gegen die entsprechende der lokalen räum-

lichen elektrischen Gegenkraft K^0 endlich sind, während Z wie Z^0 derartig unendlich werden, daß die über die Dicke der Schicht genommenen Integrale

$$-\int_h^i Z\,dz = -\int_h^i Z^0\,dz = P_{hi} \tag{250}$$

endlich sind.

Multiplizieren wir dann die ersten beiden Formeln (248) mit dz und integrieren sie über die Dicke der Schicht, so ergeben sie[127])

$$\frac{\partial P_{hi}}{\partial y} = \overline{Y}_h - \overline{Y}_i, \quad \frac{\partial P_{hi}}{\partial x} = \overline{X}_h - \overline{X}_i; \tag{250'}$$

auf gleichem Wege folgt aus den beiden ersten Gleichungen (248')

$$0 = \overline{B}_h - \overline{B}_i, \quad 0 = \overline{A}_h - \overline{A}_i. \tag{250''}$$

Läßt man die Schicht unendlich dünn werden, so stellen diese Gleichungen Beziehungen zwischen den der Grenzfläche anliegenden Werten der tangentialen elektrischen und magnetischen Kraftkomponenten dar. Die Bedingungen (250') nehmen für den Fall, daß die Körper (h) und (i) homogen sind, die einfachere Gestalt an

$$0 = \overline{Y}_h - \overline{Y}_i, \quad 0 = \overline{X}_h - \overline{X}_i. \tag{250'''}$$

Die Anwendung dieser Resultate auf die dritten Gleichungen (248) und (248') führt auf die Beziehungen

$$\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{C}}}{\partial t}\right)_h = \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{C}}}{\partial t}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{Z}}}{\partial t} + 4\pi \overline{\mathfrak{w}}\right)_h = \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{Z}}}{\partial t} + 4\pi \overline{\mathfrak{w}}\right)_i, \tag{250''''}$$

welche als neue und selbständige Gleichungen nicht anzusehen sind, aber mitunter einzelne Bedingungen der Systeme (250') und (250''), resp. (250''') vorteilhaft zu ersetzen vermögen.

Diese Grenzbedingungen sind Erweiterungen der für stationäre und für Gleichgewichtszustände in den früheren Kapiteln erhaltenen und führen durch geeignete Spezialisierungen auf jene zurück. —

Die vorstehend zusammengestellten Fundamentalformeln benutzen als Abhängige ausschließlich die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft oder Feldstärke, die Komponenten der elektrischen Strömung aber nur als Abkürzungen. Dies ist in der That bei allgemeinen Betrachtungen vorteilhafter, weil hier wegen der nötigen Berücksichtigung der verschiedenen, gleichzeitig in Betracht kommenden Strömungsarten — der Leitungsströme, der Polarisationsströme und der mit Magnetismen äquivalenten scheinbaren Ströme — die Anschaulichkeit nicht gewinnt, auch die Bedingungsgleichungen sich nicht vereinfachen, wenn man die Stromkomponenten als abhängige Variable einführt.

Dagegen kann in speziellen Fällen die Einführung der Stromkomponenten vorteilhaft sein, und dabei soll von ihnen auch Gebrauch gemacht werden.

Führt man nach (215′) wieder die gesamten wahren Strömungskomponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch die Beziehungen

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \mathfrak{u} = \mathfrak{x}, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \mathfrak{v} = \mathfrak{y}, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \mathfrak{w} = \mathfrak{z}$$

ein, so ergeben die Grundformeln (248′) im Einklang mit (215″)

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0.$$

Es liegt nahe, gemäß der formalen Analogie zwischen den Systemen (248) und (248′) auch die Größen

251) $$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \mathfrak{a}, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \mathfrak{b}, \quad \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} = \mathfrak{c}$$

als Strömungskomponenten zu deuten; für sie gilt dann nach (248) ähnlich

251′) $$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial z} = 0.$$

Man kann sonach der vollständigen wahren elektrischen eine wahre magnetische Strömung zuordnen, die, wie sie, jederzeit quasi-stationär ist und bis auf das abweichende Vorzeichen durch die Wirbel der elektrischen Kraft K ebenso bestimmt ist, wie jene durch die Wirbel der magnetischen Kraft R.

Sind Unstetigkeitsflächen o_{hi} des physikalischen Verhaltens vorhanden, so leitet man aus (215″) und (251′) in bekannter Weise die Bedingungen ab

251″) $$\begin{cases} \overline{\mathfrak{p}}_h + \overline{\mathfrak{p}}_i = 0, \quad \overline{\mathfrak{q}}_h + \overline{\mathfrak{q}}_i = 0, \quad \text{wobei} \\ \mathfrak{x}\cos(n,x) + \mathfrak{y}\cos(n,y) + \mathfrak{z}\cos(n,z) = \mathfrak{p}, \\ \mathfrak{a}\cos(n,x) + \mathfrak{b}\cos(n,y) + \mathfrak{c}\cos(n,z) = \mathfrak{q} \end{cases}$$

gesetzt ist. —

Multipliziert man die allgemeinen Induktionsformeln (248) mit der Größe eines Flächenelementes do an der Stelle x, y, z und den resp. Kosinus seiner Normalen n gegen die Koordinatenaxen, addiert die Resultate und integriert darauf über eine endliche Fläche o, deren Randkurve, bezüglich n im positiven Sinne umlaufen, mit s bezeichnet werden mag, so erhält man unter Benutzung des STOKES'schen Satzes (178‴) aus Bd. I, S. 177

$$v\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int\big(\mathfrak{A}\cos(n,x) + \mathfrak{B}\cos(n,y) + \mathfrak{C}\cos(n,z)\big)\,do,$$

wobei dx, dy, dz die Projektionen von ds bedeuten. Hier steht links das Linienintegral L der elektrischen Kraft in Bezug auf die Randkurve s von o, rechts in der Klammer die Normalkomponente $\mathfrak{N}$ der magnetischen Polarisation; man erhält also[128])

$$vL = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{N}\, do,$$

oder bei Einführung des magnetischen Stromes $\mathfrak{q}$ in der Richtung der positiven Normale auf o auch

$$vL = -4\pi \int \bar{\mathfrak{q}}\, do. \qquad 251''')$$

Das Linienintegral der elektrischen Kraft über eine geschlossene Kurve s ist hiernach gleich dem $4\pi/v$-fachen der Gesamtstärke des magnetischen Stromes, welcher die von s umschlossene Fläche o durchsetzt. Dieser Satz ist überaus allgemein; die einzige Beschränkung wird dadurch gegeben, daß X, Y, Z auf der Fläche o stetig sein müssen, damit die Anwendung des Stokes'schen Satzes möglich sei.

Wird die Kurve s durch einen linearen Leiter gebildet, der sich in einem Dielektrikum befindet, so kann man L ohne weiteres auf sein Inneres beziehen, da die tangentiale Komponente der elektrischen Kraft stetig durch die Oberfläche geht. Die Formel (251''') giebt also einen neuen Wert für die in dem linearen Leiter induzierte elektromotorische Kraft, von der wir auf S. 375 ausgingen.

Es ist übrigens zu bemerken, daß der magnetische Strom durch die Anwesenheit des Leiters im Dielektrikum geändert wird, sich also wesentlich von dem unterscheidet, der unter sonst gleichen Umständen fließt, wenn der Leiter nicht vorhanden ist.

Bezeichnet man mit M das Linienintegral der magnetischen Kraft über eine geschlossene Kurve s und versteht unter $\mathfrak{p}$ die Komponente der gesamten wahren elektrischen Strömung nach der positiven Normalen auf der von s positiv umlaufenen Fläche o, so kann man auf demselben Wege, wie die Formel (251''') aus (248), unter Zugrundelegung des Systemes (248') auch gewinnen

$$vM = +4\pi \int \bar{\mathfrak{p}}\, do. \qquad 251'''')$$

Diese Gleichung hat aber entfernt nicht die Bedeutung wie (251'''), weil kein durch das Linienintegral M bestimmter magnetischer Leitungsstrom existiert. —

Multipliziert man die allgemeinen Gleichungen (248) resp. mit $A\,dk$, $B\,dk$, $C\,dk$, die Gleichungen (248') resp. mit $X\,dk$, $Y\,dk$, $Z\,dk$, addiert die Resultate und integriert über ein beliebiges räumliches

Bereich k, innerhalb dessen man nach dem Vorausgeschickten alle Teile der unter dem Integral auftretenden Ausdrücke als stetig ansehen kann, so erhält man

$$\int\left[\left(A\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}+\ldots\right)+\left(X\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\ldots\right)+4\pi(X\mathfrak{u}+\ldots)\right]dk$$
$$=v\int\Big[(\overline{Y}\overline{C}-\overline{Z}\overline{B})\cos(n,x)+(\overline{Z}\overline{A}-\overline{X}\overline{C})\cos(n,y)$$
$$+(\overline{X}\overline{B}-\overline{Y}\overline{A})\cos(n,z)\Big]do;$$

dabei bezeichnet n die innere Normale auf der Oberfläche o von k.

Zieht man den Ausdruck (141″) für die elektromagnetische Energie des Volumens k heran, die hier nur einen Teil der gesamten in Betracht kommenden Energie von k darstellt und als solcher spezieller mit E_{em} bezeichnet werden mag, und setzt man abgekürzt

252) $\frac{v}{4\pi}(YC-ZB)=\mathfrak{f},\quad \frac{v}{4\pi}(ZA-XC)=\mathfrak{g},\quad \frac{v}{4\pi}(XB-YA)=\mathfrak{h},$

so nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an

252′) $$\begin{cases}\dfrac{dE_{em}}{dt}=-\int(X\mathfrak{u}+Y\mathfrak{v}+Z\mathfrak{w})\,dk\\ \qquad+\int(\overline{\mathfrak{f}}\cos(n,x)+\overline{\mathfrak{g}}\cos(n,y)+\overline{\mathfrak{h}}\cos(n,z))\,do.\end{cases}$$

Sie zeigt nunmehr, daß man die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie des betrachteten räumlichen Bereiches k in zwei verschiedenartige Teile zerlegen und demgemäß auf zwei verschiedene Ursachen zurückführen kann.

Der erste Teil, welcher allein übrig bleibt, sowie das Bereich k durch eine Oberfläche begrenzt ist, in der die elektrischen und die magnetischen Kräfte von einer bestimmten Ordnung unendlich klein werden, hat die Form eines Raumintegrales, zu dessen Wert aber nur die Raumelemente beitragen, innerhalb deren eine wahre elektrische Strömung stattfindet, zu dem also jedenfalls nur die innerhalb k befindlichen Leiter einen Anteil geben. Es möge bemerkt werden, daß das Integral

$$A'=\int(X\mathfrak{u}+Y\mathfrak{v}+Z\mathfrak{w})\,dk$$

im allgemeinen auch nicht in ein Oberflächenintegral verwandelt werden kann; denn weder besitzt X, Y, Z immer eine Potentialfunktion, noch befolgt $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ immer die Bedingung (214′) des quasistationären Zustandes.

Wir haben das Integral A' in § 33 hypothetisch gedeutet als die in der Zeiteinheit an der ruhenden ponderabeln Masse inner-

halb k durch die elektrischen Kräfte geleistete Arbeit; die Formel (252′) giebt hierfür ein neues, sehr allgemeines Argument, da sie unter den gemachten Voraussetzungen die Gestalt

$$\frac{d E_{em}}{d t} = - A'$$

annimmt, also ausspricht, daß innerhalb des Bereiches k pro Zeiteinheit ein Betrag A' an elektromagnetischer Energie verschwindet, also notwendig in anderer Form erscheinen muß.

Über die Gesetze, nach welchen diese Umwandlungen sich vollziehen, ist in den §§ 33 und 34 ausführlich gesprochen worden. Die verschwundene elektromagnetische Energie erscheint in thermischer oder chemischer Gestalt wieder, wenn $A' > 0$ ist, und die Umsetzung geht in umgekehrter Richtung vor sich, wenn $A' < 0$. Hier mag nur in Erinnerung gebracht werden, daß im allgemeinen das Element $(X\mathfrak{u} + Y\mathfrak{v} + Z\mathfrak{w})\,dk$ des Integrales nicht die Energievermehrung des Raumelementes dk des Leiters angiebt, sondern daß unter Umständen der in einem Volumenelement auftretende Effekt seine Kompensation in anderen findet. —

Der zweite Teil der Formel (252′) bleibt allein übrig, wenn es sich um ein System von Dielektrica handelt, und spricht aus, daß der in ihm enthaltene Teil der Energiegeschwindigkeit von k auf einen Vorgang in der Oberfläche o von k zurückgeführt werden kann. Schließt man die Anwesenheit von Leitern aus und wendet die Formel (252′) auf ein unendlich kleines Volumenelement im Innern eines stetig veränderlichen Körpers an, so giebt sie

$$0 = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{em}}{\partial t}, \qquad 252'')$$

worin ε_{em} die elektromagnetische Energie der Volumeneinheit bezeichnet; wendet man sie auf das um ein Oberflächenelement der Grenze (h, i) zwischen zwei Dielektrica (h) und (i) konstruierte Element an und kürzt ab

$$\mathfrak{f} \cos(n, x) + \mathfrak{g} \cos(n, y) + \mathfrak{h} \cos(n, z) = \mathfrak{s},$$

so erhält man

$$\mathfrak{s}_h + \mathfrak{s}_i = 0. \qquad 252''')$$

Es können somit in mehrfach benutzter Weise die Größen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{s}$ als die Komponenten eines Energiestromes nach den Richtungen von X, Y Z und n gedeutet werden, der die im zweiten Glied der Formel (252′) enthaltene Energieänderung bewirkt. Die resultierende Energieströmung verläuft normal zu der Ebene durch die elektrische und die magnetische Kraft und besitzt die Dichte

252'''') $$\mathfrak{f} = \frac{v}{4\pi} K R \sin(K, R).$$

Eine solche Deutung, die zuerst von POYNTING [129]) vorgeschlagen ist, dient zur Veranschaulichung der stattfindenden Veränderungen, gleichviel, ob ihr eine wirkliche Bewegung entspricht oder nicht.

§ 42. Induzierte räumliche Ströme von quasi-stationärem Charakter. Ein unbegrenzter Leiter; ein sehr langer leitender Kreiscylinder.

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten allgemeinen Formeln für ruhende Medien wollen wir nunmehr auf einen Fall anwenden, der sich direkt an den Gegenstand der §§ 36 bis 38 anschließt, nämlich auf Veränderungen, die sich mit solcher Langsamkeit vollziehen, daß in den Formeln (215') für die vollständige wahre Strömung der Anteil des Polarisationsstromes neben dem des Leitungsstromes vernachlässigt werden kann.

Hier nimmt die Bedingung (215'') die Gestalt

253) $$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0$$

an, welche einem quasi-stationären Leitungsstrom entspricht; man kann ihr gemäß die etwa vorhandenen Dielektrica bei der Entwickelung ganz außer Acht lassen und nur die Leiter der Untersuchung unterwerfen.

Dies ist in gewisser Hinsicht selbst dann noch zulässig, wenn die Leiter sich innerhalb eines nach außen unbegrenzten magnetisierbaren Dielektricums befinden; denn in diesem Falle sind die in letzterem influenzierten Magnetismen mit Strömen äquivalent, die ausschließlich in der Oberfläche des Leiters verlaufen.

Wegen der geringen Magnetisierbarkeit aller Dielektrica hat übrigens dieser Fall kaum ein praktisches Interesse, während ein solches dem Falle magnetisierbarer Leiter in hohem Maße eignet.

Da die Betrachtung krystallinischer und stetig in ihrer Natur variierender Körper kein der Komplikation der Formeln angemessenes Interesse besitzt, so beschränken wir uns auf homogene isotrope Leiter und erhalten aus (249'') die Grundgleichungen

253') $$\begin{cases} 4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\dfrac{\partial X}{\partial t} = v^2 \triangle X, \quad 4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\dfrac{\partial Y}{\partial t} = v^2 \triangle Y, \\ 4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\dfrac{\partial Z}{\partial t} = v^2 \triangle Z, \end{cases}$$

deren jede, wie schon oben bemerkt, formell mit der Bedingung übereinstimmt, welche die Temperatur in einem isotropen Wärmeleiter befolgt. Hier, wo Dielektrica nicht in Betracht kommen, und die Polarisationsströme vernachlässigt werden, bietet die Einführung der Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ des Leitungsstromes Vorteile. Es gilt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{l} X, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{l} Y, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{l} Z \qquad 253'')$$

und

$$X = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad Y = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} - \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \quad Z = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}, \qquad 253''')$$

worin $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Vektorpotentiale der freien Strömung mit den Komponenten $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$, darstellen.

Besteht das körperliche System durchweg aus nicht magnetisierbaren Körpern, so verwandeln sich die $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ in die Vektorpotentiale U, V, W der wahren Strömung mit den Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$.

Setzt man die Werte von X, Y, Z in (253') ein, so wird dadurch das Problem auf die Bestimmung von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ zugespitzt. Zu den drei aus (253') folgenden Gleichungen von der Form

$$4\pi \mathfrak{l} \mathfrak{m} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right) = v^2 \triangle \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right), \qquad 253'''')$$

. . . .

kommt eine vierte, die man leicht aus den Definitionen

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{v}\int \frac{\mathfrak{u}'_1\, d k_1}{r}, \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{v}\int \frac{\mathfrak{v}'_1\, d k_1}{r}, \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{v}\int \frac{\mathfrak{w}'_1\, d k_1}{r}$$

erhält, wenn man bedenkt, daß mit der wahren zugleich die freie Strömung quasi-stationär wird, also die $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ gleichfalls der Bedingung (253) genügen.

Man erhält aus den Werten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ sogleich

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = \frac{1}{v}\int \left(\mathfrak{u}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{v}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{w}'_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d k_1,$$

und wenn man das Integral rechts durch teilweise Integration umformt und die über $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{w}'$ eben gemachte Bemerkung berücksichtigt,

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = 0. \qquad 254)$$

Dies ist die vierte der Hauptgleichungen für $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{F}$.[130]) —

Setzt man in den Formeln (253'') für X, Y, Z die Werte aus (253''') ein und fügt das Resultat in die Gleichung (253), so erhält man gemäß der Formel (254)

$$\triangle \mathfrak{F} = 0; \qquad 254')$$

faßt man, wie S. 416 bemerkt, $\mathfrak{F}$ als die Potentialfunktion einer elektrischen Ladung auf, so folgt hieraus, daß diese Ladung sich nicht im Innern der Leiter, sondern nur auf ihrer Oberfläche oder im äußeren Raume befinden kann.

Eliminiert man mit Hilfe der Bedingung (254') die Potentialfunktion $\mathfrak{F}$ aus den drei Formeln (253''''), so erhält man für $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ drei Gleichungen, welche Differentialquotienten dieser Größen nach der Zeit enthalten, während die Bedingung (254') für $\mathfrak{F}$ dergleichen nicht zeigt.

Dies hat zur Folge, daß innerhalb der in diesem Paragraphen vorausgesetzten wichtigen Annäherung Änderungen der elektrostatischen Wirkung sich scheinbar mit unendlicher Geschwindigkeit durch den ganzen Raum ausbreiten, während die Änderungen der elektromagnetischen Wirkungen sich allmählich von Stelle zu Stelle fortpflanzen. Dieser merkwürdige Unterschied des Verhaltens hat eigentümliche Erscheinungen zur Folge, auf die wir weiter unten eingehen werden. —

Die Grenzbedingungen für $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{F}$ folgen aus dem bezüglichen Verhalten der elektrischen Kräfte; da die tangentialen Komponenten der letzteren stetig durch die Zwischengrenzen homogener Körper gehen, so muß, falls die Z-Axe in die Normale eines Grenzelementes o_{hi} gelegt wird,

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right)_h=\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)_h=\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)_i$$

sein. Nun ist aber wegen der Bedeutung von $\mathfrak{F}$ dessen Differentialquotient nach einer tangentialen Richtung an o_{hi} stetig; es bleibt sonach

$$254'')\qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right)_h=\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}\right)_i, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)_h=\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}\right)_i.$$

Für die Normalkomponenten Z folgt dagegen aus $\mathfrak{l}_h Z_h = \mathfrak{l}_i Z_i$

$$254''')\qquad \mathfrak{l}_h\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right)_h=\mathfrak{l}_i\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}+\frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right)_i,$$

was sich für die Grenzen nach einem Isolator (i) wegen des dort verschwindenden $\mathfrak{l}_i$ noch vereinfacht. Endlich gilt

$$254'''')\qquad \mathfrak{F}_h-\mathfrak{F}_i=P_{hi},$$

wobei wieder P_{hi} die elektromotorische Kraft der Kombination (h, i) bezeichnet. —

Ist der ganze unendliche Raum von einem homogenen Leiter erfüllt, so ist nach den obigen Bedingungen $\mathfrak{F}$ konstant, und die

Strömung zu beliebiger Zeit kann dann nur die Folge einer irgendwie hervorgebrachten anfänglichen quasi-stationären Strömung sein, die durch Induktion hervorgerufen sein muß, um, wie nötig, in geschlossenen Bahnen zu verlaufen.

Handelt es sich um ein Leitersystem mit Zwischengrenzen oder mit im Endlichen liegender Oberfläche, so wird $\mathfrak{F}$ die Wirkung der elektromotorischen Kräfte in den Zwischengrenzen und der statischen Ladungen auf den Oberflächen nach Nichtleitern hin enthalten. Ein hierher gehöriger Fall ist der, daß ein körperliches Leitersystem, — von lineären dürfen wir absehen, da sie bereits früher behandelt sind —, dessen Teile dem VOLTA'schen Spannungsgesetz nicht folgen, plötzlich zu einer Ringform geschlossen wird, innerhalb deren elektrisches Gleichgewicht nicht möglich ist. Dann ist im Moment des Schließens $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ gleich Null, und $\mathfrak{F}$ bestimmt sich, wie die Potentialfunktion einer stationären Strömung.

In dem umgekehrten Falle, daß die zuvor bestehende Verbindung des Ringes plötzlich geöffnet wird, ist der Anfangswert von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ aus der zuvor herrschenden stationären Strömung zu berechnen. Indessen werden hier Ströme von quasi-stationärem Charakter nur eintreten, wenn die Unterbrechungsstelle die Natur einer unendlich dünnen nichtleitenden Schicht besitzt, sodaß, ähnlich wie bei den S. 403 betrachteten Kondensatoren, allein der sie durchsetzende Polarisationsstrom die Schließung der Leitungsströme bewirkt und deshalb auch allein neben letzteren in Betracht zu ziehen ist.

Im anderen Falle nimmt das ganze umgebende Dielektricum an dem Vorgang Teil, und es sind demnach die hier vorgenommenen Vernachlässigungen unzulässig. —

Wenn der ganze unendliche Raum von demselben homogenen isotropen Leiter erfüllt ist, so kann man die Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ der wahren Strömung durchaus gesondert behandeln; sie erscheinen dann nämlich nur in der ersten Gleichung (253) nebeneinander, und wenn ihre Anfangswerte $\mathfrak{u}^0$, $\mathfrak{v}^0$, $\mathfrak{w}^0$ die Bedingung

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = \mathfrak{r} = 0$$

erfüllen, worin $\mathfrak{r}$ eine Abkürzung ist, so ist $\mathfrak{r}$ von selbst auch zu jeder Zeit gleich Null.

In der That folgt aus (253') und (253'')

$$4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} = v^2 \triangle \mathfrak{u}, \quad 4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = v^2 \triangle \mathfrak{v}, \quad 4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} = v^2 \triangle \mathfrak{w}, \qquad 255)$$

und hieraus

255') $$4\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial t} = v^2\triangle\mathfrak{r};$$

dies ergiebt durch Multiplikation mit $\mathfrak{r}\,d\,k\,d\,t$ und Integration über den ganzen Raum und über die Zeit von $t = 0$ bis t

$$2\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}\int\left|\mathfrak{r}^2\right|_{t=0}^{t=t} d\,k + v^2\int\int_0^t\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial z}\right)^2\right] d\,k\,d\,t = 0,$$

und diese Formel zeigt, da $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ positive Konstanten sind, daß $\mathfrak{r}$ überall und zu jeder Zeit verschwindet, wenn es überall zur Zeit $t = 0$ verschwand.

Da man also $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ganz getrennt behandeln darf, so kann man auch den Vorteil ausnutzen, den die schon S. 420 erwähnte Übereinstimmung jeder der drei Formeln mit der Bedingung an die Hand giebt, welche die Temperatur innerhalb eines homogenen isotropen Wärmeleiters befolgt.

Auf jede der drei Komponenten läßt sich so unter anderem die Formel (92) aus Bd. I, S. 315 anwenden, welche die Temperatur an jeder Stelle eines derartigen unendlichen Wärmeleiters zu jeder Zeit durch die für $t = 0$ allenthalben vorgeschriebenen Anfangswerte ausdrückt. Man erhält z. B. durch diese Übertragung die Gleichung

255'') $$\mathfrak{u} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{l}\mathfrak{m}}{v^2 t}\right)^3}\int\mathfrak{u}^0 e^{-\frac{\pi\mathfrak{l}\mathfrak{m}r^2}{v^2 t}} d\,k,$$

in der $\mathfrak{u}^0$ den Anfangswert von $\mathfrak{u}$ in $d\,k$, r die Entfernung des Volumenelementes $d\,k$ von dem betrachteten Punkte bezeichnet, und die Integration über den ganzen Raum auszudehnen ist.

Ist anfänglich irgend eine der Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ gleich Null, so bleibt dieselbe dauernd gleich Null; die anfänglich ebene Strömung bleibt also eben. Man kann also in diesem Falle, ohne den Vorgang zu beeinflussen, beliebig viele, gleichfalls mit der Strömungsebene parallele isolierende Ebenen im Raume anbringen. Daraus folgt aber noch nicht, daß man die erhaltenen Lösungen auch auf den Halbraum oder auf eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Platte anwenden kann; denn die induzierende Wirkung der sich verändernden Ströme erstreckt sich auch über die isolierenden Ebenen hinweg.

Das Problem der Induktion einer ebenen Platte erfordert also eine selbständige Betrachtung, die wir im nächsten Paragraphen vornehmen werden. —

Hier wollen wir uns nur noch mit der Selbstinduktion eines gegen seinen Radius a_1 sehr langen geraden Kreiscylinders beschäftigen, und zwar unter Voraussetzungen, die allgemeiner sind, als die in § 39 benutzten.[131] Der Cylinder soll, wie früher, durch sehr ferne und ausgedehnte Massen, etwa durch eine Kugelschale, in deren einen Durchmesser die Cylinderaxe fällt, zu einem Leiterkreis vervollständigt sein, und es soll wiederum Widerstand und Induktion jener Ergänzungsteile neben den betreffenden Größen für den Cylinder vernachlässigt werden können. Der Cylinder soll eine konstante magnetische Permeabilität $\mathfrak{m}_i$, seine Umgebung diejenige $\mathfrak{m}_a$ besitzen. Der Leitungsstrom soll, wie früher, quasi-stationär und im Cylinder der Axe, die mit der Z-Axe zusammenfallen mag, parallel verlaufen, aber seine Dichte $\mathfrak{i}$ soll nicht mehr als konstant, sondern als eine Funktion des Abstandes a von der Cylinderaxe vorausgesetzt werden, deren Gesetz zu finden unsere Aufgabe bildet.

Durch diese Annahme über $\mathfrak{i}$ wird die Bedingung (253) identisch erfüllt, und die zu seiner Bestimmung dienende Hauptgleichung wird durch die dritte Formel (255) geliefert, welche nunmehr lautet

$$4\pi\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i\frac{\partial \mathfrak{i}}{\partial t} = v^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{i}}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial \mathfrak{i}}{\partial a}\right); \qquad 256)$$

sie ist gleichgeformt der Hauptgleichung für die Temperatur $\tau = \mathfrak{i}$ in einem Kreiscylinder bei alleiniger Abhängigkeit von a und t.

Die Potentialfunktion $\mathfrak{F}$ hat nach (254'), wenn rings um die Cylinderaxe die Verhältnisse gleich liegen, der Bedingung

$$\triangle\mathfrak{F} = \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a} + \frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial z^2} = 0$$

zu genügen. Damit aber $\mathfrak{i}$ von z unabhängig sei, muß gleiches von $\partial\mathfrak{F}/\partial z$ gelten; denn $\mathfrak{i}$ steht wegen (253'') mit dieser Größe durch die dritte Beziehung (253''') in Verbindung, welche jetzt lautet

$$Z = \frac{\mathfrak{i}}{\mathfrak{l}} = -\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t},$$

und in ihr ist mit $\mathfrak{i}$ auch $\mathfrak{W}$ innerhalb des mittleren Teiles des Cylinders von z unabhängig. Die Hauptgleichung für $\mathfrak{F}$ geht also innerhalb der allein der Betrachtung unterworfenen Bereiche über in

$$\frac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial a^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial a} = 0. \qquad 256')$$

Eine Grenzbedingung für $\mathfrak{i}$ erhalten wir, indem wir die vorletzte Formel auf die Oberfläche des Cylinders anwenden und schreiben

$$\bar{\mathfrak{i}} = -\mathfrak{l}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right);$$

der in ihr auftretende Wert $\mathfrak{W}$ ist mit Hilfe der in § 28 auseinandergesetzten Prinzipien leicht zu berechnen.

Man erhält nämlich zunächst für die Vektorpotentiale der wahren Strömung, falls die Länge des Cylinders, welche sehr groß gegen seinen Radius a_1, aber nicht unendlich sein soll, mit b_1 bezeichnet wird,

$$U = V = 0, \quad W = -\frac{2}{v}\int \mathfrak{i}_1 \,\mathfrak{l}\left(\frac{e}{b_1}\right) d q_1,$$

wobei e die normale Entfernung der Stelle x, y, z von dem Elementarfaden mit dem Querschnitt $d q_1$ bezeichnet. Diese Werte gelten nur an Stellen in genügender Entfernung von den Enden des Cylinders und sind als allgemeine nur dann zu benutzen, wenn dessen Länge sehr erheblich ist gegen seine Querdimensionen.

Hängt $\mathfrak{i}_1$, außer von der Zeit, allein vom Abstand a von der Cylinderaxe ab, so gilt gleiches für W, und es folgt dann, daß die magnetische Wirkung des Stromes keine Komponente nach der Richtung von a liefert; daraus ergiebt sich gemäß dem S. 267 und 268 Gesagten das Verschwinden der Potentialfunktion ψ'' der durch sie influenzierten Magnetismen, resp. der ihnen äquivalenten Ströme, gerade so, als wenn $\mathfrak{i}$ konstant wäre.

Es wird sonach gemäß (169'') und (169'''), falls $\mathfrak{k}$ die Magnetisierungskonstante bezeichnet,

$$\alpha = \mathfrak{k}\frac{\partial W}{\partial y}, \quad \beta = -\mathfrak{k}\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \gamma = 0;$$

daraus folgt für die scheinbare r ä u m l i c h e Strömung

$$\mathfrak{u}'' = \mathfrak{v}'' = 0, \quad \mathfrak{w}'' = \mathfrak{i}'' = -v\,\mathfrak{k}\,\triangle_{xy} W,$$

also wegen der verschiedenen Natur von W für innere (i) resp. äußere (a) Punkte

$$\mathfrak{i}_i'' = 4\pi\,\mathfrak{k}_i\,\mathfrak{i}, \quad \mathfrak{i}_a'' = 0;$$

ferner ergiebt sich, da $\partial W / \partial a$ stetig durch die Grenze geht, für die scheinbare f l ä c h e n h a f t e Strömung

$$\mathfrak{u}^0 = \mathfrak{v}^0 = 0, \quad \mathfrak{w}^0 = \mathfrak{i}^0 = v(\mathfrak{k}_i - \mathfrak{k}_a)\frac{\partial W}{\partial a},$$

also wegen

$$W_a = -\frac{2 I}{v}\,\mathfrak{l}\left(\frac{a}{b_1}\right) \text{ und } 4\pi\,\mathfrak{k} = \mathfrak{m} - 1,$$

worin I die allein von der Zeit abhängige Gesamtstromstärke bezeichnet, auch

$$\mathfrak{i}^0 = \frac{I}{2\pi a_1}(\mathfrak{m}_a - \mathfrak{m}_i).$$

Diese Resultate stimmen mit den S. 269 für konstantes $\mathfrak{i}$ erhaltenen vollständig überein.

Bei ihrer Benutzung erhält man nun leicht für das Vektorpotential $\mathfrak{W}$ der freien Strömung in äußeren Punkten

$$\mathfrak{W}_a = -\frac{2I}{v}\mathfrak{m}_a\, l\left(\frac{a}{b_1}\right),$$

und bei Einsetzung des Resultates in die Ausgangsformel

$$\bar{\mathfrak{i}} = -\mathfrak{l}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - \frac{2\,\mathfrak{m}_a}{v^2}\frac{dI}{dt}\, l\left(\frac{a_1}{b_1}\right)\right). \tag{256''}$$

Hiermit kombinieren wir, daß aus der Gleichung (256) durch Integration über den Querschnitt des Cylinders folgt

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{a_1 v^2}{2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}\frac{\overline{\partial \mathfrak{i}}}{\partial n}, \tag{256'''}$$

unter n die innere Normale verstanden, und finden somit schließlich

$$\bar{\mathfrak{i}} = -\mathfrak{l}\frac{\overline{\partial \mathfrak{F}}}{\partial z} + \frac{a_1\,\mathfrak{m}_a}{\mathfrak{m}_i}\, l\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\frac{\overline{\partial \mathfrak{i}}}{\partial n}. — \tag{256''''}$$

Zu den Hauptgleichungen für die hier betrachteten Erscheinungen ist schon mehrfach bemerkt worden, daß sie das Problem der Induktion räumlicher Leiter in eine Parallele zu dem der Wärmeleitung bringen; diese Analogie findet aber im allgemeinen in Bezug auf die Oberflächenbedingungen nicht mehr statt. Der behandelte spezielle Fall bildet hierin eine bedeutungsvolle Ausnahme, denn die Gleichung (256'''') hat genau dieselbe Form, wie die Bd. I, S. 557 erörterte Grenzbedingung (69'') der Wärmetheorie, welche der Ausstrahlung in einem Raum von gegebener, eventuell mit der Zeit wechselnder Temperatur entspricht, falls man, wie früher, $\mathfrak{i}$ mit der Temperatur τ im Cylinder, außerdem $-\mathfrak{l}\partial\mathfrak{F}/\partial z$ mit der Temperatur τ_u in der Umgebung identifiziert; denn das dritte Glied erhält dann die Bedeutung des durch den Strahlungskoefficienten dividierten Wärmestromes Ω_n nach der Normalen, der ja in isotropen Körpern mit $\partial\tau/\partial n$ proportional ist.

Der Vorgang der Selbstinduktion gestattet wegen dieser Analogie folgende Auffassung.

Sowie der Cylinder durch eine im Unendlichen geführte Leitung zu einem Leiterkreis vervollständigt wird, in dem die Potentialsprünge zwischen den einzelnen Teilen das Volta'sche Gesetz nicht befolgen, stellt sich momentan im ganzen Raume ein elektrisches Feld — d. h. eine Potentialfunktion $\mathfrak{F}$ — her; seine Wirkung erregt nunmehr zuerst in der Oberfläche des Cylinders durch eine Art von Einstrahlung einen Strom, der sich wiederum durch eine Art

von Leitung allmählig ins Innere ausbreitet. Das Verhältnis der Konstanten der inneren Leitung zu derjenigen der Einstrahlung oder der äußeren Leitung ist dabei gleich

$$\frac{a_1\, \mathfrak{m}_a}{\mathfrak{m}_i}\, l\left(\frac{b_1}{a_1}\right),$$

also bei kleinem a_1 selber klein, und dies ganz besonders, wenn der Cylinder stark, der äußere Raum wenig magnetisierbar ist.

Ist die Feldstärke, und somit $\mathfrak{F}$, nicht konstant, sondern eine periodische Funktion der Zeit, so wird die erregte Stromdichte i ebenfalls periodisch sein, aber — ähnlich wie die Temperatur im Innern der Erde, die infolge des wechselnden äußeren Einflusses oscilliert — mit einer nach der Tiefe schnell abnehmenden Amplitude. Die letztere Abnahme wird überdies, wie das die bloße Anschauung lehrt und die durchgeführte Rechnung beweist, um so stärker sein, je kleiner die Periode der Oscillation des Feldes ist; bei einigermaßen schnellen Schwingungen wird i nur in einer sehr dünnen Oberflächenschicht des Cylinders einen merklichen Wert haben und im Innern um so bälder verschwinden, je größer I und $\mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_a$ ist.

Es ist indessen nicht zu vergessen, daß bei sehr schnellen Oscillationen die Grundhypothese einer angenähert stationären Strömung, welche zu den vereinfachten Formeln (255) resp. (256) geführt hat, aufhört, zulässig zu sein, daß dann also auch die aus ihr fließenden Folgerungen, z. B. die momentane Herstellung des elektrischen Feldes, ihre Gültigkeit verlieren. Immerhin können nach dem S. 375 Gesagten die obigen Formeln bei Schwingungen, die sich selbst Millionen Male in der Sekunde wiederholen, angewandt werden. —

Ist die in Mitleidenschaft gezogene oberflächliche Schicht des Cylinders sehr dünn, so kann man zur weiteren Untersuchung des stattfindenden Vorganges ein Näherungsverfahren einführen, indem man in der Formel (256)

$$a = a_1 - n$$

setzt und n neben a_1 vernachlässigt. Sie nimmt dann die Gestalt an

257) $$4\pi \mathrm{l}\, \mathfrak{m}_i \frac{\partial \mathrm{i}}{\partial t} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \mathrm{i}}{\partial n^2} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial \mathrm{i}}{\partial n}\right);$$

ein partikuläres Integral wird durch den Ansatz

257') $$\mathrm{i} = p\, e^{-qn} \sin \alpha \left(t - \frac{n}{\omega}\right)$$

gegeben, falls ist

257'') $$4\pi \mathrm{l}\, \mathfrak{m}_i = \frac{v^2}{\omega}\left(2q + \frac{1}{a_1}\right), \quad q^2 + \frac{q}{a_1} - \frac{\alpha^2}{\omega^2} = 0.$$

Die Gleichung (256‴) lautet jetzt

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{a_1 v^2}{2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}\frac{\partial \bar{\mathfrak{i}}}{\partial n} = \frac{p\,a_1 v^2}{2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}\left(q \sin \alpha t + \frac{\alpha}{\omega}\cos \alpha t\right),$$

woraus bei Vernachlässigung der Integrationskonstanten folgt

$$I = \frac{p\,a_1 v^2}{2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}\left(\frac{1}{\omega}\sin \alpha t - \frac{q}{\alpha}\cos \alpha t\right);$$

eliminiert man aus den beiden letzten Gleichungen $\cos \alpha t$ und drückt nach (257′) $\sin \alpha t$ durch $\bar{\mathfrak{i}}$ aus, so erhält man

$$q\frac{dI}{dt} + \frac{\alpha^2}{\omega} I = \frac{a_1 v^2}{2\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}\left(q^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)\bar{\mathfrak{i}}. \qquad 257''')$$

Durch Kombination dieser Gleichung mit (256″) können wir $\bar{\mathfrak{i}}$ eliminieren und eine Bedingung für I allein erhalten. Um das Resultat sogleich auf eine anschauliche Form zu bringen, wollen wir das konstante Potentialgefälle

$$-\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = \frac{L'}{b_1}$$

setzen, wo dann L' in gleicher Weise, wie in § 40, die g a n z e in dem Leiterkreis wirkende und von der Induktion unabhängige elektromotorische Kraft bezeichnet, falls, wie angenommen, der Widerstand in dem Teil, welcher den Cylinder zu einem Leiterkreis schließt, vernachlässigt werden kann.

Berücksichtigt man dies, so erhält man nach einfachen Umstellungen

$$I\frac{2\,\mathfrak{m}_i b_1 \alpha^2}{\omega a_1 v^2\left(q^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)} = L' - \frac{dI}{dt}\frac{2 b_1}{v^2}\left(\mathfrak{m}_a l\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{\mathfrak{m}_i q}{a_1\left(q^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right)}\right). \quad 257'''')$$

Diese Gleichung besitzt durchaus die Form von (239), und es läßt sich daher der Faktor von I als der Widerstand W', der von dI/dt als der Selbstinduktionskoefficient Q' des Cylinders bei dem hier betrachteten Vorgang auffassen.

Aus den beiden Formeln (257″) erhält man sogleich durch Multiplikation mit $q\omega/v^2$ resp. 1 und Addition

$$\frac{4\pi\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i\,\omega\,q}{v^2} = q^2 + \frac{\alpha^2}{\omega^2};$$

man kann also anschaulicher schreiben

$$W' = \frac{b_1\alpha^2}{2\pi\,\mathfrak{l}\,a_1\,\omega^2 q}, \quad Q' = \frac{2 b_1}{v^2}\left(\mathfrak{m}_a \mathfrak{l}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{v^2}{4\pi\,\mathfrak{l}\,a_1\,\omega}\right). \qquad 258)$$

W' ist, nach dem ersteren Wert, nicht indirekt proportional dem Q u e r s c h n i t t, sondern dem U m f a n g des Cylinders; außerdem wächst

es proportional dem Quadrat des Quotienten aus der Schwingungszahl der Oscillationen und der Geschwindigkeit ω, mit welcher sich nach (257′) i längs des Cylinderradius fortpflanzt.

Um in diesen Formeln ω und q durch Annäherung zu bestimmen, kann man die zweite Gleichung (257″) auflösen und, da $q > 0$ sein muß, das Resultat schreiben

$$2q + \frac{1}{a_1} = +\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\omega^2} + \frac{1}{a_1^2}}\,.$$

Setzt man dies in die erste Formel (257″) ein, so folgt

$$4\pi \mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i = \frac{v^2}{\omega}\sqrt{\frac{4\alpha^2}{\omega^2} + \frac{1}{a_1^2}}\,.$$

Dies giebt, wenn man, etwa wegen eines großen α, das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen als klein neben dem ersten betrachten kann,

$$2\pi \mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i = \frac{\alpha v^2}{\omega^2},$$

und damit

$$\omega = v\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi \mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i}},$$

demgemäß also

$$q = \frac{1}{v}\sqrt{2\pi \mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i\,\alpha} - \frac{1}{2a_1}\,.$$

Für W' folgt hieraus, wenn man auch in dem Ausdruck für q das zweite Glied vernachlässigt,

$$258') \qquad W' = \frac{b_1\alpha^2}{2\pi \mathfrak{l}\,a_1 q\,\omega^2} = \frac{b_1}{a_1 v}\sqrt{\frac{\mathfrak{m}_i\,\alpha}{2\pi \mathfrak{l}}} = W\frac{\pi a_1}{v}\sqrt{\mathfrak{l}\,\mathfrak{m}_i\,\mathfrak{n}}\,,$$

wobei $W = b_1/\pi a_1^2 \mathfrak{l}$ den Widerstand für konstante Ströme, und $\mathfrak{n} = \alpha/2\pi$ die Schwingungszahl der Oscillationen bezeichnet.

Für Q' erhält man bei Benutzung des Wertes für ω

$$258'') \qquad Q' = \frac{2b_1}{v^2}\left(\mathfrak{m}_a \mathfrak{l}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) + \frac{v}{4\pi a_1}\sqrt{\frac{\mathfrak{m}_i}{\mathfrak{l}\,\mathfrak{n}}}\right),$$

ein Ausdruck, der bei immer wachsendem $\mathfrak{n}$ sich schließlich auf das erste Glied reduziert. Der zweite Grenzwert, der sehr kleinem $\mathfrak{n}$ entspricht und mit dem in (235‴) gegebenen zusammenfallen muß, ist aus dieser Formel aber nicht zu erhalten, da dieselbe wesentlich mit Hilfe von Annahmen gewonnen ist, die nur bei einigermaßen großem $\mathfrak{n}$ zulässig sind.

Die erhaltenen Resultate zeigen, daß bei gesteigerter Geschwindigkeit der Schwingungen, soweit die S. 426 eingeführten Vernachlässigungen zulässig sind, zwar die Hauptgleichung für I noch immer

die Gestalt (238) behält, die im Grenzfall sehr großer Schwingungsdauer giltig war, daß aber, weil sich die Strömung aus dem Innern des Leiters mehr und mehr nach der Oberfläche begiebt, die Zahlwerte der Faktoren, die als Widerstand und Selbstinduktion des Leiters gedeutet sind, große Änderungen erfahren.

Die Fälle mittlerer Änderungsgeschwindigkeiten bieten insofern eine besondere Schwierigkeit, als hier merkliche Werte von I im ganzen Querschnitt des Cylinders stattfinden und sich bei Schwingungen in verschiedenen Tiefen a hinsichtlich der Phase von einander unterscheiden. Dies ist nach der S. 433 gegebenen Deutung der allgemeinen Bedingungsgleichungen ohne weiteres einzusehen.

Das Problem des Cylinders besitzt von allen, die sich auf die Induktion begrenzter räumlicher Leiter beziehen, das bei weitem größte praktische Interesse, weil es Aufschlüsse über das Verhalten der sogenannten linearen, bei Induktionserscheinungen aber faktisch als körperlich zu betrachtenden Leiter giebt. Neben ihm ist, als von theoretischem Interesse, insbesondere das der Induktion einer leitenden, homogenen, isotropen, um ihre Axe rotierenden Kugel durch ein ruhendes unveränderliches System von Magneten oder Strömen zu nennen, das in der That hierher gehört, da man durch Einführung eines mit der Kugel rotierenden Koordinatensystemes die Kugel in Ruhe, das induzierende System in Bewegung versetzen kann.[132]) Der Plan dieses Buches gestattet nicht, auf seine Behandlung einzugehen.

§ 43. Induzierte quasi-stationäre Ströme in einer leitenden ebenen, insbesondere seitlich unbegrenzten Platte. Induktion durch einen bewegten Magnetpol.

Die Grundformeln für die Induktion in einer ebenen leitenden und nicht magnetisierbaren Platte lassen sich bei Beschränkung auf die oben eingeführten relativ langsamen Veränderungen leicht mit Hilfe der auf S. 253 u. f. für stationäre Ströme in einer leitenden Platte erhaltenen allgemeinen Resultate ableiten.[133])

Wird die XY-Ebene in die Mittelfläche der Platte gelegt, so läßt sich die in derselben stattfindende stationäre Strömung darstellen mit Hilfe einer Strömungsfunktion $\mathfrak{S}$ gemäß den Formeln

$$\mathfrak{u} h = \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial y}, \quad \mathfrak{v} h = -\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}, \qquad 259)$$

in denen h die Dicke der Platte bezeichnet. Die Strömung ist be-

züglich ihrer magnetischen Wirkung auf äußere Punkte äquivalent mit einer magnetischen Doppelfläche vom spezifischen Moment

259′) $$\nu = \frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_0}{v},$$

wobei $\mathfrak{S}_0$ eine Konstante bedeutet, über deren Bestimmung S. 254 das Nötige gesagt ist, und die jedenfalls bei einer unendlichen Platte gleich Null gesetzt werden kann.

Führt man die Potentialfunktion ψ dieser Doppelfläche in der Form

259″) $$\psi = \int \nu_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} d o_1 = -\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\nu_1 \, d o_1}{r} = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}$$

ein, worin $\mathfrak{P}$ eine neue Bezeichnung ist und die Newton'sche Potentialfunktion einer einfachen Belegung der Platte von der Dichte ν bedeutet, so werden die magnetischen Komponenten im äußern Raum

259‴) $$A = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial z}, \quad B = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y \partial z}, \quad C = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial z^2},$$

und die Vektorpotentiale der induzierten wahren Ströme lauten

259⁗) $$U = +\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}, \quad W = 0.$$

Beiläufig werde bemerkt, daß nach der Definition von $\mathfrak{P}$ gilt

$$\mathfrak{P}(x, y, z) = \mathfrak{P}(x, y, -z).$$

Auf der positiven Begrenzung der Platte ist

260) $$\overline{\psi}_+ = -\frac{\overline{\partial \mathfrak{P}}}{\partial z} = 2\pi\nu = 2\pi\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{S}_0}{v},$$

und daher folgt der Wert der Stromkomponenten

260′) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{u} h &= \mathfrak{l} h \overline{X} = -\frac{v}{2\pi}\frac{\overline{\partial^2 \mathfrak{P}}}{\partial y \partial z} = -\frac{v}{2\pi}\overline{B}, \\ \mathfrak{v} h &= \mathfrak{l} h \overline{Y} = +\frac{v}{2\pi}\frac{\overline{\partial^2 \mathfrak{P}}}{\partial x \partial z} = +\frac{v}{2\pi}\overline{A}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt beiläufig

$$\mathfrak{u}\overline{A} + \mathfrak{v}\overline{B} = 0 \text{ oder } \overline{X}\overline{A} + \overline{Y}\overline{B} = 0;$$

auf der Oberfläche der ebenen stromdurchflossenen Platte schneiden somit die magnetischen Kraftlinien die Stromkurven resp. die elektrischen Kraftlinien orthogonal. Auf dieses Resultat ist bereits S. 297 Bezug genommen.

Führt man die Werte von X, Y aus (260′), die von U und V

aus (259'''') in die ersten beiden Gleichungen (253''') ein und setzt abgekürzt

$$\frac{v^2}{2\pi l h} = \omega, \tag{260''}$$

wobei ω eine Geschwindigkeit bezeichnet, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \omega \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y \partial z} &= v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial y \partial t}, \\ -\omega \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial z} &= v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial x \partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{260'''}$$

Wenn nicht nur die Ströme in der Platte induzierend wirken, sondern außerdem ein außerhalb befindliches, beliebig veränderliches System, so möge dessen magnetische Potentialfunktion ψ_0 heißen, die von ihr herrührenden Anteile an den magnetischen Komponenten und Vektorpotentialen resp. A_0, B_0, C_0 und U_0, V_0, W_0.

Führen wir dann eine Funktion $\mathfrak{P}_0$ ein durch die Beziehung

$$\psi_0 = -\frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial z}, \tag{261}$$

so wird

$$A_0 = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_0}{\partial x \partial z}, \quad B_0 = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_0}{\partial y \partial z}, \quad C_0 = +\frac{\partial^2 \mathfrak{P}_0}{\partial z^2}, \tag{261'}$$

und wenn das induzierende System im negativen Halbraum $z < 0$ liegt, was wir annehmen wollen, wegen

$$A_0 = \frac{\partial W_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial z}, \quad B_0 = \frac{\partial U_0}{\partial z} - \frac{\partial W_0}{\partial x}, \quad C_0 = \frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial U_0}{\partial y},$$

für den Halbraum $z > 0$ auch

$$U_0 = +\frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial y}, \quad V_0 = -\frac{\partial \mathfrak{P}_0}{\partial x}, \quad W_0 = 0. \tag{261''}$$

Denn da die magnetische Potentialfunktion ψ_0 in diesem Falle für $z > 0$ überall die Gleichung

$$\triangle \psi_0 = 0$$

erfüllt, und da $\mathfrak{P}_0$ nur durch die Bedingung (261) bestimmt ist, kann man ihm auch die Bedingung

$$\triangle \mathfrak{P}_0 = 0$$

auferlegen.

Bei gleichzeitiger äußerer und Selbstinduktion wird sonach statt des Systemes (260''') an der positiven Begrenzung der Platte gelten

$$\left.\begin{aligned} \omega \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{P}}}{\partial y \partial z} &= v \frac{\partial \overline{\mathfrak{F}}}{\partial x} + \frac{\partial^2 (\overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}_0)}{\partial y \partial t}, \\ -\omega \frac{\partial^2 \overline{\mathfrak{P}}}{\partial x \partial z} &= v \frac{\partial \overline{\mathfrak{F}}}{\partial y} - \frac{\partial^2 (\overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}}_0)}{\partial x \partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{261'''}$$

Differentiiert man die erste dieser Formeln nach x, die zweite nach y und addiert, so ergiebt sich

$$261'''') \qquad \overline{\triangle_{xy} \mathfrak{F}} = 0,$$

woraus in Verbindung mit (254') auch folgt

$$\frac{\overline{\partial^2 \mathfrak{F}}}{\partial z^2} = 0.$$

Faßt man die Formeln (261''') mit den Faktoren dy und $-dx$ zusammen und integriert, so folgt

$$262) \qquad \omega \frac{\overline{\partial \mathfrak{P}}}{\partial z} - \frac{\overline{\partial (\mathfrak{P} + \mathfrak{P}_0)}}{\partial t} = v \int \left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{F}}}{\partial x} dy - \frac{\overline{\partial \mathfrak{F}}}{\partial y} dx \right) + F(t),$$

wobei das Integral rechts nach (261'''') ein vollständiges Differential enthält, und $F(t)$ eine Funktion von t allein bezeichnet, die beseitigt werden kann, wenn es sich allein um die Bestimmung von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ handelt, die nach (260') den nach y und x genommenen Differentialquotienten von $\overline{\partial \mathfrak{P}} / \partial z$ proportional sind.

Für eine unendlich große ebene Scheibe vereinfacht sich das Resultat noch weiter dadurch, daß $\overline{\mathfrak{F}} = 0$ ist; denn da $\overline{\mathfrak{F}}$ nach seiner Bedeutung als auf der Platte regulär und im Unendlichen verschwindend betrachtet werden darf, so ist kein anderer Wert mit der Bedingung (261'''') vereinbar. In diesem Falle wird also aus (262)

$$262') \qquad \omega \frac{\overline{\partial \mathfrak{P}}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial (\mathfrak{P} + \mathfrak{P}_0)}}{\partial t}.$$

Ist ein äußeres induzierendes System nicht vorhanden, und somit die ganze Induktion Folge einer anfänglichen in der Platte vorhandenen quasi-stationären Strömung, so giebt diese Formel

$$262'') \qquad \omega \frac{\overline{\partial \mathfrak{P}}}{\partial z} = \frac{\overline{\partial \mathfrak{P}}}{\partial t},$$

eine Bedingung, die allerdings zunächst nur für die positive Oberfläche der Platte gilt, aber zugleich eine allgemeine Differentialgleichung für $\mathfrak{P}$ in dem Halbraume $z > 0$ liefert. Denn entnehmen wir aus (259'') und (259') bei verschwindendem $\mathfrak{S}_0$ den Wert

$$\mathfrak{P} = \int \mathfrak{v}_1 \frac{d o_1}{r} = \frac{1}{v} \int \mathfrak{S}_1 \frac{d o_1}{r}$$

und bilden mit ihm

$$262''') \quad -\omega \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \frac{1}{v} \int \left[\omega \mathfrak{S}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial t} \right] d o_1 = (\psi),$$

so stellt (ψ) die Potentialfunktion einer doppelten und einer einfachen Belegung der positiven Fläche der Platte dar, verhält sich also im äußeren Raume regulär und erfüllt ebenda die Bedingung $\triangle(\psi)=0$; besitzen die Ströme in unendlich fernen Punkten der Platte verschwindende Stärke, so verschwindet (ψ) an der unendlichen Kugel; es verschwindet überdies nach (262″) an der positiven Fläche der Platte selbst, und hieraus folgt, daß (ψ) im ganzen Halbraum $z>0$ verschwinden, die Gleichung (262″) dort also an allen Punkten erfüllt sein muß.

In diesem Falle führt sie auf

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{f}(x, y, z + \omega t), \tag{262''''}$$

und da die von den induzierten Strömen in den positiven Halbraum ausgehende magnetische Kraft durch die Formeln (259‴) gegeben ist, so erhält man den Satz, daß diese Kraft an einer Stelle x, y, z zur Zeit t dieselbe Größe und dieselbe Richtung hat, die sie in dem Punkte $x, y, z + \omega t$ zur Zeit $t = 0$ besaß. Oder anders ausgedrückt: an einem im Raume festgehaltenen Punkte ändert sich die magnetische Kraft mit der Zeit genau ebenso, als würde die von dem Anfangsstrom dauernd durchflossene Platte mit der Geschwindigkeit $\omega = v^2/2\pi\mathfrak{l}h$ längs der $-Z$-Axe verschoben. Je größer also die Leitungsfähigkeit $\mathfrak{l}$ und die Dicke h der Platte ist, um so langsamer verschwinden die einmal erregten und dann sich selbst überlassenen Ströme. Wegen des äußerst großen v^2 ist aber diese Geschwindigkeit auch bei den besten bekannten Leitern immer noch sehr groß. —

Auch die allgemeinere Gleichung (262′), die ein äußeres induzierendes System zuläßt, gestattet eine Veranschaulichung. Integriert man sie nach t von 0 bis zu dem betrachteten Zeitpunkt, so erhält man

$$\omega \int_0^t \frac{\partial \overline{\mathfrak{P}}}{\partial z} dt = (\overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}_0})_t - (\overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}_0})_0 .$$

In dem speziellen Falle, daß zur Zeit $t = 0$ weder in der Platte induzierte, noch in dem induzierenden System wahre oder scheinbare Ströme vorhanden sind, ist $(\overline{\mathfrak{P}} + \overline{\mathfrak{P}_0})_0 = 0$; betrachtet man dann den Zustand zu einem Zeitpunkt $t = dt$, so ist das Integral links unendlich klein, also auch das allein noch übrige Glied rechts. Ist speziell $(\overline{\mathfrak{P}_0})_t$ endlich, so kann man das Resultat schreiben

$$(\overline{\mathfrak{P}})_t = -(\overline{\mathfrak{P}_0})_t.$$

Da die beiden Werte an der Oberfläche der Platte zu nehmen sind, so sagt dies aus, daß die plötzliche Entstehung eines magnetischen Feldes von endlicher Stärke in der Scheibe ein System von Strömen induziert, welches an der Oberfläche die Wirkung dieses Feldes vollkommen neutralisiert. —

Die allgemeine Formel (262′) gestattet ebenso wie die speziellere (262″) die Ausdehnung auf den ganzen p o s i t i v e n Halbraum, wenn nur das induzierende System in dem n e g a t i v e n Halbraum liegt.

Unter diesen Umständen stellt nämlich

$$-\omega\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial z}+\frac{\partial(\mathfrak{P}+\mathfrak{P}_0)}{\partial t}=\frac{1}{v}\int\left(\omega\,\mathfrak{S}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathfrak{S}_1}{\partial t}\right)d o_1+\frac{\partial\mathfrak{P}_0}{\partial t}$$

eine Potentialfunktion dar, die im Halbraum $z > 0$ genau die Eigenschaften besitzt, wie (ψ) in Formel (262‴), die also gleichfalls daselbst überall verschwinden muß. —

Zu dem allgemeinen Integral der Gleichung (262′) gelangt man auf folgendem Wege.

Wir bezeichnen den Wert von $\mathfrak{P}$, der sich ergiebt, wenn man z mit $z+\omega\tau$, t mit $t-\tau$ vertauscht, durch $\mathfrak{Q}$, setzen also

263) $$\mathfrak{P}(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)=\mathfrak{Q}(x,y,z,t,\tau);$$

dann ist

263′) $$\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\tau}=\omega\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}.$$

Ferner gilt die Formel (262′), wie für $\mathfrak{P}$, so auch für $\mathfrak{Q}$, da durch die Substitution die Variabeln nur um in Bezug auf t und z konstante Parameter geändert sind; man erhält also, falls auch $\mathfrak{P}_0(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)=\mathfrak{Q}_0(x,y,z,t,\tau)$ gesetzt wird,

263″) $$\omega\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial z}=\frac{\partial(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}_0)}{\partial t}.$$

Die Kombination dieser beiden Formeln liefert

263‴) $$\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\tau}=\frac{\partial\mathfrak{Q}_0}{\partial t},$$

also nach Integration von $\tau=0$ bis $\tau=\tau_1$

$$\mathfrak{Q}_{\tau=\tau_1}-\mathfrak{Q}_{\tau=0}=\int_0^{\tau_1}\frac{\partial\mathfrak{Q}_0}{\partial t}\,d\tau.$$

Dies ergiebt bei Einsetzung der Werte für $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$

$$\mathfrak{P}(x,y,z,t)=\mathfrak{P}(x,y,z+\omega\tau_1,t-\tau_1)-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau_1}\mathfrak{P}_0(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)\,d\tau, \qquad 264)$$

und durch Differentiation nach z bei Berücksichtigung der Bedeutung von ψ und ψ_0 auch

$$\psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z+\omega\tau_1,t-\tau_1)-\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\tau_1}\psi_0(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)\,d\tau; \qquad 264')$$

hierin stellt das erste Glied rechts die Wirkung des zur Zeit $t-\tau_1$ stattfindenden Anfangszustandes, das zweite diejenige der nach diesem Zeitpunkt vollzogenen Bewegung des magnetisierenden Systemes dar. Fehlt ein solches System, so ist die erhaltene Lösung mit der in (262'''') für diesen Fall gegebenen äquivalent; denn setzt man $t-\tau=0$, betrachtet also den zur Zeit $t=0$ stattfindenden Zustand als Anfangszustand, so ergiebt sich

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z + \omega t, 0).$$

Die in (264) und (264') enthaltene Lösung des gestellten Problemes ignoriert die Rückwirkung der in der Platte induzierten Ströme auf das induzierende System und ist daher, wie schon S. 379 erörtert, nur dann streng, wenn diese Rückwirkung verschwindend klein ist. Hierher gehört insbesondere der Fall, daß die Induktion durch die Bewegung eines Linearmagneten oder noch bequemer nur eines seiner Pole von der Stärke m hervorgebracht wird. —

Ein besonders einfacher und wichtiger Spezialfall ist der, daß die Bewegung des induzierenden Systemes bereits unendlich lange Zeit angedauert hat; hier ist die Wirkung etwa anfänglich in der Platte vorhandener Ströme verschwunden, und die beiden Formeln (264) und (264') reduzieren sich auf

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty}\mathfrak{P}_0(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)\,d\tau,\\ \psi &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\infty}\psi_0(x,y,z+\omega\tau,t-\tau)\,d\tau.\end{aligned}\right\} \qquad 264'')$$

Wir wollen diese Gleichungen anwenden auf das Problem der Induktion durch einen geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit g' bewegten Magnetpol. Um die Formeln unverändert benutzen zu dürfen, muß der Pol sich in dem Halbraum $z<0$ befinden;

damit er schon unendlich lange in seiner Bahn geblieben sein könne, ohne in dem positiven Halbraum gewesen zu sein, muß seine Bewegung nach der Platte hin gerichtet sein.

Legen wir die XZ-Ebene durch die Bahn, bezeichnen die Komponenten von g' nach X und Z mit a' und c' und geben den Koordinaten des Poles die Werte

$$x_1 = a' t, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = z_0 + c' t,$$

so muß nach dem eben Gesagten gelten:

$$c' \geqq 0, \quad z_0 < 0, \quad t < z_0 / c'.$$

Die Potentialfunktion ψ_0 des Poles hat den Wert

$$\psi_0 = \frac{m}{r},$$

wobei

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

ist. Hieraus folgt für $\mathfrak{P}_0$ der Wert

$$\mathfrak{P}_0 = - m \int \frac{dz}{r},$$

also

$$\mathfrak{P} = + m \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty d\tau \int \frac{dz}{r_\tau}, \quad \psi = - m \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{d\tau}{r_\tau},$$

worin

$$\begin{aligned} r_\tau^2 &= \big(x - a'(t-\tau)\big)^2 + y^2 + \big(z + \omega\tau - z_0 - c'(t-\tau)\big)^2 \\ &= r_0^2 + 2\tau\big(a'(x - a't) + (c' + \omega)(z - z_0 - c't)\big) + \tau^2\big(a'^2 + (\omega + c')^2\big) \end{aligned}$$

ist, und r_0 den Wert bezeichnet, der aus r_τ durch Nullsetzen von τ folgt.

Wir führen die weitere Rechnung nur für ψ durch, da die Funktion $\mathfrak{P}$ ein direktes Interesse nicht besitzt.

Die Ausführung der Integration ergiebt, falls man

$$a'^2 + (\omega + c')^2 = g_1'^2$$

setzt, abgesehen von einer unendlich großen Konstante, die außer Betracht bleiben kann, da sie bei der vorzunehmenden Differentiation nach t verschwindet,

$$- \int_0^\infty \frac{d\tau}{r_\tau} = \frac{1}{g_1'} \, l \Big(g_1' r_0 + a'(x - a't) + (c' + \omega)(z - z_0 - c't)\Big),$$

und hieraus folgt

$$\psi = - m \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \frac{d\tau}{r_\tau} = \frac{m}{g_1'} \, \frac{g_1' \frac{\partial r_0}{\partial t} - (a'^2 + c'(c' + \omega))}{g_1' r_0 + a'(x - a't) + (c' + \omega)(z - z_0 - c't)},$$

wobei

$$\frac{\partial r_0}{d t} = -\frac{1}{r_0}\Big(a'(x - a't) + c'(z - z_0 - c't)\Big)$$

ist.

Da die Bewegung von $t = -\infty$ her andauert, so ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man den betrachteten Zeitpunkt zum Nullpunkt für t wählt. Hier ergiebt sich dann

$$\psi = -\frac{m}{g'_1}\,\frac{\dfrac{a'x + c'(z - z_0)}{r_1}g'_1 + a'^2 + c'(c' + \omega)}{g'_1 r_1 + a'x + (c' + \omega)(z - z_0)},$$

und es bedeutet

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + (z - z_0)^2,$$

wobei $z_0 < 0$ ist. Der gefundene Wert für ψ gilt für den positiven Halbraum, für den negativen aber, bis auf eine irrelevante Konstante, das Entgegengesetzte davon; denn nach S. 438 ist $\mathfrak{P}(x, y, z) = \mathfrak{P}(x, y, -z)$, und nach der Definition $\psi = -\partial\mathfrak{P}/\partial z$. —

Die von den induzierten Strömen ausgehenden magnetischen Kraftkomponenten

$$A = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad B = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad C = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$$

erhalten im allgemeinen sehr komplizierte Werte.

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Wirkung, welche der Punkt $x = y = 0$, $z = -z_0$, d. h. der Spiegelpunkt des induzierenden Poles erfährt, so kann man bei der Berechnung schon vor der Differentiation r_1 mit $\sqrt{(z - z_0)^2}$ vertauschen, was für den betrachteten Punkt mit $-2z_0$ identisch ist und gleich $+2\zeta$ gesetzt werden mag, um nicht einen negativen Parameter zu führen. Es findet sich dann leicht

$$A = +\frac{m a'}{4 g' \zeta^2 (g'_1 + c' + \omega)}\left(g'_1 - c' - \frac{a'^2}{g'_1 + c' + \omega}\right),$$

$$B = 0,$$

$$C = +\frac{m}{4 g' \zeta^2}\left(c' + \frac{a'^2}{(g'_1 + c' + \omega)}\right).$$

Das Entgegengesetzte hiervon, mit m multipliziert, giebt die Kraftkomponenten Ξ, H, Z, welche der induzierende Magnetpol erleidet; wir setzen also

$$\Xi = -mA, \quad H = -mB, \quad Z = -mC.$$

Besonderes Interesse besitzen die beiden Fälle, daß der Pol sich normal und daß er sich tangential zur Platte bewegt.

Bei normaler Bewegung ist $a' = 0$, $g' = c' + \omega$, also

$$\Xi = 0, \quad H = 0, \quad Z = -\frac{m^2 c'}{4\zeta^2 (c' + \omega)};$$

da ζ und ω positive Größen sind, so wirkt diese Kraft abstoßend.

Bei tangentialer Bewegung ist $c' = 0$, $g'^2 = a'^2 + \omega^2$, also

$$\Xi = -\frac{m^2 a' \omega}{4 g'_1 \zeta^2 (g'_1 + \omega)},$$

$$H = 0, \quad Z = -\frac{m^2 a'^2}{4 g'_1 \zeta^2 (g'_1 + \omega)};$$

der Pol erfährt also einerseits einen seiner Bewegung entgegenwirkenden Widerstand, außerdem wird er von der induzierten Scheibe hinweggetrieben. —

Ein Interesse anderer Art bieten die Werte der magnetischen Kräfte $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in der Oberfläche der Platte; nach den Formeln (260′) bestimmen sie nämlich direkt die Komponenten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, und somit Richtung und Stärke der in der Platte induzierten Strömung.

In dem einfachsten Falle, daß der Pol normal gegen die Platte wandert, also $a' = 0$ ist, gilt in deren positiver Oberfläche

$$\overline{\psi} = -\frac{m c'}{\bar{r}_1 g'_1}, \quad \text{dabei } g'_1 = \omega + c', \ \bar{r}_1^2 = x^2 + y^2 + z_0^2,$$

also

$$\overline{A} = -\frac{m c' x}{\bar{r}_1^3 g'_1}, \quad \overline{B} = -\frac{m c' y}{\bar{r}_1^3 g'_1};$$

wegen des nach (260″) stets großen Wertes von ω und des stets mäßigen von c' ist g'_1 mit $\omega = v^2/2\pi\mathfrak{l}h$ vertauschbar, sodaß auch gilt

$$\overline{A} = -\frac{2\pi\mathfrak{l} h m c' x}{v^2 \bar{r}_1^3}, \quad \overline{B} = -\frac{2\pi\mathfrak{l} h m c' y}{v^2 \bar{r}_1^3}.$$

Hieraus folgt dann

$$\mathfrak{u} = +\frac{\mathfrak{l} m c' y}{v \bar{r}_1^3}, \quad \mathfrak{v} = -\frac{\mathfrak{l} m c' x}{v \bar{r}_1^3};$$

die Strömung verläuft in Kreisen um die Bewegungsrichtung des Poles mit einer Intensität

$$\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{l} m c' e}{v \bar{r}_1^3}, \quad \text{wobei } e^2 = x^2 + y^2.$$

Für eine Bewegung des Poles parallel der Platte gilt

$$\overline{\psi} = -\frac{m a'}{g'_1} \frac{\frac{x}{\bar{r}_1} g'_1 + a'}{g'_1 \bar{r}_1 + a' x - \omega z_1}, \quad g_1'^2 = a'^2 + \omega^2, \ z_1 = z_0;$$

hier ist also g_1' erst um eine Größe zweiter Ordnung von ω verschieden. Vernachlässigt man schon die Glieder erster Ordnung, so wird einfacher

$$\bar{\psi} = -\frac{m\,a'}{\omega}\,\frac{x}{\bar{r}_1(\bar{r}_1 - z_1)},$$

und hieraus folgt

$$A = +\frac{m\,a'}{\omega}\left[\frac{1}{\bar{r}_1(\bar{r}_1 - z_1)} - \frac{x^2(2\,\bar{r}_1 - z_1)}{\bar{r}_1^3(\bar{r}_1 - z_1)^2}\right],$$

$$B = -\frac{m\,a'}{\omega}\,\frac{x\,y\,(2\,\bar{r}_1 - z_1)}{\bar{r}_1^3(\bar{r}_1 - z_1)^2}.$$

Ist der Abstand z_1 des Poles von der Platte klein gegen die Entfernung e der untersuchten Stelle von der Projektion des Poles auf die Platte, so ist z_1 neben r_1 zu vernachlässigen und r_1 mit e zu vertauschen. Dann wird einfacher

$$A = \frac{m\,a'}{\omega}\,\frac{y^2 - x^2}{e^4}, \quad B = -\frac{m\,a'}{\omega}\,\frac{2\,x\,y}{e^4},$$

also bei Benutzung des Wertes von ω

$$\mathfrak{u} = +\frac{\mathfrak{l}\,m\,a'\,2\,x\,y}{v\,e^4}, \quad \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{l}\,m\,a'(y^2 - x^2)}{v\,e^4}.$$

Die Stromkurven, deren Differentialgleichung $\mathfrak{u}:\mathfrak{v} = dx:dy$ lautet, sind Kreise, die sämtlich die Y-Axe im Koordinatenanfangspunkt tangieren würden, wenn es gestattet wäre, die Formeln bis zu dieser Stelle, d. h. bis unmittelbar an den bewegten Pol, als gültig zu betrachten.

Wir haben uns hier auf die Untersuchung der Induktion durch einen bewegten Pol beschränkt, wenn derselbe sich seit unendlich langer Zeit in Bewegung befindet. Der Fall, daß er vor endlicher Zeit seine Bewegung begann, ist mit Hilfe der Grundformeln (264) und (264′) gleichfalls zu erledigen, die Resultate werden aber wesentlich unübersichtlicher.

Was die Beobachtung hierher gehöriger Phänomene angeht, so wird man der Regel nach den induzierenden Magneten oder Magnetpol beweglich aufhängen und die Rückwirkung der bewegten Platte auf den Magneten untersuchen. Die bequemste Anordnung wird gebildet durch eine in ihrer Ebene rotierende leitende Kreisscheibe, der ein Pol eines Linearmagneten genähert ist. Befindet sich der Pol in Abständen von der Rotationsaxe und vom Rande, die beide groß sind gegen seinen normalen Abstand von der Ebene der Scheibe, so ist die Bewegung der Scheibe unterhalb des Poles als angenähert geradlinig zu betrachten, und die Resultate von S. 446 können benutzt

werden, um die eintretende Wirkung auf den Pol in qualitativer Hinsicht zu beurteilen.

Eine strenge Theorie dieser Anordnung, bei deren Benutzung ARAGO[134]) die ersten Wirkungen der Induktion in flächenhaften Leitern entdeckt hat, bietet erhebliche Schwierigkeiten dar. —

§ 44. Elektromagnetische Schwingungen in einem Dielektricum. Die Verteilung der Kräfte um einen geradlinigen Erreger.

Wenden wir uns nun zu elektromagnetischen Vorgängen, deren Änderungsgeschwindigkeit so groß ist, daß von den Polarisationsströmen nicht abgesehen werden kann, so komplizieren sich dadurch die Verhältnisse in mathematischer Hinsicht erheblich; nicht nur ist jetzt immer der ganze unendliche Raum der Schauplatz der Veränderungen, und deshalb eine Beschränkung der theoretischen Entwickelungen auf die Leiter allein nicht mehr zulässig; auch die Grundformeln selbst nehmen kompliziertere Gestalten an.

Dazu kommt eine eigentümliche Schwierigkeit physikalischer Natur. Zwar hat HERTZ die der Herstellung so schneller Schwingungen entgegenstehenden praktischen Hindernisse höchst glücklich überwunden und hat auch, was erst ihre Verwertung gestattete, in den Resonatoren, auf die wir im nächsten Paragraphen genauer eingehen werden, das Mittel entdeckt, ihre Anwesenheit im Luftraum und einige ihrer Eigenschaften nachzuweisen; aber über das Detail der Erzeugung jener Schwingungen, wie über dasjenige ihrer Auffassung im Resonator fehlt eine klare Vorstellung, sodaß wir nicht einmal im Stande sind, die Bedingungen der Probleme, um deren theoretische Lösung es sich handelt, sicher zu formulieren. Infolge dieses Übelstandes ist die Theorie der schnellen elektromagnetischen Schwingungen keineswegs soweit gefördert, als bei der Wichtigkeit des Gegenstandes und angesichts einer Fülle von empirischen Resultaten wünschenswert wäre.

Die große Wichtigkeit der hierher gehörigen Vorgänge liegt aber darin, daß sie allein den Anteil des Dielektricums an den veränderlichen elektromagnetischen Vorgängen zu einer wahrnehmbaren Stärke steigern und somit eine Prüfung der Grundlagen der Theorie dieser Körper gestatten. Insbesondere handelt es sich dabei um die Frage der Äquivalenz der Polarisationsströme mit den Leitungsströmen in elektromagnetischer Hinsicht, die zuerst von MAXWELL angenommen, aber erst durch HERTZ entscheidend bestätigt worden ist.[135])

Die experimentelle Anordnung, durch welche Hertz Schwingungen von so außerordentlich kurzer Periode herstellte, daß sie das Gewünschte leisteten, ist die folgende.[136])

Zwei leitende Kugeln sind durch einen leitenden Stab verbunden, der in seiner Mitte eine kleine Unterbrechung hat; die der letzteren beiderseitig anliegenden Stabteile sind mit den Enden der sekundären Spirale eines Funkeninduktors verbunden, welche in bekannter Weise durch die Unterbrechungen eines die primäre Spirale durchlaufenden Stromes induziert wird. Die hierdurch erregten Schwingungen in der sekundären Spirale sind verhältnismäßig langsam, der Strom ist quasi-stationär, und die mit den Enden der Spirale verbundenen Konduktoren werden während des Anwachsens des Induktionsstromes jeden Augenblick eine elektrische Verteilung tragen, die sich von der Gleichgewichtsverteilung derselben Ladung, die nach Unterbrechung der Verbindung mit der Spirale eintreten würde, nicht merklich unterscheidet.

Hat die Potentialdifferenz der beiden Hälften des Konduktors eine gewisse Höhe erreicht, so springt ein Funke über, und die durch ihn erhitzte Luftstrecke der Unterbrechungsstelle scheint, wie schon S. 413 erwähnt, so lange eine merklich leitende direkte Verbindung der beiden Hälften des Konduktors herzustellen, als ihre Temperatur einen gewissen Wert nicht unterschreitet. Da die zweite Verbindung der beiden Konduktorhälften durch die sekundäre Rolle des Induktionsapparates wesentlich größere Selbstinduktion, und jedenfalls kurz nach der Funkenentladung auch größeren Widerstand besitzt, als die erhitzte Luftstrecke, so spielen sich die Schwingungen fast allein in dem Konduktor ab; überdies sondern sich die in der Rolle verlaufenden Schwingungen schon durch die viel größere Schwingungsdauer von den im Konduktor eintretenden.

Die Anordnung hat also viel Verwandtes mit der S. 402 u. f. besprochenen und von Feddersen benutzten. Auch dort werden die Schwingungen dadurch erregt, daß zwei auf verschiedene Potentiale geladene Konduktoren durch einen Draht plötzlich leitend verbunden werden, aber die in Wirkung tretenden Kapazitäten und Induktionskoeffizienten sind bei dem älteren Versuch viel größer, demgemäß ist auch die Schwingungsdauer viel beträchtlicher, als bei dem neueren.

Wegen der bei letzterem in Bewegung gesetzten viel kleineren Ladungen wird die durch eine einzelne Entladung erregte Schwingungsreihe eine viel geringere Intensität, wegen der durch die Kleinheit der Selbstinduktion gesteigerten Dämpfung eine viel kürzere Dauer

haben, und beides muß die Schwierigkeit der Beobachtung ihrer Wirkung steigern; aber eben diesem Übelstand hat Hertz durch den Kunstgriff, die Entladungen mit Hilfe des Induktionsapparates in nahe gleichen Zeitintervallen immer zu wiederholen, erfolgreich begegnet.

Was nun die im Konduktor erregten Schwingungen anbetrifft, so sind sie ebensowenig innerhalb des Leiters geschlossen, wie die von Feddersen beobachteten; während aber bei letzteren die vom Polarisationsstrom durchflossene, und somit den Leitungsstrom schließende Strecke des Dielektricums sehr kurz und seitlich ziemlich scharf begrenzt war, ist bei der Hertz'schen Anordnung die ganze Umgebung des Konduktors an der Schließung des Stromes beteiligt, und eben darum bieten sich hier einer theoretischen Verfolgung des Vorganges große Schwierigkeiten.

Handelt es sich nur um eine Abschätzung der Größenordnung der Periode, so kann man von der Annahme ausgehen, daß der Leitungsstrom innerhalb, oder nach S. 434 genauer auf der Oberfläche des Drahtes des Konduktors in dessen ganzer Länge konstante Stärke besitzt, daß also die Polarisationsströme erst an die Kugeln ansetzen und bei deren beträchtlicher Oberfläche sich über einen so großen Querschnitt verteilen, daß ihr Anteil an der Selbstinduktion des Systemes neben demjenigen des Leitungsstromes auf dem Draht vernachlässigt werden kann.

Die Selbstinduktion des Systemes würde hiernach also die gleiche sein, wie die eines Cylinders von der Dicke des Drahtes und einer die seine ein wenig übersteigenden Länge; und zwar letzteres, weil beim Eintritt in die Kugeln der Strom zunächst noch dieselbe Dichte besitzt, wie auf dem Drahte. Man wird indessen keinen großen Fehler begehen, wenn man die dem Konduktor äquivalente Länge des Cylinders einfach derjenigen des Drahtes gleich setzt.

Was die in Rechnung zu ziehende Kapazität des Systemes angeht, so wird dieselbe in erster Linie durch die Kugeln geliefert. In Bezug auf diese liegt nahezu der auf S. 226 besprochene Fall der Entladung zwischen zwei Konduktoren vor, die eine merkliche Influenz auf einander nicht ausüben. Es ist dann für die Ladungen E_1 und E_2 und die Potentialwerte P_1 und P_2 der beiden Kugeln einfach

$$E_1 = P_1 C, \quad E_2 = P_2 C,$$

wobei C mit dem Radius der Kugeln identisch ist, und an Stelle der Formeln (240''''), die z. B. bei der Feddersen'schen Anordnung Geltung besaß, tritt demgemäß

$$I = -\frac{d(E_1 - E_2)}{2\,d\,t} = -C\frac{d(P_1 - P_2)}{2\,d\,t};$$

gegenüber der früheren Bedingung erscheint jetzt C mit $\frac{1}{2}C$ vertauscht. Hierbei ist allerdings der Anteil, den der Stab zwischen den Kugeln an der Kapazität hat, und der auch wegen der Wirkung der kleinen Unterbrechungsstelle nicht unbedeutend sein dürfte, vernachlässigt; da er sich aber nur ganz oberflächlich abschätzen läßt und jedenfalls bei Betrachtungen, die nur das Qualitative des Vorganges ergeben sollen, ohne Belang ist, brauchen wir auf ihn nicht einzugehen.

Unter Berücksichtigung dieser Resultate kann dann zur Berechnung der Periode τ der Schwingungen in dem Konduktor nach (241''') die Formel

$$\tau = \pi\sqrt{2\,Q\,C}$$

benutzt werden. Die Zahlenwerte, die sich nach ihr bei den von Hertz und den von Späteren[137]) getroffenen Anordnungen gefunden haben, bewegen sich etwa zwischen $\tau = 0{,}2.10^{-10}$ und $\tau = 200.10^{-10}$.

Es ist übrigens zu bemerken, daß das Zustandekommen von Schwingungen nur mit dieser Periode einen ganz bestimmten Anfangszustand voraussetzt, der im allgemeinen beim Experiment nicht vorhanden sein wird; jedenfalls kann man aber behaupten, daß die anderen im Erreger möglichen Schwingungen kleinere Perioden haben werden, als die oben angegebenen, und somit den Charakter von Obertönen zu dem Grundtone besitzen müssen, der durch die behandelten Schwingungen repräsentiert wird. —

Nach dieser Darstellung ist der Hertz'sche Erreger weit davon entfernt, Bedingungen für das Zustandekommen elektromagnetischer Schwingungen zu liefern, die sich klar übersehen und analytisch formulieren lassen. Ihre Gesetze sind demgemäß im einzelnen noch vielfach unklar; doch läßt sich über die von ihnen ausgehenden Wirkungen einiges mit vieler Wahrscheinlichkeit behaupten. Die Polarisationsströme, welche den Leitungsstrom schließen, haben im Dielektricum die Möglichkeit, sich sehr weit auszubreiten, und werden daher nirgends eine beträchtliche Dichte besitzen; hieraus folgt, daß in der Nähe des Erregers der in diesem auf kleinen Querschnitt zusammengedrängte Leitungsstrom elektrische und magnetische Kräfte äußern wird, welche die von den Polarisationsströmen im Dielektricum ausgehenden weit überwiegen. Der Erreger wird daher in sehr kleinen Entfernungen wirken müssen, als wenn jene Ströme fehlten; nämlich elektrostatisch wie zwei Konduktoren mit wechselnder

Ladung, magnetisch wie ein zwischen ihnen hin- und herfließender Strom.

Wenn man also eine Lösung der allgemeinen Bedingungsgleichungen für die elektrische und die magnetische Kraft erhalten kann, die im Dielektricum die Symmetrie des im HERTZ'schen Erreger sich abspielenden Vorganges besitzt und in dessen Nähe Kräfte von den beschriebenen Eigenschaften liefert, so wird man mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit annehmen dürfen, daß sie auch in der ganzen Umgebung des Erregers die Gesetze des Vorganges richtig darstellt. Eine solche Lösung ist in der That von HERTZ aufgestellt worden, und wir wollen sie hier entwickeln.[138]) —

Bezieht man die allgemeinen Gleichungen (248″) auf den Fall, wo das erregende Leitersystem in elektrischer Hinsicht die Symmetrie eines Rotationskörpers um die Z-Axe besitzt, die elektrischen Kräfte also in den Meridianebenen liegen, so ergeben sie, daß die magnetischen Kräfte zugleich normal zu den Meridianen stehen müssen.

Setzen wir also

$$265)\quad \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 = a^2 \\ X = N\frac{x}{a}, \quad Y = N\frac{y}{a}, \quad A = -M\frac{y}{a}, \quad B = +M\frac{x}{a}, \end{array} \right.$$

so bezeichnet N die Komponente der elektrischen Kraft K normal zur Z-Axe, M die der magnetischen Kraft normal zum Meridian, C ist gleich Null, und wir erhalten folgende, noch ganz allgemeine Hauptgleichungen

$$265')\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{d}\frac{\partial N}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}N = -v\frac{\partial M}{\partial z}, \\ \mathfrak{d}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}Z = \frac{v}{a}\frac{\partial aM}{\partial a}, \\ \qquad \mathfrak{m}\frac{\partial M}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Z}{\partial a} - \frac{\partial N}{\partial z}\right); \end{array} \right.$$

hierzu kommen die Grenzbedingungen, die wir nicht allgemein hinschreiben wollen, weil wir, wie gesagt, jetzt nur die Ausbreitung der Schwingungen im Dielektricum, nicht aber deren Übergang aus dem Erreger untersuchen wollen.

Im Dielektricum ist $\mathfrak{l} = 0$, und es gilt demgemäß, wenn noch $v/\mathfrak{d} = v_1$, $v/\mathfrak{m} = v_2$ gesetzt wird,

$$265'')\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial t} = -v_1\frac{\partial M}{\partial z}, \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = +\frac{v_1}{a}\frac{\partial aM}{\partial a}, \\ \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = v_2\left(\frac{\partial Z}{\partial a} - \frac{\partial N}{\partial z}\right). \end{array} \right.$$

Bezeichnet Π eine übrigens beliebige reguläre Funktion von a, z, t, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = v_1 v_2 \triangle \Pi \tag{266)}$$

genügt, so befriedigt man die obigen Formeln durch den Ansatz

$$a Z = \frac{\partial A}{\partial a}, \quad a N = -\frac{\partial A}{\partial z}, \quad a M = \frac{1}{v_1} \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{266')}$$

worin

$$a \frac{\partial \Pi}{\partial a} = A \tag{266'')}$$

gesetzt ist. In der That werden hierdurch die beiden ersten Formeln identisch erfüllt; die letzte reduziert sich auf

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - v_1 v_2 \triangle \Pi\right) = 0 .$$

Die elektrischen Kraftlinien haben die Differentialgleichung

$$d z : d a = Z : N,$$

welche, nach (266') integriert, liefert

$$A = \text{Const.};$$

konstruiert man in einer Meridianebene ein System dieser Kurven, bei dem die Konstante von der einen Kurve zur benachbarten um immer das gleiche Inkrement wächst, so ist das Produkt aus dem normalen Abstand dn zweier solcher Kurven in den Abstand a von der Z-Axe an jeder Stelle der dort wirkenden elektrischen Kraft indirekt proportional.

Die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft nach den Axen X, Y, Z drücken sich in Π folgendermaßen aus; es wird

$$\left.\begin{aligned} X = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad Y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad Z = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a}\left(a \frac{\partial \Pi}{\partial a}\right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}, \\ A = -\frac{1}{v_1} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial t}, \quad B = +\frac{1}{v_1} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial t}, \quad C = 0 . \text{ —} \end{aligned}\right\} \tag{266''')}$$

Eine partikuläre Lösung der Gleichung (266) ist die Funktion

$$\Pi = \frac{k}{r} \sin \alpha \left(t - \frac{r}{\omega}\right), \tag{267)}$$

worin k und α Konstanten sind, und r den Abstand vom Koordinatenanfang bezeichnet, vorausgesetzt, daß

$$\omega^2 = v_1 v_2 \tag{267')}$$

ist. Sie genügt jener Hauptgleichung überall mit Ausnahme des Punktes $r = 0$, den wir ausgeschlossen denken müssen.

Der Ausdruck (267) stellt eine Funktion dar, die sich in Kugelwellen von diesem Punkte fortpflanzt; ω bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, k/r die variable Amplitude.

Für sehr kleine Werte von r reduziert sich Π auf

$$\Pi = \frac{k}{r} \sin \alpha t,$$

erfüllt also die Gleichung $\triangle \Pi = 0$; infolgedessen nehmen hier die elektrischen Komponenten die Form

$$X = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad Y = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad Z = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}$$

an und erscheinen somit als Ableitungen einer Potentialfunktion

$$\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial z} = k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \sin \alpha t.$$

Diese Potentialfunktion entspricht einem elektrischen Doppelpunkt, dessen Axe λ in die Z-Axe fällt, und dessen Moment $\mu = k \sin \alpha t$ periodisch wechselt; man kann dasselbe dadurch erzeugt denken, daß in dem oben besprochenen, unendlich klein gewählten Erreger von der Länge L eine freie Ladung $+E_0'$ in einer, $-E_0'$ in der entgegengesetzten Richtung hin und her wandert. Sind diese Ladungen vollständig getrennt in den Endstücken des Erregers, so besitzt ihr elektrisches Moment den größten Wert von dem absoluten Betrag $\mu_0 = L E_0'$, und mit diesem ist k zu identifizieren.

Die Komponenten der magnetischen Kraft R resp. M erhalten gleichzeitig die Intensitäten

$$A = +\frac{\mu_0 y \alpha}{v_1 r^3} \cos \alpha t, \quad B = -\frac{\mu_0 x \alpha}{v_1 r^3} \cos \alpha t, \quad C = 0;$$

ihre Resultierende beträgt

$$M = \frac{\mu_0 \alpha}{v_1 r^2} \sin \vartheta \cos \alpha t,$$

wobei $(x^2 + y^2)/r^2 = a^2/r^2 = \sin^2 \vartheta$ gesetzt ist; sie entspricht dem Biot-Savart'schen Elementargesetz, was noch deutlicher hervortritt, wenn man die variable freie Ladung E' der Kugeln des Erregers einführt, die im Falle vollständiger Scheidung mit E_0' zusammenfällt, und

$$\mu = \mu_0 \sin \alpha t = E' L, \quad E' \mathfrak{d} = E$$

setzt, wobei nach S. 50 E die wahre Ladung bezeichnet. Es resultiert dann

$$M = \frac{\partial E}{\partial t} \frac{L \sin \vartheta}{v r^2};$$

hierin vertritt L die Länge des Linienelementes, $-\partial E/\partial t$ nach (153′) die Stromstärke in ihm, und die Übereinstimmung mit der Formel (156′) ist vollkommen.

Diese Resultate beweisen, das die in (267) für Π gegebene Lösung in der Nähe des Erregers den verlangten Charakter besitzt; sie kann also nunmehr auch zur Ableitung der Gesetze des Vorganges in größerer Entfernung benutzt werden.

Der allgemeine Ausdruck für die Funktion $\varLambda$ lautet

$$\varLambda = -\mu_0 \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{\alpha}{\omega}\cos\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right)+\frac{1}{r}\sin\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right)\right); \quad 267'')$$

er enthält also ein Glied, das sich mit konstanter Amplitude fortpflanzt, und eines, dessen Amplitude proportional mit $1/r$ abnimmt.

Schreibt man

$$\varLambda = a^2 F,$$

so enthält F nur r und t, und wenn man $\partial F/\partial r = F'$ setzt, so wird

$$Z = 2F + \frac{a^2}{r}F', \quad N = -\frac{a z}{r}F';$$

es haben also N und Z im allgemeinen verschiedene Phasen. Hieraus folgt, daß die elektrische Kraft K, als Vektor aufgefaßt, Schwingungen in der Meridianebene ausführt, deren Bahn eine Ellipse ist. Da N mit a und mit z verschwindet, so degeneriert diese Ellipse in der Z-Axe ($a=0$) und in der XY-Ebene ($z=0$) zu einer Geraden, und K wird hier dargestellt durch

$$K = Z = 2F_{r=z} \text{ für } a = 0,$$
$$K = Z = (2F + rF')_{r=a} \text{ für } z = 0.$$

Zieht man den Wert von F heran, so erkennt man, daß in größerer Entfernung der erstere Ausdruck proportional mit $1/r^2$, der letztere proportional mit $1/r$ abnimmt; in der Richtung der Polaxe wird also die elektrische Kraft mit wachsender Entfernung viel eher unmerklich, als in einer dazu normalen Richtung.

Schreibt man die allgemeinen Werte der beiden Komponenten in der Form

$$Z = a_1\cos\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right) + a_2\sin\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right),$$
$$N = b_1\cos\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right) + b_2\sin\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right),$$

so sind hierin die a_h und b_h Funktionen von a und z. Die Bedin-

gung dafür, daß die Schwingung der elektrischen Kraft eine kreisförmige sei, bilden, wie leicht nachzuweisen, die Formeln

$$a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0.$$

Es ergiebt sich hieraus, daß die Orte zirkularer Schwingungen durch zwei Gleichungen zwischen a und z gegeben sind, also im allgemeinen in diskreten Punkten einer Meridianebene, resp. in durch sie gehenden Kreisen um die Z-Axe bestehen. Solche Kreisgebiete sind in der That durch die Beobachtung nachgewiesen worden.[139])

Das Verhalten der magnetischen Kraft M bietet minderes Interesse; sie ist gegeben durch

$$M = \frac{a}{v_1} \frac{\partial F}{\partial t}$$

und enthält ein Glied, das mit a/r^2, eines, das mit a/r^3 proportional ist. —

Die Ausdrücke für die sämtlichen Kraftkomponenten vereinfachen sich erheblich, wenn man so große Entfernungen r voraussetzt, daß die Beschränkung auf die in Bezug auf r niedrigsten Glieder zulässig ist.

Dann gilt, wenn wieder $a/r = \sin\vartheta$ gesetzt wird,

268) $$A = -\frac{\mu_0 \alpha}{\omega} \sin^2\vartheta \cos\alpha\left(t - \frac{r}{\omega}\right),$$

woraus folgt

268') $$\left\{\begin{aligned} N &= +\frac{\mu_0 \alpha^2 \sin\vartheta\cos\vartheta}{\omega^2 r} \sin\alpha\left(t - \frac{r}{\omega}\right), \\ Z &= -\frac{\mu_0 \alpha^2 \sin^2\vartheta}{\omega^2 r} \sin\alpha\left(t - \frac{r}{\omega}\right), \\ M &= +\frac{\mu_0 \alpha^2 \sin\vartheta}{\omega v_1 r} \sin\alpha\left(t - \frac{r}{\omega}\right); \end{aligned}\right.$$

man erkennt, daß jetzt die Phase von N und Z die gleiche, die Schwingung der elektrischen Kraft also geradlinig ist, überdies normal zu r, also transversal stattfindet. Beiläufig mag bemerkt werden, daß bei der eingeführten Annäherung die Gleichung $A =$ Const. nicht mehr die Kraftlinien ergiebt.

Die Formeln (268') zeigen, daß von dem Erreger Wellen elektrischer und magnetischer Kraft ausgehen, die in großer Entfernung r Kugelgestalt annehmen, in gegen r kleinen Bereichen also als eben angesehen werden können; indem sie fortschreiten, entführen sie dem Erreger eine gewisse Menge Energie, die demselben dauernd ersetzt werden muß, wenn die Oscillationen unverändert fortbestehen sollen.

Die Größe dieser Energiebewegung kann man mit Hilfe des POYNTING'schen Satzes (252') leicht berechnen; denn da in einem leitungsfreien Dielektricum Energie nicht verschwindet, so ist die durch jede den Koordinatenanfang umschließende Oberfläche während einer Periode austretende Energie gleich groß; man kann daher diese Oberfläche so wählen, wie sie für die Rechnung am bequemsten liegt, hier also am besten als eine Kugelfläche von so großem Radius, daß an derselben die vereinfachten Formeln (268') gelten.

Die durch die Flächeneinheit pro Zeiteinheit austretende Energiemenge

$$\overline{\mathfrak{s}} = \overline{\mathfrak{f}} \cos(r, x) + \overline{\mathfrak{g}} \cos(r, y) + \overline{\mathfrak{h}} \cos(r, z)$$

lautet in unserem Falle

$$\overline{\mathfrak{s}} = \frac{v}{4\pi} \left[(YC - ZB) \frac{x}{r} + (ZA - XC) \frac{y}{r} + (XB - YA) \frac{z}{r} \right],$$

oder unter Benutzung der Ausdrücke (265) und bei Einführung des Winkels ϑ

$$\overline{\mathfrak{s}} = \frac{v}{4\pi} M(N \cos\vartheta - Z \sin\vartheta),$$

also wegen (268')

$$\overline{\mathfrak{s}} = \frac{\mathfrak{d}}{4\pi} \left(\frac{\mu_0}{r}\right)^2 \frac{\alpha^4}{\omega^3} \sin^2\vartheta \sin^2\alpha\left(t - \frac{r}{\omega}\right). \qquad 268'')$$

Summiert man diesen Wert über die ganze Oberfläche und über die Dauer einer Periode τ, so erhält man für den gesamten Energieverlust während τ den Ausdruck

$$E' = \frac{2}{3} \mathfrak{d} \pi \mu_0^2 \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^3.$$

Für die Zeiteinheit resultiert

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{3} \mathfrak{d} \mu_0^2 \frac{\alpha^4}{\omega^3},$$

oder bei Einführung von $\mu_0 = E_0' L = E_0 L / \mathfrak{d}$, $\omega^2 = v^2 / \mathfrak{d}\mathfrak{m}$ auch

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{E_0^2 L^2 \alpha^4}{3 \mathfrak{d} \omega^3} = \frac{E_0^2 L^2 \alpha^4 \sqrt{\mathfrak{d}\mathfrak{m}^3}}{3 v^3}. \text{ — } \qquad 268''')$$

§ 45. Die elektromagnetischen Resonatoren.

Wie schon im Eingang des vorigen Abschnittes erwähnt worden, hat HERTZ das Mittel zur Beobachtung der von elektrischen Schwingungen in Leitern ausgehenden Kräfte innerhalb eines Dielektricums in den von ihm konstruierten Resonatoren gefunden. Obgleich eine befriedigende Theorie ihrer Wirksamkeit noch fehlt, und ihre An-

wendung darunter leidet, und obgleich andere Methoden zur Untersuchung der Schwingungen später aufgefunden worden sind, nehmen die Resonatoren unter den experimentellen Hilfsmitteln zum Studium der elektromagnetischen Schwingungen noch immer eine ausgezeichnete Stellung ein. Und da die fundamentalen Beobachtungen über diese Schwingungen ohne eine Erläuterung der zu ihrer Ausführung benutzten Mittel schwer verständlich sind, so werden wir uns hier mit ihnen, also insbesondere mit den Resonatoren beschäftigen müssen, obwohl diese Betrachtung wegen des Charakters des Problemes und wegen des Mangels sicherer Grundlagen für die Theorie etwas außerhalb des Rahmens dieses Buches fällt.

Der Resonator wird in der von Blondlot [140]) modifizierten, theoretisch einfachsten Anordnung durch einen linearen Leiter dargestellt, der an den Platten eines Kondensators endigt und in kreisförmiger oder rechteckiger Gestalt gebogen zu sein pflegt. Leiter dieser Art, die sich ähnlich wie geschlossene behandeln lassen, sind auf S. 402 u. f. besprochen worden; dabei hat sich ergeben, daß sie auf äußere induzierende Kräfte, welche periodische Funktionen der Zeit sind, je nach der Größe dieser Periode verschieden stark reagieren, und daß sie für denjenigen Wert derselben, der mit der Periode ihrer Eigenschwingung zusammenfällt, am stärksten ansprechen.

Beachtet man nun, daß die Gleichung (251‴) das Linienintegral L der induzierten elektrischen Kraft ganz allgemein bestimmt, so erkennt man, daß ein solches System an verschiedenen Stellen des von elektromagnetischen Schwingungen durchzogenen Raumes und in verschiedenen Positionen verschieden starke Induktionsströme enthalten muß. Man kann die letzteren beobachten, wenn man an den Platten des Kondensators zwei sich sehr genäherte Ansätze anbringt, zwischen denen bei hinreichender Spannung Fünkchen erscheinen; aus der Schlagweite dieser letzteren schließt man roh auf die Stärke des Induktionsstromes und aus dieser nach (251‴) auf die Stärke des magnetischen Stromes, welcher unter verschiedenen Umständen die vom Resonatordraht umrandete Fläche durchsetzt.

Ist die Richtung des magnetischen Stromes konstant, d. h., sind die Schwingungen der magnetischen Kraft lineär, so vermag man dieselbe zu bestimmen, indem man mehrere Positionen des Resonators an einer und derselben Stelle aufsucht, für welche die Funken verschwinden; die Richtung des magnetischen Stromes fällt dann in diejenige der Schnittlinie der Ebenen, welche dabei den Resonator enthielten. Es ist aber zu beachten, daß der Fall geradliniger

magnetischer Schwingungen, der bei dem HERTZ'schen Erreger nach dem oben Entwickelten eintritt, nur ein spezieller ist, und daß im allgemeinen die elektrischen und die magnetischen Schwingungen elliptischen Charakter haben.

Ferner muß betont werden, daß die im Resonator zur Wirkung kommenden elektrischen Kräfte nicht identisch mit denen sind, die bei seiner Abwesenheit an dem betreffenden Ort stattfinden, daß vielmehr die Anwesenheit des Resonators das elektromagnetische Feld in einer der Theorie schwer zugänglichen Weise verändert. Ausgenommen ist nur der Fall, daß, wie bei der zuletzt beschriebenen Beobachtung, der im Resonator induzierte Strom verschwindet; hier kann man auch die Wirkung des Resonators auf das Feld in großer Annäherung als verschwindend betrachten. —

Die vorstehend beschriebene Anordnung des Resonators ist die in theoretischer Hinsicht einfachste, weil bei ihr der Vorgang nach den Formeln für quasi-stationäre Ströme berechnet werden kann. Die Verhältnisse komplizieren sich, wenn, wie bei der ursprünglich von HERTZ[141]) und nach ihm von vielen anderen benutzten Konstruktion, der Resonatordraht nicht in den Platten eines Kondensators, sondern in Kugeln oder Spitzen endigt, zwischen denen die Funken überspringen. Hier konzentrieren sich nämlich die Polarisationsströme nicht auf einen ziemlich scharf begrenzten Querschnitt, sondern schließen sich in der Umgebung der Funkenstrecke seitlich an den Resonatordraht an, sodaß im umgebenden Dielektricum ein System von Stromfäden mit verschiedener, nach außen abnehmender Intensität entsteht.

Eine Theorie dieser Anordnung auf Grund der allgemeinen Gleichungen (248) und (248') abzuleiten ist noch nicht gelungen; man ist demgemäß gezwungen, Erfahrungsthatsachen und Hypothesen zu Hilfe zu nehmen. Insbesondere benutzt man, daß erregte Schwingungen der elektrischen Strömung in einem lineären, von einem Dielektricum umgebenen Leiter sich nach der Beobachtung ähnlich verhalten, wie die mechanischen Schwingungen einer Saite bei Einwirkung des Luftwiderstandes, nämlich längs des Leiters mit einer nahe konstanten Geschwindigkeit fortschreiten, indem sie zugleich ihre Energie allmählich an die Umgebung abgeben. Man setzt daher nach Analogie mit Formel (214''') Bd. I, S. 435 für I die Gleichung an:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} - \beta \frac{\partial I}{\partial t},$$

worin α und β Konstanten bezeichnen, und das zweite Glied rechts

eine äußere dämpfende Kraft nach Art des Luftwiderstandes enthält.

Nun haben Beobachtungen, auf die wir später noch eingehen werden, ergeben, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von I längs eines im leeren Raume befindlichen linearen Leiters merklich gleich v ist, wir werden daher, weil die Dämpfung auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit geringen Einfluß übt,

$$\alpha = v^2$$

setzen dürfen.

Ist außer dem Widerstand noch eine äußere, etwa periodische, antreibende Kraft wirksam, sind die Schwingungen also erzwungene, so erscheint rechts ein weiteres mit jener Kraft proportionales Glied Σ; die Gleichung nimmt sonach die Form

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} - \beta \frac{\partial I}{\partial t} + \Sigma$$

an, in der Σ noch zu bestimmen ist. Letzteres gelingt, indem man berücksichtigt, daß die erhaltene Formel auf sehr lange Wellen und ein relativ kurzes Stück des Leiters, etwa die Längeneinheit, angewandt, auf die Gleichung (238) für quasi-stationäre Ströme

$$Q \frac{\partial I}{\partial t} = L' - W I$$

führen muß. Sie leistet das Verlangte, wenn man sie schreibt

$$269) \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 I}{\partial s^2} - \frac{W_1}{Q_1} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{Q_1} \frac{\partial S'}{\partial t}$$

und unter W_1 den Widerstand der Längeneinheit, unter Q_1 die Induktion des ganzen Leiters auf seine Längeneinheit, unter S' die Tangentialkomponente der induzierten elektromotorischen Kraft versteht; in dieser, wesentlich hypothetischen Form wird die Gleichung als Grundlage für die Theorie der sogenannten elektrischen Drahtwellen und speziell des HERTZ'schen Resonators benutzt.[142])

Mit ihr sind Grenzbedingungen für die Enden $s = 0$ und $s = l$ des Resonatordrahtes in der Unterbrechungsstelle zu verbinden. Nehmen wir an, daß die Enden die Gestalt von stumpfen Spitzen haben, also eine merkliche Kapazität nicht besitzen, so kann der Leitungsstrom im Draht die von ihm bewegten Ladungen nicht in den Enden ablagern, sondern muß sie schon vorher an die Oberfläche des Drahtes bringen; dort schließen sich also im Dielektricum die Polarisationsströme an, und der Leitungsstrom I ist in den Enden selbst verschwindend. —

Wenn weiter keine Bedingungen vorhanden sind, der Draht also völlig isoliert ist, läßt sich das Problem für jedes gegebene S' lösen. Im anderen Falle, wenn z. B. ein Punkt des Drahtes dauernd zur Erde abgeleitet ist, muß man den Draht in mehrere Stücke zerlegen und jeden Teil gesondert behandeln. Wir sehen von diesen Komplikationen aber ab.

Ist zunächst $S' = 0$, so haben die partikulären Integrale der Gleichung (269) für I die Form

$$e^{-\varkappa t} \sin \alpha (t + t_0) \sin \frac{h \pi s}{l},$$

worin $h = 1, 2, \ldots$ ist und

$$\varkappa = \frac{W_1}{2 Q_1}, \quad \alpha^2 = \frac{h^2 \pi^2 v^2}{l^2} + \frac{W_1^2}{4 Q_1^2}. \qquad 269')$$

Ist in dem Werte von α^2, wie wir annehmen wollen, das zweite Glied neben dem ersten zu vernachlässigen, so erhält man

$$\alpha = \frac{h \pi v}{l}. \qquad 269'')$$

Wenn der Leiter zu dem schwingenden Felde in Resonanz gesetzt ist, so muß S' die Form besitzen

$$S' = F(s) \sin \alpha t, \qquad 269''')$$

wobei α einen der obigen Werte hat.

Längs des Resonators läßt sich $F(s)$ in der Form darstellen

$$F(s) = A_1 \sin \frac{\pi s}{l} + A_2 \sin \frac{2 \pi s}{l} + \ldots,$$

worin

$$A_h = \frac{2}{l} \int_0^l F(\sigma) \sin \frac{h \pi \sigma}{l} d \sigma,$$

und wir können die Glieder dieser Reihe einzeln benutzen. Es entspricht dann dem Werte

$$F_h(s) = A_h \sin \frac{h \pi s}{l}$$

für den schließlichen stationären Zustand innerhalb der oben eingeführten Annäherung für α die Lösung

$$I = \frac{S_h'}{W_1} = \frac{A_h}{W_1} \sin \alpha t \sin \frac{h \pi s}{l},$$

oder bei Benutzung des Wertes von A_h und von $W_1 = W / l$

$$I = \frac{2}{W} \sin \alpha t \sin \frac{h \pi s}{l} \int_0^l F(\sigma) \sin \frac{h \pi \sigma}{l} d \sigma. \qquad 269'''')$$

Bedenkt man, daß die Argumente aller dieser Integrale für beliebige h an den Enden des Resonatordrahtes verschwinden, so erkennt man, daß die ebenda stattfindenden Werte von S' ohne Einfluß auf den Vorgang sind. Im Falle der Grundschwingung, die erfahrungsmäßig am stärksten erregt wird, ist $h = 1$; hier wird also die Induktion überwiegend durch die elektrischen Kräfte bedingt, welche in der Nähe der Mitte des Resonatordrahtes wirksam sind.

Um deutlich hervortreten zu lassen, wie verschieden sich hiernach die Wirkung dieses Resonators von dem oben zuerst behandelten ergiebt, genügt es, darauf hinzuweisen, daß der magnetische Strom in den erhaltenen Schlußgleichungen gar nicht vorkommt. Es würde also beispielsweise in dem Falle, daß die elektrische Kraft parallel der X-Axe, die magnetische parallel der Y-Axe schwingt, nach der Formel (251‴) in einem kreisförmigen Resonator, dessen Ebene der XY-Ebene parallel liegt, keine Induktion stattfinden, wohl aber nach der Formel (269⁗); und zwar würde die letztere ein Maximum der Amplitude für I ergeben, wenn die Elemente $s = 0$ und $s = \frac{1}{2} l$ der elektrischen Kraft, d. h. der $\pm X$-Axe parallel liegen, dagegen ein Minimum, nämlich Null, wenn dasselbe für die Elemente $s = \frac{1}{4} l$ und $s = \frac{3}{4} l$ gilt.

Der absolute Wert der Amplitude wird angenähert mit $1/W$ proportional; wegen der großen Schwingungszahl der hier in Betracht kommenden Oscillationen wird aber für W nicht der bei stationären Strömen geltende Wert gesetzt werden dürfen. Eher wird man den durch (258′) gegebenen

$$W = \frac{l}{a_1 v} \sqrt{\frac{\mathfrak{m} \alpha}{2 \pi \mathfrak{l}}}$$

benutzen können, welcher insbesondere auch hervortreten läßt, daß die Magnetisierbarkeit des Leiters auf die Stärke der Erscheinung einwirken muß. —

Bei der Anwendung der Resonatoren zur Untersuchung der von einem Hertz'schen Erreger ausgehenden elektrischen und magnetischen Kräfte hat sich nun gezeigt, daß letztere anscheinend keine bestimmte Periode besitzen, auch nicht als die Superposition von einer Reihe von Schwingungen mit Obertoncharakter aufzufassen sind, sondern vielmehr als eine Summe von unendlich vielen Partialschwingungen mit stetig veränderlicher Periode, aus denen der Resonator die eine herausgreift, die seiner Eigenschwingung synchron ist.[143])

Hierin liegt ein offenbarer Widerspruch mit den Resultaten des § 44, welche für den Erreger nur eine Eigenschwingung, oder höchstens eine diskrete Zahl von solchen zulassen, und es ist erforderlich, den Grund desselben aufzudecken.[144])

Er liegt darin, daß die von dem HERTZ'schen Erreger ausgehenden Schwingungen nach S. 449 nicht rein periodisch sind, sondern zeitlich abnehmende Amplitude besitzen; denn daher läßt sich die ihnen entsprechende Komponente S' auch nicht in der einfachen Form (269''') darstellen.

Um den allgemeinen Fall zu behandeln, ist die wohl begründete Annahme vorteilhaft, daß im Resonator die Grundschwingung besonders stark anspricht; man kann dann in (269) einsetzen

$$I = G \sin \frac{\pi s}{l},$$

und wenn man das Resultat über den ganzen Resonator integriert, so erhält man wegen $\int S' ds = L'$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 G - \frac{W_1}{Q_1}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\pi}{2 l Q_1}\frac{\partial L'}{\partial t},$$

oder bei Einführung von $W = W_1 l$, $Q = Q_1 l$ auch

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{W}{Q}\frac{\partial G}{\partial t} + \left(\frac{\pi v}{l}\right)^2 G = \frac{\pi}{2 Q}\frac{\partial L'}{\partial t}. \qquad 270)$$

I führt im Resonator freie oder Eigenschwingungen aus, wenn L' verschwindet; hier ergiebt sich für G eine Lösung von der Form

$$G = A e^{-\beta t} \sin \alpha (t + t_1), \qquad 270')$$

worin A, α, β, t_1 Konstanten bezeichnen, von denen α und β aus der Differentialgleichung folgen.

Wirkt eine elektromotorische Kraft, die gedämpfte Schwingungen ausführt, so kann man setzen

$$L' = a e^{-\delta t} \sin \gamma t, \qquad 270'')$$

worin a, γ, δ Konstanten sind.

Das allgemeine Integral für G hat dann die Form

$$G = A e^{-\beta t} \sin \alpha (t + t_1) + B e^{-\delta t} \sin \gamma (t + t_2), \qquad 270''')$$

besteht also aus einem Glied mit der Periode von L', d. h. in unserem Falle mit derjenigen des Erregers, und einem mit der Periode der Eigenschwingung des Resonators.

Wenn daher der Resonator nach der Beobachtung wenig abhängig von der Periode des Erregers ist, so muß das zweite Glied neben dem ersten unbedeutend sein; man deutet das am wahrscheinlichsten dahin, daß die Dämpfung der Schwingungen des Er-

regers viel stärker ist, als diejenige der Eigenschwingungen des Resonators, und kann dieses Verhältnis auch direkt plausibel machen. Ist diese Auffassung richtig, so wird also der Resonator immer seine Eigenschwingung geben, und nur deren Intensität wird von der Periode abhängig sein, in welcher der Erreger schwingt. —

Beiläufig mag bemerkt werden, daß, wenn man die hypothetische Grundformel (270) für die Theorie des Resonators benutzt und Hilfsmittel anwendet, um die in ihm stattfindenden Schwingungen ihrer Intensität nach zu beurteilen, mit ihm angestellte Beobachtungen Schlüsse auf die Werte der Amplituden A gestatten. Solche Hilfsmittel giebt ein empfindliches Elektrometer, wenn seine Konduktoren mit den Enden des Resonatordrahtes verbunden sind; man beobachtet dann an ihm den mittleren Wert des Quadrates der Potentialdifferenz der Drahtenden. Die Amplituden A finden sich nach der Theorie auch in dem vorstehenden allgemeineren Falle in naher Annäherung mit dem Widerstand W des Resonators indirekt proportional, und die Messung hat dies insofern bestätigt, als sie gezeigt hat, daß bei gleichen Dimensionen der Resonatoren die an schwach magnetischen Metallen erhaltenen Werte sich nach der Leitfähigkeit ordnen, daß aber die stark magnetischen viel kleinere Werte ergeben, als nach ihren elektrischen Leitfähigkeiten allein zu erwarten. In der That ist nach dem S. 462 Gesagten W mit $\sqrt{l}$ indirekt und mit $\sqrt{m}$ direkt proportional.

Es ist indessen hervorzuheben, daß die letzte Beziehung in quantitativer Hinsicht sich keineswegs erfüllt findet, daß vielmehr der Einfluß der Magnetisierbarkeit in Wirklichkeit ein viel geringerer ist, als er nach der Theorie sein sollte.

Wir werden hieraus schließen, daß die aus Gleichgewichtsphänomenen abgeleiteten magnetischen Permeabilitäten, die auch bei Veränderungen von gewisser Langsamkeit die Vorgänge richtig darstellen, bei solchen von der Änderungsgeschwindigkeit der Hertzschen Wellen ihre Brauchbarkeit verlieren. Die magnetischen Permeabilitäten sind sonach keine Konstanten, sondern besitzen neben anderen komplizierten Abhängigkeiten, auf die früher eingegangen worden ist, auch noch eine, und zwar sehr beträchtliche, von der Geschwindigkeit, mit der sich die wirkende magnetische Kraft ändert. Es erhellt hieraus, daß unsere allgemeinen Ausgangsformeln (248) und (248') trotz ihrer großen Allgemeinheit nur erste Annäherungen sind und eine Anwendung mit konstant gehaltenen Parametern nur innerhalb kleiner Bereiche gestatten. Dieser ihr Charakter wird sich weiterhin noch nach anderer Richtung hin geltend machen. —

Die im Vorstehenden besprochenen Arten von Resonatoren sind keineswegs die einzigen, welche zur Anwendung gebracht worden sind, sie bieten aber vor anderen den Vorteil einer einigermaßen sicheren theoretischen Behandlung. Im übrigen kann jeder Konduktor, der mit Hilfsmitteln ausgerüstet ist, die in ihm induzierten Ströme zu beobachten, als Resonator dienen. Jene Beobachtungen können an verschiedene Wirkungen des elektrischen Stromes anknüpfen, doch haben sich die thermischen — von denen oben eine spezielle, nämlich die Funkenbildung, als benutzt vorausgesetzt ist — im allgemeinen am vorteilhaftesten erwiesen.

Wir knüpfen hieran noch eine allgemeine Bemerkung. Elektrische Schwingungen in einem Leiter sind nach S. 424, ungleich den in Nichtleitern stattfindenden, jederzeit mit einem Verlust von elektromagnetischer Energie verbunden, und bei homogenen Leitern erster Klasse ist eben jene erzeugte Wärme die Form, in welcher der verlorene Betrag fortbesteht. Da die in einem Leiter induzierten Ströme je nach der Periode der induzierenden Schwingungen verschiedene Intensität besitzen, und da besonders diejenigen an Stärke hervorragen, deren Periode mit derjenigen der Eigenschwingungen des Leiters übereinstimmt, so wird auch der Leiter von deren Energie den relativ größten Betrag aufnehmen und umwandeln. Wenn man also elektromagnetische Wellen von verschiedener Periode durch einen Raum hindurchgehen läßt, der eine große Zahl gleicher Konduktoren, etwa in gleichmäßiger Verteilung, enthält, so werden dabei die verschiedenen Bestandteile der Welle in sehr verschiedener Weise geschwächt werden, am stärksten aber der Anteil, dessen Periode mit derjenigen der Eigenschwingungen der Leiter übereinstimmt. Der Vorgang erinnert sonach sehr an den in der Optik unter dem Namen der auswählenden Absorption bekannten.

Es ist übrigens hervorzuheben, daß in einem körperlichen Leiter Schwingungen mit ganz verschiedenartiger Gestalt der Stromkurven möglich sind, und daß daher bei verschiedener Natur der induzierenden Wellen auch Bestandteile verschiedener Periode absorbiert werden müssen.

§ 46. Fortpflanzung ebener Wellen elektromagnetischer Schwingungen in Dielektrica und Leitern; ihre Reflexion und Brechung an der ebenen Grenze zweier isotroper Körper.

Nach den Resultaten des § 44 bietet der Hertz'sche Erreger ein Mittel zur Erzeugung von Reihen periodischer elektromagnetischer Schwingungen mit abnehmender Amplitude, die in großer

Entfernung sich in ebenen Wellen fortpflanzen. Da ferner die Beobachtungen mit Hilfe des Resonators, wenn auch keine sicheren quantitativen Bestimmungen über die Intensitäten, so doch jedenfalls Aufschlüsse über die Richtung der elektrischen und der magnetischen Schwingungen liefern, sowie die Lage von solchen Gebieten festzustellen gestatten, wo die eine oder die andere Kraft verschwindet, so besitzt die Untersuchung der Gesetze der Fortpflanzung ebener Wellen außer dem theoretischen auch ein großes praktisches Interesse.

Wir wollen zunächst ein unbegrenztes krystallinisches Medium voraussetzen und in demselben eine Schwingung sich fortpflanzen lassen, die in einer Ebene — der sogenannten Wellenebene — konstante Phase, in einer anderen konstante Amplitude besitzt. Solche Wellen mögen kurz als inhomogene, in dem Spezialfall, daß die beiden genannten Ebenen zusammenfallen, aber als homogene ebene Wellen bezeichnet werden.

Eine inhomogene ebene Welle ist nach Bd. I, S. 477 dadurch gegeben, daß man für X, Y, Z, A, B, C den reellen oder den imaginären Teil eines Ausdruckes von der Form

$$\mathfrak{P} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t-\frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}$$

wählt, in dem τ, ω reelle und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{r}$ komplexe Größen bezeichnen, und speziell ist

$$271)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = P + iP', & \mathfrak{r} = r - i\varkappa r', \\ r = \alpha x + \beta y + \gamma z, & r' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ 1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, & 1 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2; \end{cases}$$

α, β, γ resp. α', β', γ' sind hierbei die Richtungscosinus der Normalen r resp. r' auf der Ebene konstanter Phase resp. konstanter Amplitude, ω bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, $\varkappa$ mißt die Veränderlichkeit ihrer Amplitude längs r'.

Für viele Zwecke empfiehlt es sich, abzukürzen

$$271')\qquad \alpha - i\varkappa\alpha' = \mathfrak{a}, \quad \beta - i\varkappa\beta' = \mathfrak{b}, \quad \gamma - i\varkappa\gamma' = \mathfrak{c},$$

wobei natürlich die $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit den magnetischen Stromkomponenten auf S. 422 nichts gemein haben.

Da alle Bedingungen in $X, \ldots C$ lineär sind, so kann man auch durchaus mit den komplexen Ausdrücken rechnen und in den Formeln erst am Schluß die Sonderung des reellen und des imaginären vornehmen. Formeln, die durch Aussonderung der komplexen Exponentialgröße aus den gegebenen Bedingungen erhalten werden, liefern dabei aber sowohl in ihrem reellen, als in ihrem imaginären Teil zu benutzende Beziehungen.

Dieses Verfahren hört auf anwendbar zu sein, wenn es sich um die Untersuchung der bei dem Vorgang vorhandenen Energie und deren Strömung handelt, denn diese Größen hängen von Funktionen zweiten Grades in den Komponenten $X, \ldots C$ ab.

Was die allgemeinen Eigenschaften einer Schwingung angeht, deren Komponenten, wie hier, durch dieselbe Exponentialgröße mit verschiedenen komplexen konstanten Koeffizienten gegeben sind, sodaß also resp.

$$X : Y : Z \text{ und } A : B : C$$

konstante Verhältnisse bilden, so genügt es hier, daran zu erinnern, daß, wenn diese Verhältnisse reell sind, die Komponenten gleiche Phasen besitzen und somit eine geradlinige Schwingung ergeben, daß dagegen, wenn die Verhältnisse komplex sind, die Phasen sich unterscheiden, und die Komponenten sich zu einer elliptischen Schwingung zusammensetzen. Zu genauerer Untersuchung der letzteren Schwingungsart liegt im Gebiete des eigentlichen Elektromagnetismus wenig Veranlassung vor. —

Beschränken wir uns zunächst auf homogene krystallinische Dielektrica und bezeichnen die Differentialquotienten nach der Zeit mit oberen Indices, so ergiebt sich aus (248) und (248′) wegen

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -X' \frac{\mathfrak{b}}{\omega}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = -X' \frac{\mathfrak{c}}{\omega} \text{ u. s. f.}$$

bei Benutzung der komplexen Lösungen das System Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{\omega}(Y'\mathfrak{c} - Z'\mathfrak{b}) &= -\mathfrak{A}', & \frac{v}{\omega}(C'\mathfrak{b} - B'\mathfrak{c}) &= -\mathfrak{X}', \\ \frac{v}{\omega}(Z'\mathfrak{a} - X'\mathfrak{c}) &= -\mathfrak{B}', & \frac{v}{\omega}(A'\mathfrak{c} - C'\mathfrak{a}) &= -\mathfrak{Y}', \\ \frac{v}{\omega}(X'\mathfrak{b} - Y'\mathfrak{a}) &= -\mathfrak{C}', & \frac{v}{\omega}(B'\mathfrak{a} - A'\mathfrak{b}) &= -\mathfrak{Z}'. \end{aligned}\right\} \quad 271'')$$

Aus ihm folgt eine Reihe einfacher Sätze über die Schwingung von R und K resp. von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}$. Es gilt nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}'\mathfrak{a} + \mathfrak{B}'\mathfrak{b} + \mathfrak{C}'\mathfrak{c} &= 0, & \mathfrak{X}'\mathfrak{a} + \mathfrak{Y}'\mathfrak{b} + \mathfrak{Z}'\mathfrak{c} &= 0, \\ \mathfrak{A}'X' + \mathfrak{B}'Y' + \mathfrak{C}'Z' &= 0, & \mathfrak{X}'A' + \mathfrak{Y}'B' + \mathfrak{Z}'C' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad 271''')$$

und gleiche Formeln gelten bei periodischen Schwingungen auch für die X, Y, Z, A, B, C selbst. Wenn man also $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als den komplexen Richtungscosinus von $\mathfrak{r}$ proportional ansieht und analog die Komponenten der komplexen Kräfte und Polarisationen deutet, so zeigen diese Formeln, daß $\mathfrak{R}$ normal zu $\mathfrak{r}$ und K, $\mathfrak{K}$ normal zu $\mathfrak{r}$ und R steht.

Ist der betrachtete Körper isotrop, so fallen aus den Formeln (271''') die elektrischen und die magnetischen Permeabilitäten $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{m}$ ganz heraus; die Gleichungen reduzieren sich auf

$$271'''') \quad \begin{cases} A'\mathfrak{a} + B'\mathfrak{b} + C'\mathfrak{c} = 0, \quad X'\mathfrak{a} + Y'\mathfrak{b} + Z'\mathfrak{c} = 0, \\ A'X' + B'Y' + C'Z' = 0, \end{cases}$$

welche zeigen, daß hier R, K und $\mathfrak{r}$ ein orthogonales System von Vektoren bilden. —

Sind die fortgepflanzten ebenen Wellen homogen, ist also $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, und daher $\mathfrak{a} = \alpha(1 - i\varkappa)$, $\mathfrak{b} = \beta(1 - i\varkappa)$, $\mathfrak{c} = \gamma(1 - i\varkappa)$, so muß auch $\varkappa$ verschwinden, denn eine Abnahme der Amplituden in der Richtung der Fortpflanzung der Schwingung würde eine Abnahme der fortgepflanzten elektromagnetischen Energie bedeuten, und eine solche ist nach den allgemeinen Resultaten von S. 424 u. f. in einem Dielektricum ausgeschlossen. In der That ergiebt der Poynting'sche Satz, auf einen zu der Wellenebene normalen Cylinder angewandt, daß in die eine Grundfläche dasselbe Quantum Energie ein-, wie durch die andere ausströmen muß, da die Gesamtmenge der durch die Mantelfläche eintretenden Energie durch die vorausgesetzte Annahme von selbst gleich Null wird.

Sind aber $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reell, nämlich gleich α, β, γ, so muß sowohl der reelle, wie der imaginäre Teil von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ und von $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ für sich den ersten Gleichungen (271''') genügen, d. h., es müssen die Schwingungen sowohl der magnetischen, als der elektrischen Polarisationen normal zur Wellennormale, also transversal stattfinden.

Ist das Medium krystallinisch, und denken wir in den Formeln (271'') die Komponenten der Kräfte gemäß den Beziehungen

$$X = \mathfrak{e}_{11}\mathfrak{X} + \mathfrak{e}_{12}\mathfrak{Y} + \mathfrak{e}_{13}\mathfrak{Z}, \quad A = \mathfrak{n}_{11}\mathfrak{A} + \mathfrak{n}_{12}\mathfrak{B} + \mathfrak{n}_{13}\mathfrak{C},$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

durch diejenigen der Polarisationen ausgedrückt, so ergeben sie wegen der Reellität der Konstanten $\mathfrak{e}_{hk}$ und $\mathfrak{n}_{hk}$, daß reellen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auch ein reelles Verhältnis $\mathfrak{A}':\mathfrak{B}':\mathfrak{C}':\mathfrak{X}':\mathfrak{Y}':\mathfrak{Z}'$ entsprechen muß.

In diesem Falle schwingen also sowohl die elektrischen, wie die magnetischen Polarisationen geradlinig, und gleiches gilt ersichtlich von den elektrischen und den magnetischen Kräften, da man die Formeln (271'') auch durchaus in deren Komponenten ausdrücken kann. Dagegen schwingen die Kräfte nicht transversal, die Normale auf der durch ihre Richtungen gelegten Ebene weicht vielmehr von der Wellennormale ab; sie fällt aber zusammen mit der S. 425 definierten Richtung des Energieflusses $\mathfrak{f}$. Es findet demnach durch

ein jedes mit jener Normalen paralleles Flächenelement ein Energie fluß nicht statt, und man darf vermuten, daß die Schwingung sich durch eine beliebige cylindrische Fläche begrenzen läßt, wenn deren Axe mit der Richtung $\mathfrak{s}$ parallel ist.

Bei isotropen Medien fallen die Kräfte mit den Polarisationen zusammen, und ihre Schwingungen finden rein transversal statt.[145] —

Aus (271″) ergiebt sich das allgemeine Gesetz für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit ω von der Konstante $\varkappa$ der Amplituden und von der Richtung der Normalen r, indem man für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ihre Werte in den X, Y, Z, A, B, C einsetzt und dann letztere Größen aus dem System eliminiert. Das Resultat wird im allgemeinen sehr kompliziert und bleibt selbst dann unübersichtlich, wenn die Amplituden in der Wellenebene konstant, also $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ reell sind, wodurch $\varkappa$ verschwindet, und nur eine Bedingung für ω übrig bleibt. Diese ist in Bezug auf ω^2 quadratisch, ergiebt also für jede Richtung zwei positive und zwei negative Werte ω; Krystalle müssen also nach der Theorie gegenüber ebenen elektromagnetischen Wellen die Erscheinung der Doppelbrechung zeigen, wie dies neueste Beobachtungen am Schwefel auch bestätigt haben.[146]

Etwas einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn man sich auf Krystalle beschränkt, bei denen nach Symmetrie die Hauptaxen der elektrischen und der magnetischen Permeabilität zusammenfallen.

Wählt man diese Symmetrieaxen zu Koordinatenaxen, so nehmen nach (52″) und (131) die Polarisationen die speziellen Gestalten an

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{X}=\mathfrak{d}_1 X, \quad \mathfrak{Y}=\mathfrak{d}_2 Y, \quad \mathfrak{Z}=\mathfrak{d}_3 Z,\\ \mathfrak{A}=\mathfrak{m}_1 A, \quad \mathfrak{B}=\mathfrak{m}_2 B, \quad \mathfrak{C}=\mathfrak{m}_3 C,\end{array}\right\} \tag{272}$$

und bei Verbindung dieser Werte mit (271″) findet man nach einigen Reduktionen

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\omega}{v}\right)^4-\left(\frac{\omega}{v}\right)^2\left[\alpha^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_2\mathfrak{m}_3}+\frac{1}{\mathfrak{d}_3\mathfrak{m}_2}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_3\mathfrak{m}_1}+\frac{1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_3}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_2}+\frac{1}{\mathfrak{d}_2\mathfrak{m}_1}\right)\right]\\ \quad+\left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3}+\frac{\beta^2}{\mathfrak{d}_3\mathfrak{d}_1}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{m}_2\mathfrak{m}_3}+\frac{\beta^2}{\mathfrak{m}_3\mathfrak{m}_1}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}\right)=0.\end{array}\right\} \tag{272'}$$

Angewandt auf eine der Symmetrieebenen zerfällt die Gleichung in zwei Faktoren. So folgt z. B. für die YZ-Ebene, indem man $\alpha=0$ setzt,

$$\left(\frac{\omega_1}{v}\right)^2=\frac{\beta^2}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_3}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{d}_1\mathfrak{m}_2}, \quad \left(\frac{\omega_2}{v}\right)^2=\frac{\beta^2}{\mathfrak{d}_3\mathfrak{m}_1}+\frac{\gamma^2}{\mathfrak{d}_2\mathfrak{m}_1};$$

ähnliches ergiebt sich für die übrigen. Trägt man also ω als Vektor auf, so giebt die Gleichung (272′) eine Oberfläche achten Grades, die jede Symmetrieebene in zwei Ovalen schneidet. Diese sechs

Ovale haben nur sechs verschiedene Axen, welche die Geschwindigkeiten ω in den Richtungen der Symmetrieaxen X, Y, Z darstellen; es findet statt

$$\text{parallel der } X\text{-Axe } \omega_1^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{m}_3}, \quad \omega_2^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_3 \mathfrak{m}_2},$$

$$\text{„ „ } Y\text{-Axe } \omega_1^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_3 \mathfrak{m}_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{m}_3},$$

$$\text{„ „ } Z\text{-Axe } \omega_1^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{m}_2}, \quad \omega_2^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{m}_1}.$$

In mindestens einer der Symmetrieebenen schneiden sich die Schnittkurven der durch (272′) gegebenen Oberfläche; die Vektoren nach diesen Punkten hin geben Richtungen an, in welchen die beiden sonst verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der ebenen Wellen einander gleich werden.

Noch einfachere Resultate erhält man, wenn man die Thatsache benutzt, daß bei allen Dielektrica die Konstanten $\mathfrak{m}_{hh}$ äußerst nahe gleich Eins, die $\mathfrak{m}_{hk}$ nahe gleich Null sind. Dann kann man, welches auch die krystallinische Symmetrie des Krystalles sei, den Vorgang auf das System der Hauptdielektricitätsaxen beziehen, also die Formel (272′) unter der Voraussetzung benutzen, daß

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_3 = 1$$

ist. Dann nimmt sie die Form an

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^4 - \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \left(\alpha^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_2} + \frac{1}{\mathfrak{d}_3}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_3} + \frac{1}{\mathfrak{d}_1}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{\mathfrak{d}_1} + \frac{1}{\mathfrak{d}_2}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_3} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{d}_3 \mathfrak{d}_1} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2}\right) = 0,$$

die sich auch schreiben läßt

272″) $$\frac{\alpha^2}{\omega^2 - \frac{v^2}{\mathfrak{d}_1}} + \frac{\beta^2}{\omega^2 - \frac{v^2}{\mathfrak{d}_2}} + \frac{\gamma^2}{\omega^2 - \frac{v^2}{\mathfrak{d}_3}} = 0;$$

sie giebt also eine Oberfläche sechsten Grades, welche die Symmetrieebenen je in einem Kreis und einem Oval schneidet. —

Wir betrachten weiterhin zunächst den Fall eines isotropen Körpers, wo sich aus (272′)

272‴) $$\omega^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{m}},$$

und bei unmerklicher Magnetisierbarkeit aus (272″)

272⁗) $$\omega^2 = \frac{v^2}{\mathfrak{d}}$$

ergiebt.

Im leeren Raum ist $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{m}$ streng gleich Eins, also ω gleich v; dort pflanzen sich daher nach der Theorie elektromagnetische Schwingungen mit Lichtgeschwindigkeit fort, und nahe dasselbe gilt für den Luftraum. Die Beobachtungen nach später zu besprechenden Methoden haben dies Resultat bestätigt, und die erhaltene Übereinstimmung giebt eine der wichtigsten Stützen für die schon früher erwähnte Auffassung, daß die Erscheinungen des Lichtes, wie die verwandten der strahlenden Wärme, selbst auf elektromagnetischen Schwingungen beruhen.

In isotropen Dielektrica hat sich der nach dieser Anschauung aus (272'''') folgende theoretische Wert für die Lichtgeschwindigkeit zumeist nur angenähert, mitunter gar nicht durch die Beobachtung bestätigt. Man sucht den Grund für die stattfindenden Abweichungen in dem Umstand, daß, abweichend vom leeren Raume, in ponderabeln Körpern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes stark mit der Periode seiner Schwingungen, die, wie wir später zeigen werden, für die Farbe maßgebend ist, variiert; da nun die genauesten Methoden zur Bestimmung der Dielektricitätskonstanten an Gleichgewichtsphänomene oder aber an Schwingungen von relativ großer Periode anknüpfen, die Perioden der Licht- und Wärmeschwingungen aber äußerst klein sind, so bietet allerdings die Nichtübereinstimmung kein Argument gegen die erwähnte Theorie. —

Die für krystallinische Dielektrica in (272'') aufgestellte Beziehung stimmt formal mit dem von Fresnel für die Fortpflanzung ebener Lichtwellen in Krystallen auf ganz anderer Grundlage abgeleiteten und durch die Beobachtung mit einfarbigem Lichte in weitestem Umfang bestätigten Gesetz überein. Was die Zahlwerte seiner Parameter $v^2/\mathfrak{d}_1$, $v^2/\mathfrak{d}_2$, $v^2/\mathfrak{d}_3$ angeht, so haben sie sich für Schwefel im Falle von Lichtwellen mit den aus elektrostatischen Bestimmungen der $\mathfrak{d}_h$ folgenden sehr nahe übereinstimmend gefunden[147]); auch die aus Beobachtungen über die Fortpflanzung gewöhnlicher elektromagnetischer Wellen erschlossenen Resultate erscheinen damit vereinbar, was um so mehr auffällt, als keineswegs bei dieser Substanz, abweichend von anderen, die Lichtgeschwindigkeit in weitesten Grenzen von der Periode unabhängig ist.

Es muß übrigens hervorgehoben werden, daß eben jener zur Erklärung der Abweichung zwischen den durch die optischen Beobachtungen festgestellten und den durch (272'''') gegebenen Werten von ω herangezogene Umstand auch beweist, daß die Grundformeln (248) und (248') zu einer genügenden elektromagnetischen Theorie des Lichtes für Dielektrica nicht ausreichen. Sie ergeben nämlich,

wie die Gleichungen (272) bis (272'''') zeigen, für die Schwingungen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die von deren Periode unabhängig sind, und bedürfen daher für die Zwecke der Optik einer Erweiterung, die durch rein elektromagnetische Hilfsmittel nicht zu gewinnen ist, sondern nur durch neue Hypothesen, die der Prüfung durch die Beobachtung bedürfen. Wir werden auf diese Punkte im nächsten Teil ausführlicher eingehen, wo auch die Verwertung der Gleichung (272'') für optische Zwecke stattfinden wird. —

Entnimmt man der Formel (272') einen der Werte von ω, die einer bestimmten Richtung der Wellennormalen entsprechen, und setzt ihn in die Gleichungen (271'') ein, die nach den gemachten Annahmen die Form

$$\frac{v}{\omega}(Y'\gamma - Z'\beta) = -\mathfrak{m}_1 A', \quad \frac{v}{\omega}(C'\beta - B'\gamma) = -\mathfrak{d}_1 X',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

besitzen, so kann man aus ihnen die jetzt reellen Verhältnisse $X:Y:Z$ und $A:B:C$ und somit die Richtung der geradlinigen Schwingungen bestimmen, die sich in der durch α, β, γ vorgeschriebenen Richtung mit der Geschwindigkeit ω fortpflanzen.

In dem Falle eines isotropen Mediums wird diese Richtung unbestimmt; hier kann also die elektrische, wie die magnetische Schwingung in der Wellenebene jede beliebige Richtung besitzen. —

Auf einen krystallinischen Leiter lassen sich einige der oben angegebenen Resultate sehr leicht übertragen. Da nämlich auf den rechten Seiten der Gleichungen (248') jederzeit Kombinationen von der Form

$$\mathfrak{d}_{hk}\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}_{hk}X$$

auftreten, und da bei Benutzung des Ansatzes (271)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\tau}X$$

ist, so lassen sich hier diese Kombinationen in

$$(\mathfrak{d}_{hk} - 2i\tau\,\mathfrak{l}_{hk})\frac{\partial X}{\partial t}$$

zusammenziehen; führt man also an Stelle der früheren elektrischen Polarisationen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit reellen Konstanten nunmehr solche $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ mit komplexen ein, indem man z. B.

273) $$(\mathfrak{X}) = (\mathfrak{d}_{11} - 2i\tau\,\mathfrak{l}_{11})X + (\mathfrak{d}_{12} - 2i\tau\,\mathfrak{l}_{12})Y + (\mathfrak{d}_{13} - 2i\tau\,\mathfrak{l}_{13})Z,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt, so werden die Gleichungen für Leiter denen für Dielektrica durchaus konform. Man kann demnach auch durch Einführung von Integralen der auf S. 466 angegebenen komplexen Form den Gleichungen (271″) und (271‴) entsprechende bilden, welche lauten werden

$$\frac{v}{\omega}(Y'\mathfrak{c} - Z'\mathfrak{b}) = -\mathfrak{A}', \quad \frac{v}{\omega}(C'\mathfrak{b} - B'\mathfrak{c}) = -(\mathfrak{X})', \qquad 273')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}'\mathfrak{a} + \mathfrak{B}'\mathfrak{b} + \mathfrak{C}'\mathfrak{c} = 0, \quad (\mathfrak{X})'\mathfrak{a} + (\mathfrak{Y})'\mathfrak{b} + (\mathfrak{Z})'\mathfrak{c} = 0, \\ \mathfrak{A}'X' + \mathfrak{B}'Y' + \mathfrak{C}'Z' = 0, \quad (\mathfrak{X})'A' + (\mathfrak{Y})'B' + (\mathfrak{Z})'C' = 0. \end{array}\right\} \qquad 273'')$$

Beschränken wir uns wiederum auf den Fall, daß die Ebenen konstanter Phase und konstanter Amplitude zusammenfallen, also die ebenen Wellen homogen sind, so ist doch der Fall reeller $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, also verschwindender $\varkappa$ hier ausgeschlossen, weil die $(\mathfrak{X}), (\mathfrak{Y}), (\mathfrak{Z})$ stets komplex sind. Wir erhalten eine der früheren analoge Formelreihe, wenn wir in Rücksicht darauf, daß aus $\mathfrak{a} = \alpha(1 - i\varkappa)$, $\mathfrak{b} = \beta(1 - i\varkappa)$, $\mathfrak{c} = \gamma(1 - i\varkappa)$ folgt $\mathfrak{r} = r(1 - i\varkappa)$, der partikulären Lösung von S. 466 die Form geben

$$\mathfrak{P}\, e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{r}{\mathfrak{o}}\right)},$$

worin nun

$$\mathfrak{o} = \frac{\omega}{1 - i\varkappa}$$

ist, ω, wie früher, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene bedeutet, und $\varkappa$, der hier sogenannte Absorptionsindex, die Schwächung der Amplituden längs r mißt. Dann nehmen die Gleichungen (273′) die Gestalt an

$$\frac{v}{\mathfrak{o}}(Y'\gamma - Z'\beta) = -\mathfrak{A}', \quad \frac{v}{\mathfrak{o}}(C'\beta - B'\gamma) = -(\mathfrak{X})', \qquad 273''')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

welche dieselbe Verwertung gestatten, wie früher. Die Sätze (273″) bleiben bei Vertauschung von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit α, β, γ in Gültigkeit und sprechen Eigenschaften der hier immer elliptischen Schwingungen aus.

Durch Elimination von X, Y, Z, A, B, C folgt aus (273‴) eine biquadratische Gleichung für $\mathfrak{o}$; es pflanzen sich somit in jeder Richtung zwei ebene Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ω und mit verschiedenen Absorptionsindices $\varkappa$ fort.

In dem speziellen Falle, daß wegen der krystallographischen Symmetrie des Mediums die Hauptaxen der elektrischen und der magnetischen Permeabilitäten zusammenfallen, müssen sie auch zugleich diejenigen der elektrischen Leitfähigkeit bilden, und die oben

eingeführten komplexen Polarisationen $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$, $(\mathfrak{Z})$ nehmen, bezogen auf jenes Symmetrieaxensystem, die spezielle Gestalt an

274) $$\begin{cases} (\mathfrak{X}) = (\mathfrak{d}_1 - 2 i \tau \mathfrak{l}_1) X = \mathfrak{D}_1 X, \quad (\mathfrak{Y}) = (\mathfrak{d}_2 - 2 i \tau \mathfrak{l}_2) Y = \mathfrak{D}_2 Y, \\ (\mathfrak{Z}) = (\mathfrak{d}_3 - 2 i \tau \mathfrak{l}_3) Z = \mathfrak{D}_3 Z, \end{cases}$$

worin $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_3$ Abkürzungen sind.

Der Gleichung (272′) entspricht jetzt die Formel

274′) $$\begin{cases} \left(\frac{\mathfrak{o}}{v}\right)^4 - \left(\frac{\mathfrak{o}}{v}\right)^2 \left[\alpha^2\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{1}{\mathfrak{D}_3 \mathfrak{m}_2}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{1}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{m}_3}\right) + \gamma^2\left(\frac{1}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{m}_2} + \frac{1}{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{m}_1}\right)\right] \\ \quad + \left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_1} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{m}_2 \mathfrak{m}_3} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{m}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}\right) = 0, \end{cases}$$

die für die Symmetrieebenen und Symmetrieaxen analoge Folgerungen gestattet, wie sie S. 469 gezogen sind.

Für die YZ-Ebene wird z. B.

$$\left(\frac{\mathfrak{o}_1}{v}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{m}_3} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{m}_2}, \quad \left(\frac{\mathfrak{o}_2}{v}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\mathfrak{D}_3 \mathfrak{m}_1} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{D}_2 \mathfrak{m}_1},$$

und wegen

$$\mathfrak{o}^2 = \frac{\omega^2}{(1 - i\varkappa)^2} = \frac{\omega^2 (1 - \varkappa^2 + 2 i \varkappa)}{(1 + \varkappa^2)^2}, \quad \frac{1}{\mathfrak{D}_h} = \frac{1}{\mathfrak{d}_h - 2 i \tau \mathfrak{l}_h} = \frac{\mathfrak{d}_h + 2 i \tau \mathfrak{l}_h}{\mathfrak{d}_h^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_h^2}$$

bei Sonderung des Reellen und des Imaginären

274″) $$\begin{cases} \frac{\omega_1^2 (1 - \varkappa_1^2)}{v^2 (1 + \varkappa_1^2)^2} = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_1^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_1^2} \left(\frac{\beta^2}{\mathfrak{m}_3} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{m}_2}\right), \\ \frac{\omega_1^2 \varkappa_1}{v^2 (1 + \varkappa_1^2)^2} = \frac{\tau \mathfrak{l}_1}{\mathfrak{d}_1^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_1^2} \left(\frac{\beta^2}{\mathfrak{m}_3} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{m}_2}\right), \\ \frac{\omega_2^2 (1 - \varkappa_2^2)}{v^2 (1 + \varkappa_2^2)^2} = \frac{1}{\mathfrak{m}_1} \left(\frac{\beta^2 \mathfrak{d}_3}{\mathfrak{d}_3^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_3^2} + \frac{\gamma^2 \mathfrak{d}_2}{\mathfrak{d}_2^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_2^2}\right), \\ \frac{\omega_2^2 \varkappa_2}{v^2 (1 + \varkappa_2^2)^2} = \frac{1}{\mathfrak{m}_1} \left(\frac{\beta^2 \tau \mathfrak{l}_3}{\mathfrak{d}_3^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_3^2} + \frac{\gamma^2 \tau \mathfrak{l}_2}{\mathfrak{d}_2^2 + 4 \tau^2 \mathfrak{l}_2^2}\right). \end{cases}$$

Auch die Spezialisierung dieser Resultate auf den Fall, daß die magnetischen Permeabilitäten $\mathfrak{m}_h$ nur unmerklich von Eins verschieden sind, ist, wie S. 470 im Fall der Dielektrica, leicht durchführbar.

Für isotrope Körper ergiebt die Übertragung von (272‴)

$$\frac{v^2}{\mathfrak{o}^2} = \mathfrak{D} \mathfrak{m},$$

worin $\mathfrak{D} = \mathfrak{d} - 2 i \tau \mathfrak{l}$ ist, also

274‴) $$\frac{v^2 (1 - \varkappa^2)}{\omega^2} = \mathfrak{d} \mathfrak{m}, \quad \frac{\varkappa v^2}{\omega^2} = \tau \mathfrak{l} \mathfrak{m}. —$$

Die im Vorstehenden für Leiter gefundenen Resultate zeigen,

daß in diesen Körpern die Fortpflanzung der elektromagnetischen Schwingungen mit Dämpfung oder Absorption verbunden ist. Der Absorptionsindex $\varkappa$ — und ebenso die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω — werden hier von der Periode τ abhängig, und im Falle eines isotropen Leiters nimmt diese Abhängigkeit eine verhältnismäßig einfache Gestalt an; bei schwacher Absorption wird $\varkappa$ mit τ proportional, ω aber konstant.

Sucht man nach korrespondierenden Vorgängen aus dem Gebiete der Optik, so fällt zunächst auf, daß in der That die besten Leiter, d. h. die Metalle, das Licht in hohem Grade, und zwar in einer von der Farbe nicht sehr stark abhängigen Weise absorbieren. Hierin wird man eine weitere Stütze der elektromagnetischen Lichttheorie finden.

Was die Vergleichung der aus den elektrischen und den magnetischen Konstanten berechneten und der aus der Beobachtung folgenden Werte von ω und $\varkappa$ betrifft, so wird dieselbe bisher dadurch erschwert, daß man Methoden zur Bestimmung der Dielektricitätskonstanten $\mathfrak{d}$ für gute Leiter noch nicht besitzt. Immerhin zeigt schon die erste Gleichung (274‴) allein, daß durch einfache Übertragung der obigen Theorie elektromagnetischer Schwingungen eine genügende Erklärung der optischen Vorgänge in Metallen nicht erhalten wird. Denn durch Beobachtungen, auf die wir im folgenden Teil eingehen werden, ist völlig sichergestellt, daß für viele Metalle $\varkappa > 1$ ist; hieraus würde sich aber $\mathfrak{d}\,\mathfrak{m} < 0$ ergeben, und dies widerspricht derartig allen Erfahrungen an Körpern, die eine Bestimmung dieses Produktes gestatten, und scheint auch prinzipiell bedenklich, daß man ein solches Resultat nicht stillschweigend hinnehmen kann.

Die zweite Formel (274‴) gestattet eine Berechnung des Aggregates $\varkappa v^2/\tau\omega^2$ aus elektrischen und magnetischen Daten, da $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ für Metalle relativ leicht und sicher bestimmbar sind; aber sie führt zu keiner Übereinstimmung der berechneten mit den aus optischen Beobachtungen folgenden Werten; die ersteren ergeben sich vielmehr schon bei den schwach-, und noch mehr bei den starkmagnetisierbaren Metallen viel — bis zu mehrere tausend Mal — größer, als die letzteren.

Beide Resultate drängen dahin, die obigen Grundformeln (248) und (248′), wie für Dielektrica, so auch für Leiter durch Zusatzglieder zu erweitern; diese Ergänzungen, die notwendigerweise mehr in Rücksicht auf die Übereinstimmung der Resultate mit der Beobachtung, als auf den nahen Zusammenhang mit den Grundsätzen des Elektromagnetismus vorgenommen werden müssen, fallen

aber außerhalb des hier verfolgten Ganges. Die bezüglichen vervollständigten Differentialgleichungen werden uns im folgenden Teil beschäftigen.

Nur eine hierher gehörige Bemerkung wollen wir noch anschließen. Schon am Schluß des vorigen Paragraphen ist darauf aufmerksam gemacht worden, daß die Beobachtungen über elektromagnetische Schwingungen in magnetisierbaren Leitern mit der Theorie nur dann in Übereinstimmung kommen, wenn man annimmt, daß die Magnetisierbarkeit mit wachsender Schwingungszahl abnimmt. Bei Lichtschwingungen scheint sie nahe vollständig verschwunden zu sein, denn trotz seiner ungeheuer großen Konstante $\mathfrak{m}$ fällt Eisen bezüglich seines optischen Verhaltens durchaus nicht aus der Reihe der übrigen Metalle heraus.[148])

Dies Verhalten wird begreiflich durch die Deutung der magnetischen Erscheinungen, die S. 354 erörtert ist. Beruhen dieselben in der That auf Konvektionsströmen, so muß wegen der Trägheit der bewegten ponderabeln Massen der influenzierte Magnetismus, der auf einer Orientierung der im unmagnetischen Körper ordnungslosen Molekularströme beruht, sich um so unvollkommener ausbilden, je kleiner die Periode der erregenden Schwingungen ist. —

Wenn, was bisher ausdrücklich ausgeschlossen war, die Amplituden in der Wellenebene variieren, die Wellen also inhomogen sind, so treten wesentlich kompliziertere Gesetze auf; insbesondere ergeben sich ω und $\varkappa$ von dem Verhalten der Amplituden abhängig. Wir wollen einen hierher gehörigen, für Anwendungen wichtigen Fall untersuchen, dabei aber speziell ein isotropes Medium voraussetzen.

Es stehe sowohl die Ebene konstanter Phase, wie diejenige konstanter Amplitude, normal zur XZ-Ebene, es liege somit sowohl r, als r', in derselben und es sei demgemäß $\mathfrak{b} = 0$. Dann nehmen die Hauptgleichungen (273′) die Gestalt an

$$275) \quad \begin{cases} v Y'\mathfrak{c} = -\mathfrak{m}\omega A', \; v(Z'\mathfrak{a} - X'\mathfrak{c}) = -\mathfrak{m}\omega B', \; v Y'\mathfrak{a} = +\mathfrak{m}\omega C', \\ v B'\mathfrak{c} = +\mathfrak{D}\omega X', \; v(C'\mathfrak{a} - A'\mathfrak{c}) = +\mathfrak{D}\omega Y', \; v B'\mathfrak{a} = -\mathfrak{D}\omega Z'; \end{cases}$$

sie verbinden also einerseits A, Y, C, andererseits X, B, Z miteinander, und wir können jedes dieser Schema für sich betrachten.

Für das erste setzen wir

$$275') \quad A = \mathfrak{F} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}, \; C = \mathfrak{H} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}, \; Y = \mathfrak{M} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)},$$

wobei

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}x + \mathfrak{c}z = (\alpha x + \gamma z) - i\varkappa(\alpha' x + \gamma' z) = r - i\varkappa r'$$

ist, und $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ komplexe Konstanten bezeichnen. Es wird dann

$$- \frac{v\mathfrak{M}\mathfrak{c}}{\omega} = \mathfrak{m}\mathfrak{F}, \quad + \frac{v\mathfrak{M}\mathfrak{a}}{\omega} = \mathfrak{m}\mathfrak{H}, \quad - \frac{v}{\omega}(\mathfrak{F}\mathfrak{c} - \mathfrak{H}\mathfrak{a}) = \mathfrak{D}\mathfrak{M}, \qquad 275'')$$

und nach Elimination von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$

$$\frac{v^2}{\omega^2}(\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{a}^2) = \mathfrak{m}\mathfrak{D}. \qquad 275''')$$

Für das zweite Tripel Komponenten setzen wir

$$X = \mathfrak{L} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}, \quad Z = \mathfrak{N} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}, \quad B = \mathfrak{G} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)}. \qquad 276)$$

Es gilt dann

$$- \frac{v}{\omega}(\mathfrak{N}\mathfrak{a} - \mathfrak{L}\mathfrak{c}) = \mathfrak{m}\mathfrak{G}, \quad + \frac{v}{\omega}\mathfrak{G}\mathfrak{c} = \mathfrak{D}\mathfrak{L}, \quad - \frac{v}{\omega}\mathfrak{G}\mathfrak{a} = \mathfrak{D}\mathfrak{N}, \qquad 276')$$

und die Elimination von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}$ ergiebt

$$\frac{v^2}{\omega^2}(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2) = \mathfrak{m}\mathfrak{D},$$

also dieselbe Bedingung wie oben.

Sondert man in (275''') das Reelle und das Imaginäre, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{v^2}{\omega^2}\left((\alpha^2 + \gamma^2) - \varkappa^2(\alpha'^2 + \gamma'^2)\right) &= \mathfrak{d}\mathfrak{m}, \\ \frac{\varkappa v^2}{\omega^2}(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') &= \tau\mathfrak{l}\mathfrak{m}. \end{aligned}\right\} \qquad 276'')$$

Da α, γ und α', γ' die Richtungscosinus von r und r' sind, dabei $\beta = \beta' = 0$ ist, so kann man hierfür auch schreiben

$$\frac{v^2(1 - \varkappa^2)}{\omega^2} = \mathfrak{d}\mathfrak{m}, \quad \frac{\varkappa v^2 \cos(r, r')}{\omega^2} = \tau\mathfrak{l}\mathfrak{m}. \qquad 276''')$$

Diese Gleichungen bestimmen ω und $\varkappa$; für letztere Größe ergeben sich bei Elimination von ω zunächst zwei Wurzeln, aber nur die eine ist mit der zweiten Formel (276'''), welche $\varkappa \cos(r, r') > 0$ verlangt, vereinbar; die andere liefert für $\varkappa \cos(r, r')$ einen negativen Wert.

In einem Dielektricum ist $\mathfrak{l} = 0$, dort muß also entweder $\varkappa$ oder $\cos(r, r')$ verschwinden; der einzig hier mögliche Fall einer ebenen Welle mit variabler Amplitude ist sonach der, daß die Ebenen konstanter Amplitude senkrecht auf denen konstanter Phase stehen. In diesem Fall bleibt $\varkappa$ willkürlich und ist nicht mehr, wie S. 473 für einen Leiter geschehen, als Absorptionsindex zu bezeichnen.

Die ersten beiden Formeln (275'') bestimmen zu einem gegebenen $\mathfrak{M}$ die zugehörigen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$, die letzten beiden Formeln (276') zu einem gegebenen $\mathfrak{G}$ die zugehörigen $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{N}$. —

Nun möge die XY-Ebene die Grenze zwischen zwei verschiedenen homogenen isotropen Medien (1) und (2) sein, in deren ersterem die auf der vorigen Seite behandelten beiden Wellen sich bewegen. Es entstehen dann aus ihnen zwei reflektierte und zwei gebrochene Wellen, die analogen Charakter besitzen, wie die einfallenden. Für $z = 0$ gelten nach (250'') und (250''') die Bedingungen

$$277)\qquad \overline{X}_{,} = \overline{X}_{,,}, \quad \overline{Y}_{,} = \overline{Y}_{,,}, \quad \overline{A}_{,} = \overline{A}_{,,}, \quad \overline{B}_{,} = \overline{B}_{,,},$$

wozu man gemäß (250''''), als hiervon nicht unabhängig, fügen kann

$$277')\qquad \mathfrak{D}_{,}\overline{Z}_{,} = \mathfrak{D}_{,,}\overline{Z}_{,,}, \quad \mathfrak{m}_{,}\overline{C}_{,} = \mathfrak{m}_{,,}\overline{C}_{,,}.$$

Damit die Grenzbedingungen (277) für jede Stelle der Grenze zu jeder Zeit erfüllt seien, muß für die in (1) und die in (2) verlaufenden Wellen, soweit sie auseinander entstehen, die Periode τ die gleiche sein, ebenso das Verhältnis $\mathfrak{a}/\omega$, d. h. α/ω und $\varkappa\alpha'/\omega$; die letztere Bedingung enthält, wie schon Bd. I, S. 478 erörtert ist, die Gesetze der Reflexion und der Brechung der Wellennormalen, die mit den für Wellen elastischer Schwingungen geltenden durchaus übereinstimmen.

Da sonach für jede Welle das Verhältnis $\mathfrak{a}/\omega$ resp. α/ω und $\varkappa\alpha'/\omega$ durch den für die einfallende Welle vorgeschriebenen Wert bestimmt ist, so ergeben die Formeln (275''') resp. (276'') für jede Welle die zugehörigen $\mathfrak{c}/\omega$ resp. γ/ω und $\varkappa\gamma'/\omega$, und aus deren Werten folgt dann wegen $\alpha^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \gamma'^2 = 1$ auch $\varkappa$ und ω; zugleich reduzieren sich die Grenzbedingungen auf Beziehungen zwischen den komplexen Amplituden $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}, \mathfrak{M}$, resp. $\mathfrak{G}, \mathfrak{L}, \mathfrak{N}$. —

Praktisches Interesse bietet nur der Fall, daß das erste Medium ein Dielektricum, und zwar der leere oder der Luftraum ist, weil allein so bisher Beobachtungen möglich sind. Diese Beobachtungen beziehen sich einerseits auf die Richtung, in der die reflektierte und die gebrochene Welle — die letztere nach ihrem Austritt aus dem Medium (2) durch eine zweite, gegen die erste geneigte Grenze — sich fortpflanzt, und dienen hier nur zur Verifikation der Reflexions- und Refraktionsgesetze; andererseits beziehen sie sich auf die Länge der Wellen, welche einer bestimmten Schwingungsdauer im Luftraum entsprechen, und dienen hier zur Bestimmung ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω, auf deren prinzipielle Bedeutung schon S. 471 hingewiesen ist.

Um diese letzteren Beobachtungen zu beschreiben, betrachten wir die normale Incidenz einer Welle mit konstanter Amplitude. Hier ist $\varkappa = 0$ und $\alpha = 0$ für beide im ersten Medium

verlaufende Wellen; setzt man für die einfallende Welle (e) $\gamma_e = 1$, so ist für die reflektierte (r) $\gamma_r = -1$, für die gebrochene (d) $\gamma_d = \gamma'_d = +1$, und zugleich gilt, wie in (272''') und (274''')

$$\frac{v^2}{\omega_,^2} = \mathfrak{d}_, \mathfrak{m}_, , \quad \frac{v^2(1-\varkappa_{,,}^2)}{\omega_{,,}^2} = \mathfrak{d}_{,,}\mathfrak{m}_{,,} , \quad \frac{\varkappa_{,,} v^2}{\omega_{,,}^2} = \tau\, \mathfrak{l}_{,,} \mathfrak{m}_{,,} . \qquad 277'')$$

Die oben gesondert behandelten beiden Systeme von Komponenten sind hier gleichwertig, und Z ist, wie C, gleich Null.

Benutzen wir weiterhin die von dem e r s t e n System herrührenden Bezeichnungen, so besteht zwischen den komplexen Amplituden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{M}$ von A und Y nach der ersten Formel (275'') die Beziehung

$$-\frac{v(1-i\varkappa)\gamma\,\mathfrak{M}}{\omega} = \mathfrak{m}\mathfrak{F},$$

und die für A und Y nach (277) geltenden Grenzbedingungen nehmen die Form an

$$\mathfrak{F}_e + \mathfrak{F}_r = \mathfrak{F}_d, \quad \mathfrak{M}_e + \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_d, \qquad 277''')$$

von denen die erste sich schreiben läßt

$$(\mathfrak{M}_e - \mathfrak{M}_r)\frac{v}{\omega_, \mathfrak{m}_,} = \frac{\mathfrak{M}_d\, v(1-i\varkappa_{,,})}{\omega_{,,}\mathfrak{m}_{,,}}. \qquad 277'''')$$

Aus ihnen läßt sich $\mathfrak{M}_r$ und $\mathfrak{M}_d$ leicht berechnen; das Resultat ist ziemlich kompliziert.

Wir wollen uns für die Anwendung auf den Fall beschränken, daß die spezifische Leitfähigkeit $\mathfrak{l}_{,,}$ und die Periode τ der fortgepflanzten Schwingungen groß genug seien, um $\tau\,\mathfrak{l}_{,,}$ als unendlich neben $\mathfrak{d}_{,,}$ und auch neben $\mathfrak{d}_,$ zu betrachten. $\mathfrak{m}_,$ ist von selbst stets nahe gleich Eins, da das Medium (1) ein Dielektricum ist; $\mathfrak{m}_{,,}$ könnte sehr groß sein, ohne daß dadurch an dem Resultate etwas wesentliches geändert wird.

In diesem Falle eines v o l l k o m m e n e n L e i t e r s ergiebt die Kombination der beiden letzten Formeln (277''), daß $\varkappa_{,,} = 1$ und $v/\omega_{,,}$ unendlich groß von der Ordnung $\sqrt{\tau\,\mathfrak{l}_{,,}}$ sein muß, und die erste Formel (277'') zeigt, daß $\omega_,/\omega_{,,}$ von der g l e i c h e n Ordnung unendlich wird.

Wendet man diese Resultate auf die Formeln (277''') und (277'''') an, so erkennt man, daß sich $\mathfrak{M}_d$ unendlich klein und $\mathfrak{M}_r = -\mathfrak{M}_e$ ergiebt. Die reflektierte Schwingung besitzt also unter den gemachten Voraussetzungen die entgegengesetzt gleiche Amplitude, wie die einfallende.

Verfügt man über den Nullpunkt der Zeit so, daß $\mathfrak{M}_e$ reell wird, so gilt also gleiches von $\mathfrak{M}_r$, und die Komponenten Y der ein-

fallenden und der reflektierten elektrischen Schwingung nehmen die Form an

$$Y_e = a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right), \quad Y_r = -a \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{z}{\omega}\right). \tag{278}$$

Da sie in demselben Medium (1) stattfinden, so summieren sie sich und ergeben die Resultierende

$$Y_{,} = Y_e + Y_r = -2a \cos \frac{2\pi t}{\tau} \sin \frac{2\pi z}{\tau\omega};$$

dieselbe führt nach Bd. I, S. 349 stehende Schwingungen aus, deren Knoten da liegen, wo $z = -\frac{1}{2}h\tau\omega = -\frac{1}{2}h\lambda$ ist, deren Bäuche, wo $z = -\frac{1}{4}(2h+1)\tau\omega = -\frac{1}{4}(2h+1)\lambda$. Hierbei bezeichnet λ die Wellenlänge der Schwingung, h kann gleich 1, 2, 3, .. sein. Da nach der ersten Formel (275″) $\mathfrak{F}_e\mathfrak{m}_{,} = -\mathfrak{M}_e v/\omega_{,}$, $\mathfrak{F}_r\mathfrak{m}_{,} = +\mathfrak{M}_r v/\omega$, und außerdem $\mathfrak{M}_e = -\mathfrak{M}_r$ ist, so gilt $\mathfrak{F}_e = \mathfrak{F}_r$; hieraus folgt dann leicht, daß die Knoten der magnetischen Kraft in die Bäuche der elektrischen fallen und umgekehrt.

Nun giebt, wie auf S. 459 auseinandergesetzt ist, der elektromagnetische Resonator ein Mittel, um festzustellen, ob in irgend einem Bereich der magnetische Kraftfluß verschwindet; er gestattet somit bei der normalen Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen an einer leitenden Wand, die Lage der magnetischen Knotenebenen zu bestimmen und dadurch die Wellenlänge $\lambda = \tau\omega$ zu finden. Da nun die einem bestimmten Erreger zugehörige Periode τ nach S. 451 wenigstens angenähert angebbar ist, so läßt sich durch die beschriebene Beobachtungsmethode der Wert von ω ableiten; wie schon S. 471 gesagt, findet er sich für den Luftraum der Lichtgeschwindigkeit nahe gleich.[149]) —

Was oben aus der Annahme eines unendlich großen $\tau\mathfrak{l}_{''}$ für einen speziellen Fall geschlossen worden, gilt auch ganz allgemein, solange nur $\cos(r, r')$ einen endlichen Wert hat; denn die allgemeinsten Formeln (276″) unterscheiden sich nur durch das Auftreten dieses Parameters von den oben benutzten speziellen (277″). Es folgt demnach immer aus unendlich großem $\tau\mathfrak{l}_{''}$ für $\varkappa_{''}$ der spezielle Wert Eins, für $v/\omega_{''}$ die Größenordnung $\sqrt{\tau\mathfrak{l}_{''}}$.

Schreibt man unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (275″) und (276′) für das Medium (2), so lauten sie

$$-\frac{v\mathfrak{M}_{''}\mathfrak{c}_{''}}{\omega_{''}} = \mathfrak{m}_{''}\mathfrak{F}_{''}, \quad \frac{v\mathfrak{M}_{''}\mathfrak{a}_{''}}{\omega_{''}} = \mathfrak{m}_{''}\mathfrak{H}_{''}, \quad \frac{v}{\omega_{''}}(\mathfrak{F}_{''}\mathfrak{c}_{''} - \mathfrak{H}_{''}\mathfrak{a}_{''}) = 2i\tau\mathfrak{l}_{''}\mathfrak{M}_{''};$$

$$-\frac{v}{\omega_{''}}(\mathfrak{N}_{''}\mathfrak{a}_{''} - \mathfrak{L}_{''}\mathfrak{c}_{''}) = \mathfrak{m}_{''}\mathfrak{G}_{''}, \quad \frac{v}{\omega_{''}}\mathfrak{G}_{''}\mathfrak{c}_{''} = -2i\tau\mathfrak{l}_{''}\mathfrak{L}_{''}, \quad \frac{v}{\omega_{''}}\mathfrak{G}_{''}\mathfrak{a}_{''} = 2i\tau\mathfrak{l}_{''}\mathfrak{N}_{''}.$$

Die dritte, fünfte und sechste dieser Formeln zeigt, daß, falls man

verschwindende $\mathfrak{a}_{\prime\prime}$ und $\mathfrak{c}_{\prime\prime}$ ausschließt und $\mathfrak{L}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{M}_{\prime\prime}$, $\mathfrak{N}_{\prime\prime}$ von gleicher Größenordnung annimmt, im Medium (2) alle elektrischen Kraftkomponenten unendlich klein von der Ordnung $1/\sqrt{\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}}$ neben den gleichzeitig daselbst wirkenden magnetischen Komponenten sind.

Berücksichtigt man, daß zugleich die Bedingungen (277) und (277′) liefern

$$\overline{X}_{\prime}=\overline{X}_{\prime\prime},\quad \overline{Y}_{\prime}=\overline{Y}_{\prime\prime},\quad \mathfrak{d}_{\prime}\overline{Z}_{\prime}=-2\,i\,\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}\overline{Z}_{\prime\prime},$$

$$\overline{A}_{\prime}=\overline{A}_{\prime\prime},\quad \overline{B}_{\prime}=\overline{B}_{\prime\prime},\quad \mathfrak{m}_{\prime}\overline{C}_{\prime}=\mathfrak{m}_{\prime\prime}\overline{C}_{\prime\prime},$$

so ergiebt sich, daß $\overline{Z}_{\prime}$ unendlich groß wie $\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}$ ist gegen $\overline{X}_{\prime}$ und $\overline{Y}_{\prime}$, und auch unendlich groß wie $\sqrt{\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}}$ gegen $\overline{A}_{\prime}$, $\overline{B}_{\prime}$, $\overline{C}_{\prime}$; denn die letzteren Größen sind nur von der Ordnung $\sqrt{\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}}$ unendlich groß gegen die ersteren.

Unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{d}_{\prime\prime}$ neben $\tau\,\mathfrak{l}_{\prime\prime}$ vernachlässigt werden kann, steht also die elektrische Kraft im Dielektricum auf der Oberfläche des Leiters normal. Man erkennt, daß bei wachsender Schwingungszahl, also bei abnehmendem τ, die Vernachlässigung je mehr und mehr aufhört, zulässig zu sein, und daß sie im Falle von Lichtschwingungen, wo τ bis auf die Größe 10^{-15} herabsinkt, während $\mathfrak{l}$ z. B. für Quecksilber nach S. 374 etwa gleich 10^{16} ist, ganz unerlaubt wird. Sie ist indessen bei denjenigen elektromagnetischen Schwingungen, die man bequem herstellen und beobachten kann, wohl meist gestattet, und man versucht daher vielfach, die schwierigeren Probleme der elektromagnetischen Schwingungen in Systemen von Leitern und Dielektrica dadurch zu vereinfachen, daß man an Stelle der strengen Grenzbedingungen die von vorstehendem Falle hypothetisch übertragene der normalen Richtung der elektrischen Kraft gegen die Oberflächen von Leitern benutzt.[150])

Es ist indessen zu beachten, daß die vorstehende Entwickelung auf ziemlich spezieller Grundlage ruht und somit einen allgemeinen Beweis für die Zulässigkeit jener Grenzbedingung nicht liefert. Außerdem sind Fälle denkbar, wo nach Symmetrie die elektrische Kraft schon von selbst in die Normale zur Grenze fällt, und in welchen somit eine Gleichung durch die erwähnte Bedingung nicht geliefert wird. Hier muß dann stets auf die strengen Formeln zurückgegriffen werden, und gleiches gilt, wenn aus anderen Gründen die Einführung jener Beziehung bedenklich erscheint.

§ 47. Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen längs eines leitenden Kreiscylinders. Lineäre Leiter innerhalb eines Dielektricums.

Es ist schon im Eingang von § 44 darauf hingewiesen, daß ein Teil der Schwierigkeiten, auf welche die Theorie schneller elektromagnetischer Schwingungen stößt, nicht analytischer Natur ist, sondern darauf beruht, daß wir die physikalischen Bedingungen, die bei den gewöhnlichen Erregungsarten vorliegen, nicht klar zu übersehen vermögen. Diese Schwierigkeit findet sich ganz besonders vor bei der Fortpflanzung schneller elektromagnetischer Schwingungen längs eines Drahtes, welcher Vorgang sich der Beobachtung wegen der leicht zu erzielenden erheblichen Stärke der eintretenden Wirkungen ganz besonders empfiehlt.

Eine der gebräuchlichsten Anordnungen zu ihrer Erregung ist die folgende.[161]) Man giebt den beiden Konduktoren des Hertz'schen Erregers nicht Kugelform, sondern die Gestalt ebener Platten; ihnen in kleiner Entfernung parallel stellt man zwei andere isolierte Metallplatten auf, mit denen zwei parallele Leitungsdrähte verbunden sind, welche zu den Beobachtungen dienen sollen. Indem die Platten des thätigen Erregers abwechselnd positive und negative Ladungen erhalten, influenzieren sie in den Parallelplatten entgegengesetzte Ladungen und geben so den Anstoß zu Wellenzügen, die sich längs der Drahtleitungen fortpflanzen, und deren Wirkungen im umgebenden Dielektricum mittelst der früher beschriebenen Resonatoren beobachtet werden können.

S. 433 ist gezeigt worden, daß bei quasi-stationären Schwingungen, welche die Stromstärke in der ganzen Leitung gleichzeitig variieren lassen, der Zustand im Leiter sich als durch Vorgänge in seiner Oberfläche bedingt erweist, und daß demgemäß die Einwirkungen, denen er unterliegt, ihm durch das umgebende Dielektricum zugeführt erscheinen, sowie die Schwingungsdauer eine gewisse Kleinheit besitzt. Wir können alle die dort gezogenen Schlüsse auf den hier vorliegenden Fall fortgepflanzter Wellen unmittelbar übertragen, wenn nur die Wellenlänge groß gegen die Drahtdicke ist; es ist demnach auch hier der beobachtete Vorgang als eine Folge von außen auf den Draht ausgeübter Wirkungen anzusehen. Aber während bei dem früheren Problem das elektrische Feld relativ einfachen Gesetzen folgte, seine Veränderungen, die z. B. durch bloßes abwechselndes Öffnen und Schließen einer Kette bewirkt wurden, scheinbar gleichzeitig im ganzen Raume eintraten und sich ohne Rücksicht auf die

Vorgänge im Drahte berechnen ließen, so ist hier einmal die Veränderung des Feldes durch komplizierte Hilfsmittel bewirkt und außerdem nach dem früher über nicht-stationäre Ströme Gesagten ohne Rücksicht auf die vom Draht ausgehenden Wirkungen gar nicht zu bestimmen. Demgemäß sind die Gesetze der an sich so wichtigen Drahtwellen wirklich befriedigend aus den allgemeinen Grundformeln (248) und (248′) bislang noch nicht abgeleitet worden, und man hat sich begnügen müssen, wie dies S. 459 u. f. für ein spezielles hierher gehöriges Problem geschehen ist, an die Stelle von jenen gewisse mehr oder weniger wahrscheinliche Annahmen zur Grundlage der Theorie zu machen. —

Wir wollen zunächst einige vollkommen strenge allgemeine Resultate mitteilen, die sich für den Fall, daß der Draht ein gerader Kreiscylinder ist, und daß die Erregung derartig gleichmäßig rings um seine Axe verteilt ist, daß die elektrische Kraft K im Meridian, die magnetische R normal dazu steht, leicht aus den allgemeinen Formeln gewinnen lassen.

Legen wir, wie S. 431, die Z-Axe in die Cylinderaxe, bezeichnen die Komponenten von K parallel und senkrecht zu dieser Axe mit Z und N, die zu beiden normale magnetische Kraft mit M, so gilt im Draht (i) das System (265′), welches, ohne Indices geschrieben, lautet

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}\frac{\partial N}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}N &= -v\frac{\partial M}{\partial z}, \\ \mathfrak{d}\frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}Z &= +\frac{v}{a}\frac{\partial a M}{\partial a}, \\ \mathfrak{m}\frac{\partial M}{\partial t} &= v\left(\frac{\partial Z}{\partial a} - \frac{\partial N}{\partial z}\right); \end{aligned}\right\} \qquad 279)$$

im umgebenden Dielektricum (a) ist $\mathfrak{l}$ gleich Null zu setzen. In der Grenze $a = a_1$ gilt

$$\overline{Z}_i = \overline{Z}_a,\ \overline{M}_i = \overline{M}_a,\ \mathfrak{d}_i\frac{\partial \overline{N}_i}{\partial t} + 4\pi\mathfrak{l}_i\overline{N}_i = \mathfrak{d}_a\frac{\partial \overline{N}_a}{\partial t}, \qquad 279')$$

wobei eine dieser Gleichungen von den beiden anderen abhängig ist.

Für die Dichte σ_e der variablen wahren elektrischen Ladung der Oberfläche des Drahtes erhält man aus der Beziehung

$$\mathfrak{d}_a\overline{N}_a - \mathfrak{d}_i\overline{N}_i = 4\pi\sigma_e$$

die Bedingung

$$\mathfrak{l}_i\overline{N}_i = \frac{\partial \sigma_e}{\partial t}, \qquad 279'')$$

die ohne weiteres verständlich ist.

Wir multiplizieren die zweite Gleichung (279) mit $a\,da$, integrieren über den Querschnitt des Cylinders und setzen

280) $$\int Z_i\, a\, d\, a = \tfrac{1}{2} a_1^2 Z_m ,$$

wo dann Z_m die Bedeutung des Mittelwertes von Z auf dem Querschnitt besitzt; die Rechnung ergiebt, da Ma in der Cylinderaxe verschwinden muß,

280′) $$\frac{2v\overline{M_i}}{a_1} = \mathfrak{d}_i \frac{\partial Z_m}{\partial t} + 4\pi \mathfrak{l}_i Z_m .$$

Diese Formel hat eine einfache Bedeutung, da der Ausdruck rechts das 4πfache der mittleren longitudinalen Gesamtstromdichte $\mathfrak{j}$ darstellt, wobei in $\mathfrak{j}$ der Leitungs- und der Polarisationsstrom zusammengefaßt ist. Führen wir die $\mathfrak{j}$ entsprechende Stromstärke $\mathfrak{J} = \pi a_1^2 \mathfrak{j}$ ein, so können wir bei Berücksichtigung von (279′) schreiben

280″) $$\overline{M_i} = \frac{2\mathfrak{J}}{v a_1} = \overline{M_a} .$$

Nun ist aber nach der letzten Formel (171′) die magnetische Kraft, welche von einem konstanten Strom $\mathfrak{J}$ auf einen Punkt in der Oberfläche des Cylinders ausgehen würde, von derselben Größe, wie hier für $\mathfrak{J}$ gefunden. Es gilt somit der Satz, daß auch bei beliebigen Schwingungen in dem gegebenen Kreiscylinder, die nur die verlangte Symmetrie besitzen, im Rande eines beliebigen Querschnittes q die magnetische Kraft denselben Wert besitzt, als wenn der Cylinder statt von der wechselnden Stromstärke in seiner ganzen Länge von demselben Strom $\mathfrak{J}$ durchflossen würde, der in dem betrachteten Augenblicke durch den Querschnitt q hindurchgeht.

Wenden wir die erste und die dritte der Formeln (279) gleichfalls auf einen der Oberfläche benachbarten inneren oder äußeren Punkt an, so ergeben sie unter Berücksichtigung von (280″)

280‴) $$\begin{cases} \mathfrak{d}_i \overline{\dfrac{\partial N_i}{\partial t}} + 4\pi \mathfrak{l}_i \overline{N_i} = \mathfrak{d}_a \overline{\dfrac{\partial N_a}{\partial t}} = -\dfrac{2}{a_1} \dfrac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z}, \\ \dfrac{v^2}{\mathfrak{m}_i}\left(\overline{\dfrac{\partial Z_i}{\partial a}} - \overline{\dfrac{\partial N_i}{\partial z}}\right) = \dfrac{v^2}{\mathfrak{m}_a}\left(\overline{\dfrac{\partial Z_a}{\partial a}} - \overline{\dfrac{\partial N_a}{\partial z}}\right) = \dfrac{2}{a_1} \dfrac{\partial \mathfrak{J}}{\partial t}; \end{cases}$$

sie veranschaulichen, wie die zeitliche und die räumliche Änderung der Stromstärke im Cylinder durch Vorgänge in seiner Oberfläche bedingt sind.

Führt man die parallel mit a liegende wahre elektrische Gesamtströmung $\mathfrak{n}$ ein, so läßt sich die erste dieser Gleichungen einfach schreiben

$$\overline{\mathfrak{n}_i} = \overline{\mathfrak{n}_a} = -\frac{1}{2\pi a_1} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z};$$

da $2\pi a_1 \overline{\mathfrak{n}}$ die durch die Längeneinheit der Cylinderfläche gehende Strömung ist, so giebt diese Formel ein sehr anschauliches Resultat.

Kann man innerhalb des Cylinders den Polarisationsstrom neben dem Leitungsstrom vernachlässigen, so ist $\mathfrak{J}$ mit I und $\mathfrak{n}_i$ mit $\mathfrak{l}_i N_i$, also nach (279″) die linke Seite der letzten Formel mit $\partial \sigma_e / \partial t$ identisch. Bezeichnet man die auf die Länge Eins bezogene Oberflächenladung des Cylinders mit ε, so erhält man sonach

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}. \qquad 280'''')$$

Unter der gleichen Voraussetzung folgt aus den Formeln (279)

$$\frac{\partial a N}{\partial a} + a \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

oder, was unter den vorliegenden Symmetrieverhältnissen hiermit identisch ist,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

es befindet sich in der eingeführten Annäherung innerhalb des Cylinders keine freie oder wahre Ladung, und ε ist somit die ganze wahre Ladung der Längeneinheit. Die Formel (280'''') ist leicht direkt plausibel zu machen; ihre Gültigkeit ist aber, wie die obige Ableitung zeigt, keine allgemeine. —

Wenn man aus den beiden noch völlig strengen Gleichungen (280''') N_a eliminiert, so resultiert

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial t^2} - \frac{v^2}{\mathfrak{m}_a \mathfrak{b}_a} \frac{\partial^2 \mathfrak{J}}{\partial z^2} = \frac{v^2 a_1}{2\,\mathfrak{m}_a} \overline{\frac{\partial^2 Z_a}{\partial a\, \partial t}}. \qquad 281)$$

Diese merkwürdige Formel stimmt durchaus mit der Bd. I, S. 435 für die erzwungenen Schwingungen einer Saite erhaltenen überein. $\mathfrak{J}$ steht an Stelle der Verrückung, der Ausdruck rechts bis auf einen konstanten Faktor an Stelle der äußeren einwirkenden Kraft, des ausgeübten Zwanges; wenn man a als die Richtung der Verrückung deutet, ist $\partial Z_a / \partial t$ mit dem Potential jener Kraft proportional.

Eine andere Deutung erhält man, wenn man berücksichtigt, daß nach S. 424 infolge des Verschwindens der Komponente C der magnetischen äußeren Kraft die an jeder Stelle der Oberfläche in den Cylinder eintretende Energie proportional mit $\overline{Z_a}\,\overline{M_a} = \overline{Z_i}\,\overline{M_i}$, und $\mathfrak{J}$ proportional mit $\overline{M_a}$ ist.

Die Schwingungen der Stromstärke $\mathfrak{J}$ hören auf, erzwungene zu sein, und werden freie, wenn $\partial^2 Z_a / \partial a \partial t$ verschwindet, d. h., wenn $\partial Z_a / \partial a$ sich nicht mit der Zeit, oder $\partial Z_a / \partial t$ sich nicht mit a ändert.

Dies Resultat ist von Interesse, weil man nach der bloßen Anschauung und nach dem Verhalten des Energiestromes erwarten möchte, daß der Zwang verschwände, wenn die tangentiale Kraft Z_a an der Oberfläche gleich Null ist; die strenge Analyse beweist aber, daß mit verschwindendem $\overline{Z_a}$ erzwungene Schwingungen sehr wohl vereinbar sind.

Die Formel (281) giebt nach dem Gesagten qualitative Resultate von großem Interesse, sie gestattet aber die Ableitung quantitativer in der Praxis nicht, weil über das Gesetz, welches Z_a im äußeren Raume befolgt, bei den gebräuchlichen Erregungsarten von Drahtwellen nichts auszusagen, ja nicht einmal festzustellen ist, bei welcher Erregungsart $\overline{\partial^2 Z_a / \partial a \partial t}$ gleich Null ist. Besonders ist hervorzuheben, daß die S. 481 besprochene angenäherte Grenzbedingung, die hier ersichtlich die Form $\overline{Z_a} = 0$ annimmt und an sich unter den vorliegenden Umständen bedenklich erscheint, die Verhältnisse nicht vereinfacht. —

Angesichts dieser Schwierigkeit kann man versuchen, den oben auf S. 451 u. f. beschriebenen Weg einzuschlagen, nämlich zunächst den Leiter ganz außer acht zu lassen und nur für das umgebende Dielektrikum eine Lösung der allgemeinen Gleichungen (248) und (248′) zu suchen, welche in der Nähe des Leiters elektrische und magnetische Kräfte ergiebt, wie sie dort nach den Verhältnissen wahrscheinlich sind.

Betrachten wir wieder einen geraden linearen Leiter, etwa einen Kreiscylinder von gegen seine Dicke großer Länge, und nehmen wir die Erregung derartig an, daß der Vorgang in elektrischer Hinsicht die Symmetrie eines Rotationskörpers besitzt, so gewinnen die Grundformeln (265″) u. f. für das Dielektrikum Anwendbarkeit.

Ein partikuläres Integral der Bedingung (266), welches für Π ebene Wellen darstellt, die sich längs der Z-Axe fortpflanzen und bezüglich ihrer Amplitude die Symmetrie eines Rotationskörpers um dieselbe besitzen, erhält man durch den Ansatz

281′) $$\Pi = H \sin \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right),$$

wobei H der Gleichung

281″) $$\frac{d^2 H}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dH}{da} = p^2 H$$

genügen muß, und

281‴) $$p^2 = \alpha^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{v_1 v_2}\right) = \alpha^2 \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{\mathfrak{m}_a \mathfrak{d}_a}{v^2}\right)$$

ist. Fügt man noch die Bedingung hinzu, daß H für $a = 0$ selbst logarithmisch unendlich werden, für $a = \infty$ aber verschwinden soll, so genügt diesen Bedingungen die Lösung[152])

$$H = h \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} p a (e^u + e^{-u})} du, \tag{282}$$

worin h eine Konstante bezeichnet.

Für sehr große a erhält man direkt aus der Gleichung (281″) einfacher

$$H = \frac{h_1}{\sqrt{a}} e^{-pa}; \tag{282'}$$

für sehr kleine a durch näherungsweise Integration

$$H = h_0 \, l(a), \tag{282''}$$

wobei h_0 und h_1 sich durch einen Faktor von h unterscheiden.

Aus dem letzteren Wert folgt für kleine a

$$A = a \frac{\partial H}{\partial a} = h_0 \sin \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right), \tag{283}$$

und somit

$$Z = 0, \quad N = \frac{h_0 \alpha}{\omega a} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right), \quad M = \frac{h_0 \alpha}{v_1 a} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right). \tag{283'}$$

Der Ausdruck für N kann als die Wirkung einer elektrostatischen Ladung der Z-Axe angesehen werden, deren freie Dichte

$$\varepsilon' = \frac{h_0 \alpha}{2 \omega} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right)$$

ist, denn nach Bd. I, S. 157 wird die normale Komponente einer solchen Kraft in der Axe unendlich, wie $2\varepsilon'/a$; da das Dielektrikum die elektrische Permeabilität $\mathfrak{d}_a$ besitzt, so ist die wahre Dichte

$$\varepsilon = \varepsilon' \mathfrak{d} = \frac{h_0 \alpha \mathfrak{d}_a}{2 \omega} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right). \tag{283''}$$

Der Ausdruck für M läßt sich hingegen deuten als die magnetische Wirkung eines in der Axe fließenden Stromes von der Stärke

$$I = \frac{h_0 \alpha \mathfrak{d}_a}{2} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega}\right); \tag{283'''}$$

denn ein solcher übt nach (158″″) auf nahe Punkte eine Kraft von dem Betrage $M = 2I/va$ aus.

Es gilt somit dann die Beziehung (280″″)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z},$$

welche früher auf ganz anderem Wege erhalten worden ist.

Diese Resultate ergeben für den Ansatz (281′) Eigenschaften, die mit den Wirkungen eines in die Z-Axe fallenden linearen Leiters, wie man dieselben in dessen nächster Nähe vermuten darf, überein-

stimmen. Es könnte also jener Ansatz in der S. 455 erörterten Weise dazu dienen, um auch über die in größeren Entfernungen ausgeübten Kräfte wahrscheinliche Schlüsse zu ziehen.

Indessen versagt diese Methode gerade der uns beschäftigenden wichtigsten Frage gegenüber, mit welcher Geschwindigkeit ω die Fortpflanzung der Schwingungen parallel dem Leiter geschieht; denn in der Formel (281'''), welche eine Beziehung für ω enthält, ist p gänzlich willkürlich.

Man könnte etwa hoffen, zu einer Beantwortung jener Frage zu gelangen, indem man in die Fundamentalgleichung (281) für das fragliche Glied $\overline{\partial^2 Z_a / \partial a \partial t}$ denjenigen Wert einsetzt, der sich hierfür aus der Lösung (282) ergiebt. Indessen führt auch dieser Weg nicht zum Ziele. Denn um $\overline{\partial^2 Z_a / \partial a \partial t}$ zu berechnen, muß man über die in (283') benutzte erste Annäherung hinausgehen; die zweite Näherung zeigt nun, daß Z_a für $a = 0$ nicht Null, sondern nur unendlich klein gegen N_a und M_a wird; es findet sich nämlich proportional mit $h_0 p^2 l(a)$. Infolge hiervon wird der in (281) auftretende Ausdruck $\overline{a_1 \partial^2 Z_a / \partial a \partial t}$ endlich, und zwar mit $h_0 p^2$ proportional.

Nun ist aber p^2 durch die bisherigen Betrachtungen nicht bestimmt; dieselben zeigen nur, daß es verschwindet, wenn $\omega^2 = v^2 / \mathfrak{m}_a \mathfrak{d}_a$ ist. Gleiches gilt somit von $\overline{a_1 \partial^2 Z_a / \partial a \partial t}$, aber dieses Resultat ist auch direkt aus der Gleichung (281) abzulesen; die angestellte Überlegung führt also zu einer Identität.

Man ist somit in Bezug auf die Bestimmung der Geschwindigkeit ω schließlich doch auf die Beobachtung angewiesen; die bezüglichen Messungen sind u. a. folgendermaßen angestellt worden. Mit den Konduktoren des Hertz'schen Erregers sind die Enden zweier langer geradliniger und paralleler Drähte in Wechselwirkung gesetzt, wie S. 482 beschrieben; längs derselben pflanzen sich, wenn der Erreger in Thätigkeit ist, elektrische Schwingungen fort, die einen Blondlot'schen Resonator, der zwischen ihnen, mit seiner Ebene in der Ebene der Drähte, befestigt ist, zum Ansprechen bringen. Stellt man aus einem quer über die Drähte gelegten kurzen Leiter eine Brücke her, so werden die Schwingungen in den Drähten zu stehenden, da die Brücke das Auftreten merklicher Potentialdifferenzen zwischen den verbundenen Stellen unmöglich macht, und man kann der Brücke Stellungen geben, für welche die Schwingungen im Resonator verschwinden; die Entfernungen benachbarter Stellungen müssen dann, wie man ganz ohne Theorie sieht, mit der halben Länge einer längs des Drahtes fortgepflanzten Welle übereinstimmen.

Die Beobachtung hat ergeben, daß diese Längen mit derjenigen der Wellen, welche der gleiche Resonator in der Luft nachzuweisen gestattet, übereinstimmen, daß also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen längs des Drahtes mit der im Luftraum merklich übereinstimmt.[153])

Von diesem Ergebnis ist bereits S. 460 Gebrauch gemacht worden, um einen der Parameter in der hypothetischen Gleichung (269) für Drahtschwingungen zu bestimmen. Betrachtet man das Resultat als vollkommen sichergestellt, so kann man die erhaltene und früher nur auf den Resonator von Hertz angewandte Endformel der theoretischen Behandlung auch anderer derartiger Vorgänge zu Grunde legen.

Befindet sich der lineäre Leiter nicht im leeren Raum, sondern ist er von einem beliebigen Dielektrikum umgeben, so wird, wie das auch die strenge Formel (281) an die Hand giebt, der Faktor v^2 mit $v^2/\mathfrak{m}_a\mathfrak{d}_a$ zu vertauschen sein. Berücksichtigt man dies, so läßt sich die bequeme Meßbarkeit der Länge von Drahtwellen experimentell auf mehrfache Weise verwerthen. Führt man z. B. ein Stück der zu beobachtenden Drähte durch ein hinreichend großes Flüssigkeitsbassin und bestimmt sowohl außerhalb, wie innerhalb nach der oben beschriebenen Methode die Länge der stehenden Wellen, so giebt ihr Verhältnis Aufschluß über die Größe $\mathfrak{d}\mathfrak{m}$ für die Flüssigkeit, da dieselbe in der Luft merklich gleich Eins gesetzt werden kann.[154]) Diese Methode gestattet die Bestimmung von $\mathfrak{d}\mathfrak{m}$ auch für Flüssigkeiten von merklicher elektrischer Leitfähigkeit, da letztere auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach den Formeln (274'''') nur in einem Gliede zweiter Ordnung einwirkt.

§ 48. Die allgemeinen Induktionsgleichungen für bewegte Körper.

Bei den bisherigen Betrachtungen war der induzierte Leiter als ruhend, das induzierende System als bewegt oder sonst veränderlich vorausgesetzt, oder es war ein Zustand betrachtet, der sich durch Einführung eines bewegten Koordinatensystemes auf diesen zurückführen ließ. Jetzt wollen wir untersuchen, wie die Formeln sich in dem entgegengesetzten Grenzfalle gestalten, daß das induzierende System ruht, der induzierte Leiter hingegen beliebig bewegt wird, oder daß andere Vorgänge stattfinden, die sich durch Wahl des Koordinatensystemes auf diesen zurückführen lassen.

Offenbar ergeben sich hier wirklich neue Verhältnisse nur dann, wenn die Bewegung des induzierten Leiters mit Deformation verbunden ist.

Um die Aufgabe zu vereinfachen, greifen wir noch ein Mal auf den Fall zurück, daß der induzierte Leiter lineär ist, und wollen jetzt voraussetzen, daß seine Bewegung von der genannten allgemeinen Art ist. Seine Axenkurve soll also sowohl durch Verbiegung, als durch Dehnung verändert werden; es soll auch zugelassen sein, daß neue Stücke in dieselbe eintreten, wie dies beispielsweise geschieht, wenn der Leiter aus einem **U**-förmigen festen Teil besteht, auf welchem ein geradliniger derartig verschoben wird, daß beide zusammen ein Flächenstück von wechselnder Größe vollständig begrenzen. Man sagt in diesem Falle, daß der lineäre Leiter Gleitstellen besitzt.

Offenbar komplizieren sich hier die Verhältnisse dadurch, daß unter Umständen der Widerstand des induzierten Leiters zeitlich wechselt, und daß infolge hiervon die auf S. 364 u. f. angestellten Überlegungen, welche zu der Bestimmung des Linienintegrales $L = \int S ds$ führten, ihre Anwendbarkeit verlieren. Indessen kann man letztere wiederherstellen, wenn man die Annahme macht, daß die Anordnung des Experimentes gestattet, die zeitliche Änderung des Widerstandes im induzierten Leiter neben dessen absolutem Werte zu vernachlässigen.

Die strenge Erfüllung dieser Annahme würde voraussetzen, daß der veränderliche Teil des Leiters eine unendlich große Leitungsfähigkeit besäße, und es ist, da nach dem S. 364 angegebenen Beobachtungsresultat L von der Leitfähigkeit unabhängig ist, kein prinzipieller Grund für die Abweisung einer solchen Möglichkeit vorhanden. In der Praxis kann man der gemachten Voraussetzung hinreichend genau entsprechen, indem man dem veränderlichen Teil des induzierten Leiters einen erheblich größeren Querschnitt giebt, als dem konstanten, zu welchem auch das eingeschaltete Meßinstrument zu rechnen ist.

Die Beobachtungen, welche unter den beschriebenen Umständen angestellt sind, haben nun das Resultat ergeben, daß das Fundamentalgesetz (225)

$$L = \int S\, ds = \frac{d\Gamma}{dt}$$

auch hier Gültigkeit besitzt[155]), und wir wollen dasselbe demgemäß als Ausgangspunkt für die Ableitung eines dem neuen Problem entsprechenden Elementargesetzes benutzen. Da der Anteil, welchen eine Veränderung des induzierenden Systemes an L liefert, oben bereits bestimmt ist, lassen wir derartige Wirkungen, wie schon bemerkt, jetzt außer Betracht.

Um sogleich zu den allgemeinsten Formeln zu gelangen, verfahren wir, wie in § 41; wir führen die freien Ströme ein, die mit dem induzierenden Systeme äquivalent sind, und schreiben demgemäß, wie S. 415,

$$\Gamma' = -\frac{1}{v}\int(\mathfrak{U}\,dx + \mathfrak{V}\,dy + \mathfrak{W}\,dz),$$

worin die Integration über den induzierten linearen Leiter zu erstrecken ist.

Die Variation von Γ' in der obigen Grundformel bezieht sich jetzt nur auf die Gestalt des linearen Leiters, und wir wollen sie durch die Komponenten δu, δv, δw der Verschiebung δg ausdrücken, die stetig von Linienelement zu Linienelement variieren, also reguläre Funktionen von s sind.

Es ist dann

$$\delta\mathfrak{U} = \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\delta u + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\delta v + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\delta w$$

u. s. f.; ferner gilt

$$\delta\,dx = \frac{\partial\,\delta u}{\partial s}\,ds,\quad \delta\,dy = \frac{\partial\,\delta v}{\partial s}\,ds,\quad \delta\,dz = \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\,ds;$$

setzt man dies in den Ausdruck für $\delta\Gamma'$ ein und integriert die in δdx, δdy, δdz multiplizierten Glieder durch Teile nach s, so erhält man

$$\delta\Gamma' = -\frac{1}{v}\int\Big[\Big(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\delta u + \ldots\Big)dx + \Big(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\delta u + \ldots\Big)dy + \Big(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\delta u + \ldots\Big)dz$$
$$-\Big(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial s}\delta u + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial s}\delta v + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial s}\delta w\Big)ds\Big],$$

oder bei ausführlicher Schreibweise von $\partial\mathfrak{U}/\partial s$ u. s. f. auch

$$\delta\Gamma' = \frac{1}{v}\int\Big\{\Big[\Big(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\Big)\delta v - \Big(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\Big)\delta w\Big]dx + \ldots\Big\} \qquad 284)$$

Benutzt man hier die Werte (205) der magnetischen Polarisationen und führt statt der willkürlichen Verrückungen δg, resp. δu, δv, δw, die auf die Zeiteinheit bezogenen, d. h. die Geschwindigkeiten g', resp. u', v', w' ein, so findet man

$$L = \frac{d\Gamma'}{dt} = \frac{1}{v}\int\Big[(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B})\,dx + (w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C})\,dy + (u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A})\,dz\Big]; \qquad 284')$$

setzt man nun, wie S. 415,

$$L = \int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

so bestimmen sich die Komponenten X, Y, Z bis auf additive Differentialquotienten einer unbekannten eindeutigen Funktion $\mathfrak{F}$ der Koordinaten, wie folgt,

284'')
$$\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{1}{v}(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B}), \\ Y &= -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \frac{1}{v}(w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C}), \\ Z &= -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \frac{1}{v}(u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A}). \end{aligned}\right.$$

Die zweiten Glieder in dem obigen System stellen die Komponenten einer induzierten elektrischen Kraft K dar, die normal auf der Richtung der Translationsgeschwindigkeit g' und der Richtung der magnetischen Polarisation $\mathfrak{R}$ steht und die eine Größe besitzt

284''')
$$K = \frac{1}{v} g' \mathfrak{R} \sin(g', \mathfrak{R}). —$$

Wirken die beiden bisher gesondert betrachteten Ursachen der Induktion gleichzeitig, so summieren sich ihre Wirkungen; wir können daher für diesen Fall unter Rücksicht auf (247'') schreiben

285)
$$X = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{1}{v}(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B}),$$
. . . .

und hieraus erhält man durch Elimination der unbekannten Funktion $\mathfrak{F}$ das (248) entsprechende allgemeinere System

285')
$$v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C}) - \frac{\partial}{\partial y}(u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A}),$$
. . . .

das wir genau, wie jenes, auf beliebig gestaltete homogene oder inhomogene Leiter und Dielektrica übertragen können.

Diese Formeln können indessen noch nicht die allgemeinsten Gesetze der Induktion enthalten; sie führen vielmehr im Falle, daß w a h r e M a g n e t i s m e n in dem System vorhanden sind, zu einem Widerspruch. Denn wenn man sie resp. nach x, y, z differentiiert und addiert, so erhält man, da

285'')
$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial z} = 4\pi \varrho_m$$

ist, unter ϱ_m die Raumdichte des wahren Magnetismus verstanden, die Beziehung:

$$\frac{\partial \varrho_m}{\partial t} = 0.$$

Dies ist aber offenbar unrichtig; denn nicht die wahre magnetische Ladung eines Punktes im Raume, sondern die eines mit den Massenteilchen bewegten Volumenelementes dk bleibt mit der Zeit konstant, d. h., es muß gelten

$$\frac{d(\varrho_m\, dk)}{dt} = 0.$$

Letztere Formel ergiebt aber, ausführlich geschrieben, nach S. 354

$$\frac{\partial \varrho_m}{\partial t} + \frac{\partial \varrho_m}{\partial x} u' + \frac{\partial \varrho_m}{\partial y} v' + \frac{\partial \varrho_m}{\partial z} w' + \varrho_m \vartheta' = 0, \qquad 285''')$$

worin ϑ', die Dilatationsgeschwindigkeit des Elementes dk, definiert ist durch

$$\vartheta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}.$$

Schreibt man die Gleichung (285‴) bei Benutzung des Wertes (285″) von ϱ_m in der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(4\pi u'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4\pi v'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(4\pi w'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t}\right) = 0, \quad 285'''')$$

so erkennt man, daß die Formeln (285′) in Einklang mit ihr kommen, wenn man ihren rechten Seiten resp. die Glieder $4\pi u'\varrho_m$, $4\pi v'\varrho_m$, $4\pi w'\varrho_m$ hinzufügt. Ob damit die gesamte Einwirkung wahrer Magnetismen erschöpft ist, bleibt zunächst dahingestellt. Führen wir die Ergänzung der Gleichungen (285′) aus, so gewinnen wir die Endformeln[156])

$$\left.\begin{aligned}
v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) &= 4\pi u'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}(v'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{B}) - \frac{\partial}{\partial z}(u'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{A}), \\
v\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) &= 4\pi v'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}(w'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{C}) - \frac{\partial}{\partial x}(v'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{B}), \\
v\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= 4\pi w'\varrho_m + \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}(u'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{A}) - \frac{\partial}{\partial y}(w'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{C}),
\end{aligned}\right\} \qquad 286)$$

die wir die allgemeinen Induktionsformeln oder die Induktionsformeln für bewegte Medien nennen wollen.

Dabei lassen sich nach (251) und (285⁗) die Größen

$$\mathfrak{a} = \varrho_m u' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}, \quad \mathfrak{b} = \varrho_m v' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \mathfrak{c} = \varrho_m w' + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} \qquad 286')$$

als die Komponenten einer in dem bewegten Körper fließenden, stets quasi-stationären magnetischen Strömung an der Stelle x, y, z auffassen; diese Deutung ist von Nutzen zum Zwecke der Veranschaulichung der erhaltenen Resultate, und die Analogie mit den

Definitionen (217‴) der Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der wahren elektrischen Gesamtströmung macht das Nebeneinanderauftreten der Polarisations- und der Konvektionswirkung besonders wahrscheinlich. Einen Widerspruch mit den S. 490 benutzten Beobachtungen an linearen Leitern bringt die vorgenommene Erweiterung nicht.

Es ist daran zu erinnern, daß über das Verhalten des Koordinatensystemes, auf welches die Gleichungen (286) bezogen sind, eine spezielle Verfügung nicht getroffen ist; dasselbe kann daher ebensowohl absolut fest sein, als sich in vorgeschriebener Weise, etwa mit einem starren Teil des körperlichen Systemes, bewegen. In dem letzteren Falle bezeichnen u', v', w', wie auf S. 358, die Komponenten der Geschwindigkeit relativ zu diesem Koordinatensystem. Wenn also alle Körper des betrachteten Komplexes die gleiche Bewegung ausführen, so reduzieren sich die Formeln bei Einführung eines mit ihnen fest verbundenen Koordinatensystemes auf die für ruhende Medien gültigen (248). —

Auf S. 357 haben wir die allgemeinen Gleichungen des Elektromagnetismus für bewegte Körper aufgestellt, in denen einige der von der Bewegung abhängigen Glieder nicht näher begründet waren; sie sind damals zugefügt, um die Analogie mit den nunmehr abgeleiteten allgemeinen Induktionsformeln (286), die im übrigen so auffallend vorhanden ist, auch in dieser Hinsicht herzustellen. Man erkennt die Übereinstimmung, wenn man die älteren Formeln, wie folgt, den neueren gegenüberstellt. Es gilt nach (217″)

$$286'')\quad \left\{\begin{aligned} v\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right) &= 4\pi(\mathfrak{u}+\varrho_e u')+\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial y}(v'\mathfrak{X}-u'\mathfrak{Y})-\frac{\partial}{\partial z}(u'\mathfrak{Z}-w'\mathfrak{X}),\\ v\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right) &= 4\pi(\mathfrak{v}+\varrho_e v')+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial z}(w'\mathfrak{Y}-v'\mathfrak{Z})-\frac{\partial}{\partial x}(v'\mathfrak{X}-u'\mathfrak{Y}),\\ v\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right) &= 4\pi(\mathfrak{w}+\varrho_e w')+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial x}(u'\mathfrak{Z}-w'\mathfrak{X})-\frac{\partial}{\partial y}(w'\mathfrak{Y}-v'\mathfrak{Z}), \end{aligned}\right.$$

wobei gemäß (217‴) die Größen

$$286''')\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{x}=\mathfrak{u}+\varrho_e u'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t},\quad \mathfrak{y}=\mathfrak{v}+\varrho_e v'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t},\\ \mathfrak{z}=\mathfrak{w}+\varrho_e w'+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

die Gesamtkomponenten der wahren elektrischen Strömung bezeichnen.

Hier entspricht jedes Glied einem in (286), nur für den elektrischen Leitungsstrom, d. h. für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, fehlt das magnetische Analogon, und die Vorzeichen der korrespondierenden Ausdrücke auf der linken Seite sind einander entgegengesetzt. —

Die Systeme (286) und (286'') stellen die Erweiterung der Systeme (248) und (248') auf bewegte Medien dar. Ihre Ableitung läßt deutlich hervortreten, daß in ihnen noch manches hypothetisch ist; wir werden aber im nächsten Paragraphen eine Betrachtung anstellen, die ihre Richtigkeit und Vollständigkeit wenigstens gegenüber Erscheinungen der Art, wie sie die experimentelle Grundlage der Entwickelung bildeten, sehr wahrscheinlich macht.

Daß die für ruhende Medien geltenden Grundformeln (248) und (248') sich so schnellen Schwingungen gegenüber, wie sie bei optischen Phänomenen stattfinden, unvollständig erweisen, nämlich die beobachteten Abhängigkeiten gewisser Vorgänge von der Schwingungsperiode nicht ergeben, ist bereits S. 472 erwähnt; der gleiche Mangel muß also auch den Systemen (286) und (286'') anhaften. Dazu tritt aber ein weiterer Widerspruch mit der Erfahrung, auf den hier schon aufmerksam gemacht werden mag.

So wenig sichere Resultate auch die Beobachtung über das optische Verhalten bewegter Medien im allgemeinen noch geliefert hat, das Eine hat sie doch vollständig festgestellt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in einem geradlinig als Ganzes bewegten Körper, gemessen gegen ein mit demselben fest verbundenes Koordinatensystem, von dieser Bewegung abhängt, nämlich kleiner ist, als die im ruhenden Medium, wenn die Fortpflanzung parallel der Bewegung, größer, wenn sie ihr entgegen stattfindet.[157])

Aber diese Erfahrungsthatsache steht in vollem Widerspruch zu den vorstehenden Gleichungen (286) und (286''), die, auf ein mit dem bewegten Körper fortschreitendes Koordinatensystem bezogen, von den Parametern der Bewegung, d. h. von u', v', w', vollkommen frei werden. Die Formeln müssen daher in vollständiger Gestalt noch Glieder enthalten, die bei Veränderungen von der Geschwindigkeit der Lichtschwingungen merklich werden und jene Erscheinungen erklären; die Versuche, diese Glieder mit Hilfe spezieller Hypothesen abzuleiten, fallen außerhalb des Rahmens dieses Buches.[158]) —

§ 49. Die allgemeinen Ausdrücke für die elektrischen und die magnetischen Kräfte innerhalb bewegter Medien. Die elektrischen und die magnetischen Polarisationen als Zustände der Materie.

Die Grundformeln (286) und (286″) enthalten allgemeine Sätze über die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kräfte in bewegten Medien, geben aber nicht deren Werte unmittelbar an. Man kann aus ihnen aber die letzteren bis zu einem gewissen Grade berechnen, wenn man die Translationsgeschwindigkeiten g' und die magnetischen, wie die elektrischen Kräfte R und K im Unendlichen verschwindend klein annimmt und sprungweise Übergänge innerhalb des körperlichen Systemes ausschließt.

Dann kann man ein dem Formelsystem (285) entsprechendes allgemeineres auf folgende Weise erhalten.

Man schreibt die Gleichungen (286) unter Benutzung der Bezeichnungen (286′) kurz

287) $$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \dfrac{4\pi\mathfrak{a}}{v}, \quad \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial \Xi}{\partial z} = \dfrac{4\pi\mathfrak{b}}{v}, \quad \dfrac{\partial \Xi}{\partial y} - \dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{4\pi\mathfrak{c}}{v}, \text{ worin} \\ \Xi = X + \dfrac{1}{v}(w'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{C}), \quad H = Y + \dfrac{1}{v}(u'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{A}), \\ Z = Z + \dfrac{1}{v}(v'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{B}) \end{cases}$$

Abkürzungen sind, macht

287′) $$\begin{cases} \Xi = -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}\right), \\ H = -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}\right), \\ Z = -\left(\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}\right), \\ 0 = \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}, \end{cases}$$

und bestimmt $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ nach den in § 23 des I. Teiles entwickelten Regeln.

Setzt man hierzu

287″) $$\frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\mathfrak{r}_e,$$

so wird

287‴) $$\mathfrak{F} = \int \frac{(\mathfrak{r}_e)_1\, dk_1}{r};$$

außerdem gilt

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x},$$

und darin ist

$$A = \frac{1}{4\pi}\int\left(\Xi + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)_1 \frac{dk_1}{r}, \quad B = \frac{1}{4\pi}\int\left(H + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)_1 \frac{dk_1}{r},$$
$$\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int\left(Z + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)_1 \frac{dk_1}{r}.$$

Führt man die Werte von A, B, Γ in die Ausdrücke für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ein und integriert die Resultate durch Teile über den unendlichen Raum, wobei das Integral über die unendlich große Kugel verschwindet, so erhält man

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{\partial H_1}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial y_1}\right)\frac{dk_1}{r}, \ldots$$

also unter Rücksicht auf (286')

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{a}_1\, dk_1}{r}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{b}_1\, dk_1}{r}, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{v}\int\frac{\mathfrak{c}_1\, dk_1}{r}. \qquad 287''')$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (286''') und bei Berücksichtigung der Bedeutung von Ξ, H, Z erhält man schließlich

$$\left.\begin{aligned}
X &= \frac{1}{v}(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B}) - \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{b}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{c}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\right)dk_1 - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x},\\
Y &= \frac{1}{v}(w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C}) - \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{c}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1} - \mathfrak{a}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)dk_1 - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y},\\
Z &= \frac{1}{v}(u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A}) - \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{a}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{b}_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}\right)dk_1 - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad 288)$$

Die gefundenen Werte enthalten interessante allgemeine Resultate, sind aber für spezielle Fälle selten anwendbar, weil die auf den rechten Seiten der Formeln (288) auftretenden Glieder meist nicht direkt vorgeschrieben sind, sondern sich selbst erst wieder durch die X, Y, Z bestimmen, wobei die elektromagnetischen Grundformeln (286'') eine große Rolle spielen. Doch können sie in gewissen speziellen Fällen, wo es genügt, eine angenäherte Lösung zu finden, auch praktischen Nutzen bringen.

Wir gehen auf derartige Anwendungen nicht ein und fügen hier nur einige allgemeine Bemerkungen über die Bedeutung der drei Teile an, in die nach (288) die Komponenten X, Y, Z der elektrischen Kraft zerfallen.

Der erste Teil besteht aus den Gliedern $(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B})/v$ u. s. f., die schon auf S. 492 besprochen sind, und die eine Einwirkung der Bewegung und der magnetischen Polarisation nur eben des Volumenelementes enthalten, für welches die Formeln die Werte der elektri-

schen Komponenten bestimmen; man kann sie demnach als eine direkte Induktion durch Bewegung bezeichnen.

Der zweite Teil stimmt formal mit den in (149″) gegebenen Ausdrücken für die von einem wahren elektrischen Leitungsstrom mit den Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ ausgeübten magnetischen Kraftkomponenten durchaus überein; nur das Vorzeichen ist das entgegengesetzte. Die innere Übereinstimmung wird noch vergrößert durch den Umstand, daß nach S. 357 mit dem elektrischen Leitungsstrom elektromagnetisch äquivalent ist der elektrische Polarisations- und der elektrische Konvektionsstrom, sodaß jene Formeln, statt nur für den Leitungsstrom, auch für den wahren elektrischen Gesamtstrom mit den Komponenten $\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + u' \varrho_e + \partial \mathfrak{X} / 4 \pi \partial t$ u. s. f. aufgestellt werden können; abgesehen von den ersten Gliedern, denen im Gebiete des Magnetismus nichts entspricht, da magnetische Leiter nicht existieren, sind aber diese Größen den oben eingeführten magnetischen Stromkomponenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ vollkommen analog.

Es ergiebt sich hieraus, daß den magnetischen Wirkungen elektrischer Ströme, die anschaulich durch das Gesetz von Biot-Savart und durch die Ampère'sche Regel dargestellt werden, elektrische Wirkungen magnetischer Ströme parallel gehen, welche denselben Gesetzen folgen; nur ist der Sinn ihrer Richtung dem durch die Ampère'sche Regel angegebenen entgegengesetzt.

Der dritte Teil der durch die Formel (288) gegebenen allgemeinen Kraftkomponenten X, Y, Z ist durch die Terme $-\partial \mathfrak{F} / \partial x$, $-\partial \mathfrak{F} / \partial y$, $-\partial \mathfrak{F} / \partial z$ dargestellt und hat somit den Charakter einer elektrostatischen Wirkung mit der Potentialfunktion $\mathfrak{F}$. Letztere Größe ist nach (287′) gegeben durch

$$\mathfrak{F} = \int \frac{(\mathfrak{r}_e)_1 \, d k_1}{r},$$

wobei nach (287) und (286‴)

$$288') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{r}_e = & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{4 \pi v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (w' \mathfrak{B} - v' \mathfrak{C}) + \frac{\partial}{\partial y} (u' \mathfrak{C} - w' \mathfrak{A}) + \frac{\partial}{\partial z} (v' \mathfrak{A} - u' \mathfrak{B}) \right] \end{aligned} \right.$$

ist und die räumliche Dichte der wirksamen elektrischen Ladung darstellt.

Setzen wir die beiden Teile dieses Ausdruckes resp. gleich ϱ_e' und ϱ_e'', schreiben also

$$288'') \qquad \mathfrak{r}_e = \varrho_e' + \varrho_e'',$$

so ist ϱ_e' mit der in der Elektrostatik betrachteten freien Dichte identisch und kann daher jetzt unberücksichtigt bleiben; die speziell als Folge der Bewegung auftretende scheinbare Dichte ϱ_e^s läßt sich bei Einführung der Rotationskomponenten l', m', n', welche die Geschwindigkeiten u', v', w' begleiten, folgendermaßen ausdrücken

$$\left.\begin{aligned}\varrho_e^s = \frac{1}{4\pi v}\left[u'\left(\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}\right) + v'\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x}\right) + w'\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y}\right)\right] \\ - \frac{1}{2\pi v}(\mathfrak{A}\, l' + \mathfrak{B}\, m' + \mathfrak{C}\, n').\end{aligned}\right\} \quad 288''')$$

Dieser Wert zeigt, daß ϱ_e^s nur dann von Null verschieden ist, wenn entweder die magnetische Polarisation Wirbel besitzt, oder die Bewegung mit Rotationen verbunden ist.

Schreibt, man der Bezeichnung (288'') entsprechend,

$$\mathfrak{F} = \int (\varrho_e' + \varrho_e^s)_1 \frac{d k_1}{r} = \varphi' + \varphi^s, \qquad 289)$$

worin nun φ' und φ^s die Potentialfunktionen der beiden Verteilungen ϱ_e' und ϱ_e^s bezeichnen, und formt man den Ausdruck für φ^s durch teilweise Integration um, wobei das Integral über die unendlich große Kugel verschwindet, so erhält man ganz allgemein

$$\left.\begin{aligned}\varphi^s = + \frac{1}{4\pi v}\int\Bigg[(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + (w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} \\ + (u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\Bigg] d k_1,\end{aligned}\right\} \quad 289')$$

ein Ausdruck, der mit der Potentialfunktion eines influenzierten Dielektricums übereinstimmt; die scheinbaren lokalen Momente $\alpha_e^s, \beta_e^s, \gamma_e^s$ nehmen die Werte an

$$\left.\begin{aligned}\alpha_e^s = \frac{1}{4\pi v}(v'\mathfrak{C} - w'\mathfrak{B}), \quad \beta_e^s = \frac{1}{4\pi v}(w'\mathfrak{A} - u'\mathfrak{C}), \\ \gamma_e^s = \frac{1}{4\pi v}(u'\mathfrak{B} - v'\mathfrak{A})\end{aligned}\right\} \quad 289'')$$

und unterscheiden sich von dem oben betrachteten, durch direkte Wirkung der Bewegung induzierten ersten Teil der elektrischen Kraftkomponenten X, Y, Z nur durch den Faktor $1/4\pi$.

Beiläufig ergiebt sich auch aus der gewonnenen Formel (289'), daß die scheinbare Verteilung eine neutrale ist, daß also in jedem Volumen sich eine Gesamtladung Null befindet.

Was nun den experimentellen Nachweis der Existenz der drei verschiedenen Wirkungen angeht, die nach dem soeben Gezeigten durch die allgemeinen Formeln (288) ausgesprochen sind, so sind

die beiden ersten vollkommen sichergestellt; denn da sie zu dem Linienintegral $L = \int S\,ds$ über eine geschlossene Kurve einen endlichen Beitrag geben, so äußern sie ihre Wirkung in induzierten elektrischen Strömen, die jedenfalls in Leitern mit Leichtigkeit nachgewiesen und quantitativ untersucht werden können. In der That bilden ja die beobachteten Gesetze jener Ströme die Grundlage für die Ableitung der obigen Formeln.

Größere Schwierigkeit bietet dem Experiment die dritte der oben besprochenen Wirkungen; denn die Anteile $-\partial\mathfrak{F}/\partial x$, $-\partial\mathfrak{F}/\partial y$, $-\partial\mathfrak{F}/\partial z$ an den elektrischen Kraftkomponenten geben zu dem Linienintegral L keinen Anteil, wirken also nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch nicht elektromotorisch, d. h. veranlassen keinen Strom. Sie üben also nur elektrostatische Wirkungen, und zwar solche von außerordentlicher Kleinheit, da die scheinbare Dichte ϱ_e' mit dem Verhältnis g'/v der Translations- zu der Lichtgeschwindigkeit proportional ist. In der That ist eine Erscheinung, die auf jene Kräfte zurückzuführen wäre, bisher noch nicht wahrgenommen worden. —

Dieselben Schlußreihen, die wir im Vorstehenden an das eine fundamentale Gleichungssystem (286) angeknüpft haben, lassen sich nun auch an das andere (286″) schließen.

Wir erhalten ohne weiteres, indem wir die Komponenten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ der gesamten wahren elektrischen Strömung nach (286‴) definieren, die folgenden Ausdrücke für die Komponenten A, B, C der magnetischen Kraft:

$$290)\quad \left\{\begin{aligned}
A &= \frac{1}{v}(w'\mathfrak{Y} - v'\mathfrak{Z}) + \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{y}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} - \mathfrak{z}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right) dk_1 - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x},\\
B &= \frac{1}{v}(u'\mathfrak{Z} - w'\mathfrak{X}) + \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{z}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} - \mathfrak{x}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right) dk_1 - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y},\\
C &= \frac{1}{v}(v'\mathfrak{X} - u'\mathfrak{Y}) + \frac{1}{v}\int\left(\mathfrak{x}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1} - \mathfrak{y}_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\right) dk_1 - \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke zerfallen in drei Teile, die den oben in (288) für X, Y, Z erhaltenen vollständig parallel gehen.

Der erste Teil giebt eine direkte magnetische Wirkung der Bewegung des Volumenelementes im elektrischen Feld von der auf S. 356 erörterten Natur.

Der zweite Teil entspricht genau den in (149″) angegebenen Ausdrücken für die elektromagnetischen Komponenten wahrer elek-

trischer Ströme; nur erscheinen die Komponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ der letzteren ergänzt durch die mit ihnen nach S. 352 und 354 äquivalenten Anteile des elektrischen Konvektions- und Polarisationsstromes.

Der dritte Teil hat die Natur der von einer magnetischen Verteilung ausgehenden Kraft, und $\mathfrak{G}$ ist deren Potentialfunktion.

Für $\mathfrak{G}$ erhält man ebenso, wie S. 499 für $\mathfrak{F}$,

$$\mathfrak{G} = \int (\varrho'_m + \varrho^s_m)_1 \frac{dk_1}{r} = \psi' + \psi^s, \qquad 290')$$

wobei ϱ'_m die Dichte wirklich vorhandener freier Magnetismen bedeutet, ϱ^s_m die Dichte von auf der Bewegung im elektrischen Felde beruhenden scheinbaren Magnetismen darstellt und gegeben ist durch

$$\left.\begin{aligned} \varrho^s_m &= \frac{1}{4\pi v}\left[\frac{\partial}{\partial x}(v'\mathfrak{Z} - w'\mathfrak{Y}) + \frac{\partial}{\partial y}(w'\mathfrak{X} - u'\mathfrak{Z}) + \frac{\partial}{\partial z}(u'\mathfrak{Y} - v'\mathfrak{X})\right] \\ &= \frac{1}{4\pi v}\left[u'\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right) + v'\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right) + w'\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi v}(\mathfrak{X} l' + \mathfrak{Y} m' + \mathfrak{Z} n'); \end{aligned}\right\} \qquad 290'')$$

zugleich sind ψ' und ψ^s die Potentialfunktionen dieser beiden Verteilungen.

Formt man ψ^s durch eine teilweise Integration um, wobei das Integral über die unendliche Kugel verschwindet, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \psi^s = \frac{1}{4\pi v}\int &\left[(w'\mathfrak{Y} - v'\mathfrak{Z})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + (u'\mathfrak{Z} - w'\mathfrak{X})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\right. \\ &\left. + (v'\mathfrak{X} - u'\mathfrak{Y})_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\right] dk_1 . \end{aligned}\right\} \qquad 290''')$$

Vergleicht man dies mit der Potentialfunktion (108) eines Magneten, so ergiebt sich, daß durch die Bewegung im elektrischen Felde das Volumenelement dk scheinbare spezifische magnetische Momente erhält von der Größe

$$\left.\begin{aligned} \alpha^s_m = \frac{1}{4\pi v}(w'\mathfrak{Y} - v'\mathfrak{Z}), \quad \beta^s_m = \frac{1}{4\pi v}(u'\mathfrak{Z} - w'\mathfrak{X}), \\ \gamma^s_m = \frac{1}{4\pi v}(v'\mathfrak{X} - u'\mathfrak{Y}); \end{aligned}\right\} \qquad 290'''')$$

diese Ausdrücke sind von der Magnetisierbarkeit des Volumenelementes durchaus unabhängig.

Nur der in den Konvektionsströmen sich äußernde Anteil der Bewegung an diesen Kräften ist einigermaßen durch die Beobachtung

verfolgt, die beiden anderen sind kaum mit Sicherheit nachgewiesen; eine Erscheinung, welche auf die Existenz der Potentialfunktion ψ' zurückgeführt werden kann, hat RÖNTGEN beschrieben.[159]) —

Unsere Fundamentalgleichungen (286) und (286″) lassen sich leicht auf die folgende, für manche Zwecke bequemere Form bringen

$$291)\quad \begin{cases} v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = 4\pi \mathfrak{u} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} u' + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} v' + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} w' + \mathfrak{X}\vartheta' \\ \qquad - \mathfrak{X}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{Z}\frac{\partial u'}{\partial z}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} u' + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} v' + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} w' + \mathfrak{A}\vartheta' \\ \qquad - \mathfrak{A}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{C}\frac{\partial u'}{\partial z}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

worin wie früher

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \vartheta'$$

gesetzt ist.

Faßt man diese Gleichungen mit den Faktoren X, Y, Z, A, B, C zusammen, multipliziert das Resultat mit $dk/4\pi$ und integriert über ein beliebiges Bereich k des körperlichen Systemes, führt auch nach S. 425 die Normalkomponente $\mathfrak{s}$ des Energiestromes durch das Oberflächenelement do der Oberfläche von k ein, so erhält man

$$291')\quad \begin{cases} 0 = \int(\mathfrak{u}X + \mathfrak{v}Y + \mathfrak{w}Z)\,dk - \int \mathfrak{s}\,do \\ \quad + \frac{1}{4\pi}\int\Big\{X\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x}u' + \ldots + \mathfrak{X}\vartheta' - \mathfrak{X}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{Z}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad + A\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x}u' + \ldots + \mathfrak{A}\vartheta' - \mathfrak{A}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{C}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ \qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \Big\}\,dk. \end{cases}$$

Bildet man ferner die Energiegleichung für das Bereich k, so ist außer den S. 424 schon für ruhende Medien in Betracht gezogenen Gliedern die gegen die magnetischen und die elektrischen Druckkräfte geleistete äußere Arbeit zu berücksichtigen. Nennt man die Gesamtkomponenten dieser Drucke $A_x, \ldots A_y$, die Deformationsgeschwindigkeiten, wie früher, $x'_x, \ldots x'_y$, so erhält man

$$291'')\quad \begin{cases} \frac{dE}{dt} = -\int(\mathfrak{u}X + \mathfrak{v}Y + \mathfrak{w}Z)\,dk + \int \mathfrak{s}\,do \\ \qquad - \int(A_x x'_x + B_y y'_y + \ldots + A_y x'_y)\,dk. \end{cases}$$

Summiert man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = \int \Big\{ & \frac{X}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} u' + \ldots + \mathfrak{X}\vartheta' - \mathfrak{X}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{Z}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{A}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} u' + \ldots + \mathfrak{A}\vartheta' - \mathfrak{A}\frac{\partial u'}{\partial x} - \mathfrak{B}\frac{\partial u'}{\partial y} - \mathfrak{C}\frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - (A_x x'_x + B_y y'_y + \ldots + A_y x'_y)\Big\}\, dk. \end{aligned}\right\} \quad 291'''$$

Dieser Ausdruck ist von den Leitfähigkeitskonstanten ganz frei, er enthält außer den Geschwindigkeitskomponenten u', v', w' und ihren Differentialquotienten nur die Komponenten $X, \ldots C$ der Kräfte und $\mathfrak{X}, \ldots \mathfrak{C}$ der Polarisationen. Man möchte daher vermuten, daß er sich direkt und allgemein aus der Definition der elektromagnetischen Energie ε der Volumeneinheit

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}(X\mathfrak{X} + Y\mathfrak{Y} + Z\mathfrak{Z} + A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C}) \qquad 291'''')$$

durch geeignete Variationen ableiten lassen müßte, da ε eben dieselben elektrischen und magnetischen Größen enthält.

Indessen findet das in Wirklichkeit nur statt, wenn man über die direkte Einwirkung der Bewegung auf die innerhalb eines Volumenelementes stattfindenden Polarisationen ein spezielles und sehr eigenartiges Gesetz annimmt, das eine große prinzipielle Bedeutung besitzt.

Um dies hervortreten zu lassen, genügt es, sich auf den einfachsten, auch S. 91 und 197 behandelten Fall zu beschränken, daß die Deformationen des Volumenelementes seine elektrischen und seine magnetischen Konstanten $\mathfrak{d}_{hk}$ und $\mathfrak{m}_{hk}$ nicht ändern.

Wir schreiben, wie S. 468, reziprok zu (42) und (123)

$$X = \mathfrak{c}_{11}\mathfrak{X} + \mathfrak{c}_{12}\mathfrak{Y} + \mathfrak{c}_{13}\mathfrak{Z}, \quad A = \mathfrak{n}_{11}\mathfrak{A} + \mathfrak{n}_{12}\mathfrak{B} + \mathfrak{n}_{13}\mathfrak{C}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

wobei $\mathfrak{c}_{hk} = \mathfrak{c}_{kh}$, $\mathfrak{n}_{hk} = \mathfrak{n}_{kh}$ ist, und die $\mathfrak{c}_{hk}$ und $\mathfrak{n}_{hk}$, ebenso wie die $\mathfrak{d}_{hk}$ und $\mathfrak{m}_{hk}$, von den Deformationen unabhängig sein müssen.

Beziehen wir das Volumenelement auf ein in ihm festes und mit ihm bewegtes Koordinatensystem und verstehen unter der vollständigen Ableitung nach t die ganze durch Translation und Deformation bedingte Änderung einer auf dies System bezogenen Größe, so muß nach dem Vorausgeschickten

$$\frac{d\mathfrak{c}_{hk}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathfrak{n}_{hk}}{dt} = 0$$

sein.

Es wird sonach aus dem umgeformten Ausdruck (291'''')

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}[(\mathfrak{c}_{11}\mathfrak{X}^2 + \ldots + 2\mathfrak{c}_{12}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) + (\mathfrak{n}_{11}\mathfrak{A}^2 + \ldots + 2\mathfrak{n}_{12}\mathfrak{A}\mathfrak{B})]$$

folgen

$$292)\quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{4\pi}\left[\left(X\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + Y\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + Z\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right) + \left(A\frac{d\mathfrak{A}}{dt} + B\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + C\frac{d\mathfrak{C}}{dt}\right)\right],$$

und für ein gegebenes, zu irgend einer Zeit in dk enthaltenes Massenelement muß gelten

$$292')\quad \begin{cases} \dfrac{d(\varepsilon\, dk)}{dt} = \left(\dfrac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon\vartheta'\right)dk \\ \quad = \dfrac{1}{4\pi}\left[X\left(\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{X}\vartheta'\right) + \ldots \right. \\ \quad\quad \left. + A\left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dt} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{A}\vartheta'\right) + \ldots\right] dk. \end{cases}$$

Entwickelt man dagegen den Wert von $d(\varepsilon dk)/dt$ aus der auf ein Volumenelement dk angewandten Formel (291'''), benutzt nebeneinander die Ausdrücke (62') und (134''') für die Druckkomponenten $A_x, \ldots A_y$ und berücksichtigt, daß bei Einführung jenes Koordinatensystemes u', v', w', l', m', n' gleich Null, also

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}y_z,\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}z_x,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}x_y$$

zu setzen ist, so erhält man nach einiger Rechnung

$$292'')\quad \begin{cases} \dfrac{d(\varepsilon\, dk)}{dt} = \dfrac{1}{4\pi}\left[X\left(\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{X}\vartheta'\right) + \ldots \right. \\ \quad\quad \left. + A\left(\dfrac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\mathfrak{A}\vartheta'\right) + \ldots\right] dk. \end{cases}$$

Die Vergleichung der beiden Resultate ergiebt als Bedingungen der Übereinstimmung die Formeln

$$292''')\quad \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}, \ldots \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial t};$$

dieselben sagen aus, daß, auf das mit dem Volumenelement bewegte Koordinatensystem bezogen, die Polarisationen sich genau ebenso ändern, als wenn das Volumenelement ruhte, daß diese Änderungen also von der Bewegung unabhängig sind.

In genauer Übereinstimmung mit der im übrigen in diesem Teil festgehaltenen Auffassung stellen sich also die magnetischen und die elektrischen Polarisationen als Zustände der Materie dar, welche das Volumenelement erfüllt, die demnach, wenn sonstige Ursachen eine Änderung nicht veranlassen, an dem Volumenelement haften und seine Bewegung teilen.

Daß diese Eigenschaft sich für die Polarisationen und nicht für die spezifischen Momente ergiebt, war allerdings nicht mit Sicherheit vorauszusehen; es läßt sich aber dadurch plausibel machen, daß die Polarisationen die wahren elektrischen und magnetischen Ladungen eines Volumenelementes definieren, während die Momente nur die scheinbaren oder influenzierten bestimmen.

Man kann die obige Thatsache, hypothetisch aufgestellt, zur Grundlage einer Theorie der Induktion in bewegten Medien machen, doch ist sie für sich allein nicht ausreichend, um die allgemeinen Formeln (286) und (286″) zu gewinnen.[160])

Beiläufig werde bemerkt, daß eine Erweiterung der Betrachtung durch Berücksichtigung der Veränderungen, welche die Permeabilitäten $\mathfrak{d}_{hk}$ und $\mathfrak{m}_{hk}$ bei Deformationen erleiden, die gezogene Folgerung unberührt läßt. In der That finden sich die hierdurch erforderlichen Zusatzglieder in $d(\varepsilon\, d\, k)/d\, t$ von selbst einander gleich, mag man von dem Ausdruck (291″″) ausgehen und $\mathfrak{d}_{hk}$ und $\mathfrak{m}_{hk}$ als infolge der Deformationen zeitlich veränderlich ansehen, oder mag man in (291‴) die entsprechenden Ergänzungen der Drucke nach (65″) und (138″) einführen.

Diese Resultate geben den bis zu einem gewissen Grade hypothetischen Erweiterungen, die zu den Formelsystemen (286) und (286″) führten, offenbar einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit und sind daher geeignet, die Lücke, welche der Mangel an entscheidenden Erfahrungsthatsachen in den oben gegebenen Ableitungen veranlaßte, befriedigend auszufüllen.

§ 50. Die Grenzbedingungen in einem bewegten System. Gleitflächen. Rotation einer magnetischen, leitenden Kugel innerhalb eines unendlichen Leiters.

Wir haben bei der bisherigen Entwickelung ein körperliches System vorausgesetzt, in welchem sich, wie die physikalischen Eigenschaften, so auch der Bewegungszustand von Ort zu Ort stetig ändert; wir wollen nunmehr die speziellen Verhältnisse näher untersuchen, die in Flächen stattfinden, längs deren das eine oder das andere, oder auch beides unstetig wird.[161])

Bleiben in einer Unstetigkeitsfläche für das physikalische Verhalten die Geschwindigkeitskomponenten stetig, so kann für Punkte, die der Unstetigkeitsfläche hinreichend nahe liegen, von der relativen Bewegung der durch jene getrennten Teile des Systemes überhaupt abgesehen werden, und es bleiben demgemäß die Grenzbedingungen

gültig, die auf S. 421 für ein ruhendes System aufgestellt waren. Neue Bedingungen ergeben sich also nur, wenn in einer Fläche die Geschwindigkeitskomponenten unstetig werden.

Was nun diesen Fall angeht, so wollen wir, wie in anderen Gebieten der Physik, z. B. der Elasticitätslehre, annehmen, daß die Unstetigkeit der Bewegung weder Massen der beiden angrenzenden Körper ineinander hineinschiebt, noch auch zwischen ihnen einen leeren Raum entstehen läßt, d. h., daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit auch in der Unstetigkeitsfläche stetig bleibt. Wir beschränken uns also auf den Fall, daß in jener Fläche die beiden angrenzenden Körper aneinander hingeschoben werden, und nennen jene Flächen demgemäß Gleitflächen. Die für sie geltenden speziellen Formeln leiten wir, wie früher, in der Weise ab, daß wir den Übergang zunächst stetig, aber innerhalb einer sehr dünnen Gleitschicht stattfindend denken und deren Dicke schließlich verschwinden lassen.

Wir betrachten ein Element der Gleitschicht, legen den Koordinatenanfang in einen Punkt derselben und lassen ihn mit jenem wandern, während die Z-Axe dauernd mit der Normalen auf der Grenzschicht zusammenfällt.

Wir nehmen an, daß beim Grenzübergang die Komponenten sowohl der Kräfte, als der Polarisationen, sowohl der wahren elektrischen Strömung, als der Translationsgeschwindigkeit endlich bleiben, und daß gleiches von allen ihren Differentialquotienten nach x und y, also tangential zur Gleitfläche, und von den Ableitungen der Polarisationen nach der Zeit gilt. Dagegen können ihre Differentialquotienten nach z, d. h. nach der Normalen auf der Gleitfläche unendlich werden, mit Ausnahme desjenigen der normalen Geschwindigkeit w', die nach dem oben Gesagten stetig durch die Grenze gehen muß und die, als auf ein mit der Grenzschicht bewegtes Koordinatensystem bezogen, in dem betrachteten Element derselben immer unendlich klein ist.

Multiplizieren wir die beiden ersten Gleichungen (286) mit dz und integrieren über die Dicke der Grenzschicht, welche zwei Teile (h) und (i) des Systemes scheiden möge, so erhalten wir bei Ausschluß flächenhafter elektromotorischer Kräfte und bei Berücksichtigung des Wertes von ϱ_m

$$293)\quad v(Y_i - Y_h) = -\int_h^i \mathfrak{E}\,\frac{\partial u'}{\partial z}\,dz, \quad v(X_i - X_h) = +\int_h^i \mathfrak{E}\,\frac{\partial v'}{\partial z}\,dz;$$

bei gleicher Behandelung und bei Berücksichtigung des Wertes von ϱ_e ergeben die zwei ersten Formeln (286″)

$$v(B_i - B_h) = + \int_h^i \mathfrak{Z} \frac{\partial u'}{\partial z} dz, \quad v(A_i - A_h) = - \int_h^i \mathfrak{Z} \frac{\partial v'}{\partial z} dz. \tag{293'}$$

Um von diesen Bedingungen Gebrauch machen zu können, muß der Verlauf der tangentialen Geschwindigkeiten u' und v', sowie der Normalkomponenten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$ der magnetischen und der elektrischen Polarisationen innerhalb der Grenzschicht bekannt sein. Dies ist im allgemeinen jedoch nicht der Fall, und somit scheint die Methode, die Grenzbedingungen durch einen Grenzübergang aus den Hauptgleichungen zu finden, hier nicht zum Ziele zu führen.

Es giebt indessen wichtige spezielle Fälle, in denen sie das Gewünschte leistet. Hierher gehört vornehmlich der Fall, daß die Grenzfläche o_{hi} keine wahren magnetischen und elektrischen Ladungen trägt; denn dann kann man $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$, weil sie stetig durch die Fläche o_{hi} gehen, in der Grenzschicht konstant setzen und aus dem obigen System ableiten

$$\left.\begin{aligned} v(\overline{Y_i} - \overline{Y_h}) &= \overline{\mathfrak{C}}(\overline{u'_h} - \overline{u'_i}), \quad v(\overline{B_i} - \overline{B_h}) = - \overline{\mathfrak{Z}}(\overline{u'_h} - \overline{u'_i}), \\ v(\overline{X_i} - \overline{X_h}) &= \overline{\mathfrak{C}}(\overline{v'_i} - \overline{v'_h}), \quad v(\overline{A_i} - \overline{A_h}) = - \overline{\mathfrak{Z}}(\overline{v'_i} - \overline{v'_h}). \end{aligned}\right\} \tag{293''}$$

Bezeichnet man die Differenzen paralleler tangentialer Kraftkomponenten zu beiden Seiten der Grenze o_{hi} als relative Kraftkomponenten, so sagen diese Formeln aus, daß die resultierende elektrische, resp. magnetische relative Tangentialkraft normal steht zu der Richtung der relativen Geschwindigkeit und dem Produkt aus dieser in die normale magnetische, resp. elektrische Polarisation gleich ist.

Die Vergleichung der Formeln (293″) mit (250′) zeigt ferner, daß in den Gleitflächen eine Art flächenhafter elektro- und magnetomotorischer Kräfte erregt wird, deren Gesetze sich leicht in Worte fassen lassen.

Kombiniert man die Formeln (293″) mit den dritten Gleichungen der Systeme (286) und (286″), so erhält man, da nach den auf der vorigen Seite getroffenen Festsetzungen $w'_i = w'_h = 0$ ist,

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\mathfrak{X}_i} - \overline{\mathfrak{X}_h}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial x}} + (\overline{\mathfrak{Y}_i} - \overline{\mathfrak{Y}_h}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial y}} &= 0, \\ (\overline{\mathfrak{A}_i} - \overline{\mathfrak{A}_h}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial x}} + (\overline{\mathfrak{B}_i} - \overline{\mathfrak{B}_h}) \overline{\frac{\partial w'}{\partial y}} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{293'''}$$

zwei Formeln, die von den vorigen natürlich abhängig sind. Ist w' von x und y unabhängig, so sind diese Beziehungen identisch erfüllt.

Die vorstehenden Formeln werden insbesondere stets gelten an der Grenze zweier Elektricitätsleiter, von denen keiner ein permanenter Magnet ist, dagegen an der Grenze zwischen zwei Nichtleitern nur dann, wenn die durch Reibung erzeugte Elektrisierung außer Betracht bleiben kann, z. B. auf beiden Körpern jederzeit die gleiche Dichte hat.

An der Grenze eines Leiters und eines Nichtleiters wird im allgemeinen eine flächenhafte elektrische Ladung auftreten, welche die Anwendung der obigen Formeln unmöglich macht; Gleiches gilt im allgemeinen an der Oberfläche eines permanenten Magneten. Es sind dann Grenzbedingungen nur durch eine Hilfshypothese zu gewinnen, die der experimentellen Prüfung bedarf.

Man kann sich im ersteren Falle etwa vorstellen, daß die elektrische Ladung sich nicht in der Grenzschicht selber befindet, innerhalb deren die Änderung der Bewegung stattfindet, sondern an der Oberfläche desjenigen Teiles (i) des Konduktors, der sich wie ein starrer Körper verhält.

Ähnlich, und zwar mit vollständiger Sicherheit, kann man die magnetische Oberflächenladung ausschließlich mit dem permanenten Magneten (i) bewegt denken.

Man hat in diesen Fällen sonach zwei einander äußerst nahe Zwischengrenzen zu unterscheiden; die eine (i, k), welche die Ladung trägt, die zweite (k, h), welche die Gleitfläche bildet. Zwischen ihnen liegt eine sehr dünne Schicht (k), die sich mit dem Körper (i) bewegt, während der Körper (h) selbst an (k) hingleitet.

Bei Voraussetzung der oben benutzten Lage des Koordinatensystemes und bei von (i) nach (h) positiv gerechneter Z-Axe gilt dann nach (250″) bis (250″″) für die Grenze (i, k)

294) $$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{Z}}}{\partial t}\right)_k = \left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{Z}}}{\partial t}\right)_i, \quad \left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{C}}}{\partial t}\right)_k = \left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{C}}}{\partial t}\right)_i \\ \overline{X}_k - \overline{X}_i = \overline{Y}_k - \overline{Y}_i = 0, \quad \overline{A}_k - \overline{A}_i = \overline{B}_k - \overline{B}_i = 0; \end{array}\right.$$

statt der beiden ersten Formeln kann man bei Einführung der wahren Flächendichten σ_e und σ_m auch benutzen

294′) $$\overline{\mathfrak{Z}}_k - \overline{\mathfrak{Z}}_i = 4\pi\sigma_e, \quad \overline{\mathfrak{C}}_k - \overline{\mathfrak{C}}_i = 4\pi\sigma_m.$$

Dagegen folgt für die Grenze (k, h) aus (293″)

$$\left.\begin{aligned} v(\overline{Y_k}-\overline{Y_h}) &= \overline{\mathfrak{C}_h}(\overline{u'_h}-\overline{u'_k}), \quad v(\overline{B_k}-\overline{B_h}) = -\overline{\mathfrak{Z}_h}(\overline{u'_h}-\overline{u'_k}), \\ v(\overline{X_k}-\overline{X_h}) &= \overline{\mathfrak{C}_h}(\overline{v'_k}-\overline{v'_h}), \quad v(\overline{A_k}-\overline{A_h}) = -\overline{\mathfrak{Z}_h}(\overline{v'_k}-\overline{v'_h}). \end{aligned}\right\} \qquad 294'')$$

Wegen des verschwindenden Abstandes beider Grenzen kann man die mit dem Index k versehenen Größen als an beiden Grenzen gleich betrachten; nach Annahme gehen u' und v', nach (294) auch A, B, X, Y stetig durch die Grenze (i, k), man kann somit das System (294″) auf die Form bringen

$$\left.\begin{aligned} v(\overline{Y_i}-\overline{Y_h}) &= \overline{\mathfrak{C}_h}(\overline{u'_h}-\overline{u'_i}), \quad v(\overline{B_i}-\overline{B_h}) = -\overline{\mathfrak{Z}_h}(\overline{u'_h}-\overline{u'_i}), \\ v(\overline{X_i}-\overline{X_h}) &= \overline{\mathfrak{C}_h}(\overline{v'_i}-\overline{v'_h}), \quad v(\overline{A_i}-\overline{A_h}) = -\overline{\mathfrak{Z}_h}(\overline{v'_i}-\overline{v'_h}), \end{aligned}\right\} \qquad 294''')$$

die mit (293″) übereinstimmt bis auf den einen Unterschied, daß nicht $\overline{\mathfrak{C}}_h = \overline{\mathfrak{C}}_i = \overline{\mathfrak{C}}$, $\overline{\mathfrak{Z}}_h = \overline{\mathfrak{Z}}_i = \overline{\mathfrak{Z}}$ ist, von den Normalkomponenten der Polarisationen vielmehr speziell die im ungeladenen Körper gültigen Werte $\overline{\mathfrak{C}}_h$, $\overline{\mathfrak{Z}}_h$ zu nehmen sind.

Diese Formeln lassen sich auch leicht auf den Fall erweitern, daß zwei permanente Magnete aneinander gleiten; hier sind dann drei Zwischengrenzen zu unterscheiden. —

Der bei weitem wichtigste Fall, in dem die vorstehenden allgemeinen Formeln Anwendung finden, ist der homogener, isotroper, und zwar starrer Körper.

In diesem Falle wird wegen

$$x'_x = \ldots = x'_y = 0$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = -n', \quad \frac{\partial u'}{\partial z} = +m', \quad \frac{\partial v'}{\partial z} = -l', \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = +n', \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -m', \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = +l',$$

worin l', m', n' die innerhalb des starren Teiles konstanten Rotationsgeschwindigkeiten um die Koordinatenaxen bezeichnen; setzen wir noch abgekürzt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + u'\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + v'\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} + w'\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} = \frac{D\mathfrak{X}}{Dt}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + u'\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} + v'\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} + w'\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} = \frac{D\mathfrak{A}}{Dt}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad 295)$$

worin die rechts stehenden Ableitungen kurz als totale bezeichnet werden dürfen, so erhalten wir aus (286″)

$$
295')\quad \begin{cases}
v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) = 4\pi\mathfrak{u} + \frac{D\mathfrak{X}}{Dt} + \mathfrak{Y}n' - \mathfrak{Z}m', \\
v\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) = 4\pi\mathfrak{v} + \frac{D\mathfrak{Y}}{Dt} + \mathfrak{Z}l' - \mathfrak{X}n', \\
v\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) = 4\pi\mathfrak{w} + \frac{D\mathfrak{Z}}{Dt} + \mathfrak{X}m' - \mathfrak{Y}l';
\end{cases}
$$

und ebenso aus (286)

$$
295'')\quad \begin{cases}
v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = \frac{D\mathfrak{A}}{Dt} + \mathfrak{B}n' - \mathfrak{C}m', \\
v\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) = \frac{D\mathfrak{B}}{Dt} + \mathfrak{C}l' - \mathfrak{A}n', \\
v\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{D\mathfrak{C}}{Dt} + \mathfrak{A}m' - \mathfrak{B}l'.
\end{cases}
$$

Besteht die Bewegung in einer gleichförmigen Rotation um die Z-Axe, so ist $l' = m' = 0$, $u' = -yn'$, $v' = +xn'$, $w' = 0$; sind gleichzeitig die Verhältnisse des Problemes derartig, daß die Z-Axe eine unendlich-zählige Symmetrieaxe wird, so kann in Skalaren oder in Vektorkomponenten nach der Z-Axe x und y nur in der Verbindung $x^2 + y^2 = a^2$ auftreten, und die partiellen, wie die totalen Differentialquotienten der Polarisationen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{Z}$, sowie die partiellen der übrigen nach der Zeit verschwinden.

Hier wird also noch einfacher

$$
\begin{aligned}
v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) &= 4\pi\mathfrak{l}X + \mathfrak{b}n'\left(Y + x\frac{\partial X}{\partial y} - y\frac{\partial X}{\partial x}\right), \\
v\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) &= 4\pi\mathfrak{l}Y - \mathfrak{b}n'\left(X - x\frac{\partial Y}{\partial y} + y\frac{\partial Y}{\partial x}\right), \\
v\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) &= 4\pi\mathfrak{l}Z, \\
v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) &= +\mathfrak{m}n'\left(B + x\frac{\partial A}{\partial y} - y\frac{\partial A}{\partial x}\right), \\
v\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) &= -\mathfrak{m}n'\left(A - x\frac{\partial B}{\partial y} + y\frac{\partial B}{\partial x}\right), \\
v\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man hier der Symmetrie entsprechend zunächst allgemein

$$
X = -\frac{\partial\varphi'}{\partial x} - \frac{\partial\omega}{\partial y}, \quad Y = -\frac{\partial\varphi'}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial x},
$$
$$
A = -\frac{\partial\psi'}{\partial x} - \frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad B = -\frac{\partial\psi'}{\partial y} + \frac{\partial\chi}{\partial x},
$$

worin φ', ψ', ω, χ nur von a und z abhängen, so ergiebt die Rech-

nung die Klammern auf den rechten Seiten gleich Null, und man erhält dieselben Formeln

$$\left.\begin{array}{l} v\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)=4\pi\mathfrak{l}X, \quad v\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad 295''')$$

die nach (248) und (248') für den stationären Zustand in einem ruhenden Medium gelten.

Hier wird also die induzierende Wirkung der Bewegung sich nur in den Gleitflächen äußern.

Das zweite System (295''') gestattet nunmehr einfacher, als zuvor, zu setzen

$$X=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x}, \quad Y=-\frac{\partial\varphi'}{\partial y}, \quad Z=-\frac{\partial\varphi'}{\partial z}, \qquad 296)$$

wo φ' die frühere Bedeutung der Potentialfunktion freier elektrischer Ladungen besitzt; für sie ergiebt das erste System die Bedingung

$$\triangle\varphi'=0, \qquad 296')$$

welche die Existenz räumlicher elektrischer Ladungen ausschließt.

Schreibt man weiter

$$A=-\frac{\partial\psi'}{\partial x}-\frac{\partial\chi}{\partial y}, \quad B=-\frac{\partial\psi'}{\partial y}+\frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad C=-\frac{\partial\psi'}{\partial z}, \qquad 296'')$$

so ist ψ' die Potentialfunktion einer freien magnetischen Verteilung, während χ als von Stromläufen herrührend zu denken ist. Für ψ' gilt die Formel

$$4\pi\varrho_m=-\mathfrak{m}\triangle\psi', \qquad 296''')$$

worin ϱ_m die räumliche Dichte wahrer Magnetismen bezeichnet; für χ erhält man, indem man eine irrelevante Funktion von z hineingezogen denkt,

$$\triangle\chi=0 \text{ und } v\frac{\partial\chi}{\partial z}=4\pi\mathfrak{l}\varphi'. - \qquad 296'''')$$

Wir wollen uns nun außer dem rotierenden Leiter (i) einen zweiten, ruhenden (a) gegeben denken, der ebenfalls die Form eines Rotationskörpers hat und mit seiner Axe in die des bewegten Leiters fällt, denselben in beliebigen Flächen berührend. Ein Grenzfall ist der, daß der ruhende Leiter, etwa eine reibungsfreie leitende Flüssigkeit, den ganzen unendlichen Raum außerhalb des bewegten ausfüllt und letzteren an dessen ganzer Oberfläche leitend berührt.

Es sind dann die Normalkomponenten von R und von K durch $-\partial\psi'/\partial n$ und $-\partial\varphi'/\partial n$ gegeben, ebenso die Tangentialkomponenten an den Meridiankurven s durch $-\partial\psi'/\partial s$ und $-\partial\varphi'/\partial s$; zu beiden liefert χ keinen Anteil. Dagegen sind die

Komponenten nach der Tangente an den **Breitenkreisen** b resp. $\partial\chi/\partial a$ und Null.

Dies ist zu berücksichtigen bei der Aufstellung der Grenzbedingungen. Da in der Zwischengrenze eine Bewegung nur nach der Richtung der Breitenkreise stattfindet, so gehen die Komponenten nach dieser Richtung stetig durch die Grenze, es wird sonach

297) $$\overline{\frac{\partial\chi_i}{\partial a}} = \overline{\frac{\partial\chi_a}{\partial a}}.$$

Sind auf dem Leiter (a) keine flächenhaften Ladungen vorhanden, so gilt für die Komponenten nach den Meridiankurven nach (294‴)

297′) $$\begin{cases} v\left(\overline{\frac{\partial\varphi_i'}{\partial s}} - \overline{\frac{\partial\varphi_a'}{\partial s}}\right) = \mathfrak{m}_a \overline{n'a}\, \overline{\frac{\partial\psi_a'}{\partial n_a}}, \\ v\left(\overline{\frac{\partial\psi_a'}{\partial s}} - \overline{\frac{\partial\psi_i'}{\partial s}}\right) = \mathfrak{b}_a \overline{n'a}\, \overline{\frac{\partial\varphi_a'}{\partial n_a}}; \end{cases}$$

dabei ist s von der $+Z$-Axe nach der XY-Ebene hin positiv gerechnet. Zugleich muß nach (294′) gelten, wenn σ_e und σ_m verschwinden,

297″) $$\mathfrak{m}_i \overline{\frac{\partial\psi_i'}{\partial n_i}} + \mathfrak{m}_a \overline{\frac{\partial\psi_a'}{\partial n_a}} = 0,\ \ \mathfrak{b}_i \overline{\frac{\partial\varphi_i'}{\partial n_i}} + \mathfrak{b}_a \overline{\frac{\partial\varphi_a'}{\partial n_a}} = 0.$$

Liegt dagegen auf der Oberfläche des bewegten Körpers (i) wahrer Magnetismus, so kann man die Formeln (297′) gemäß dem S. 509 Gesagten beibehalten; an Stelle der ersten Bedingung (297″) tritt aber

297‴) $$\mathfrak{m}_i \overline{\frac{\partial\psi_i'}{\partial n_i}} + \mathfrak{m}_a \overline{\frac{\partial\psi_a'}{\partial n_a}} = -4\pi\sigma_m.$$

Ist der rotierende Körper endlich, und liegen auch die induzierenden Magnetismen im Endlichen, so müssen φ', ψ', χ sich im Unendlichen verhalten, wie die Potentialfunktionen endlicher, im Endlichen liegender und zwar **neutraler** Massen. Hiermit sind die Bedingungen für φ', ψ' und χ erschöpft. —

Hat der bewegte Körper Kugelform und befindet er sich in einem unendlichen, homogenen, ihn ringsum berührenden Medium, so kann man leicht partikuläre Integrale finden, die einer bestimmten Magnetisierung desselben entsprechen.

Man kann z. B. setzen

298) $$\begin{cases} \varphi_a' = p_a \dfrac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}, \quad \varphi_i' = p_i(z^2 - \tfrac{1}{3}a^2), \\ \psi_a' = q_a \dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad \psi_i' = q_i z + q_i' z^3. \end{cases}$$

Dann nehmen die Bedingungen (297') die Form an

$$\left.\begin{aligned} -v(3p_i r_1^5 - 6p_a) &= \mathfrak{m}_a n' r_1^2 \, 2 q_a, \\ v(q_a + r_1^3 q_i + 3 r_1^5 q_i' \cos^2\vartheta) &= \mathfrak{d}_a n' \, 3 p_a (1 - 3\cos^2\vartheta), \end{aligned}\right\} \quad 298')$$

wobei $z/r = \cos\vartheta$, $a/r = \sin\vartheta$ ist, und r_1 den Kugelradius bezeichnet. Ferner wird

$$\chi_a = \frac{4\pi \mathfrak{l}_a}{v} p_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad \chi_i = \frac{4\pi \mathfrak{l}_i}{v} p_i (\tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{2} a^2 z), \qquad 298'')$$

und die Bedingung (297) lautet

$$\frac{3\, \mathfrak{l}_a p_a}{r_1^5} + \mathfrak{l}_i p_i = 0. \qquad 299)$$

Weiter nimmt die zweite Bedingung (297'') die Gestalt an

$$\frac{3\, \mathfrak{d}_a p_a}{r_1^5} + \mathfrak{d}_i p_i = 0; \qquad 299')$$

sie wird hierdurch im allgemeinen mit der vorhergehenden unvereinbar, und macht somit den ganzen Ansatz (298) unbrauchbar. Ausgenommen sind zwei spezielle Fälle, welche direktes Interesse besitzen. Erstens der, daß beide Medien identisch sind; dann ist $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{l}_a$, $\mathfrak{d}_i = \mathfrak{d}_a$, und die beiden Bedingungen reduzieren sich auf dieselbe Formel

$$\frac{3\, p_a}{r_1^5} + p_i = 0. \qquad 299'')$$

Zweitens der, daß beide Medien Dielektrica sind; dann ist die erste Formel durch $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{l}_a = 0$ identisch erfüllt, und die zweite widerspricht ihr nicht.

Indessen ist die Tragweite der Lösung noch eine größere; denn bei allen Rotationsgeschwindigkeiten, welche nach S. 375 die Leitungsströme als quasi-stationäre zu betrachten gestatten, können die Dielektricitätskonstanten als unendlich klein angesehen werden, und kann man daher hier zu a n g e n ä h e r t e r Lösung die ganze Bedingung (299') fallen lassen.

Wir wollen den ersten der genannten speziellen Fälle behandeln.

Hier gestatten die drei Gleichungen (298') und (299'') die p_i, q_a, q_i, q_i' sämtlich durch p_a auszudrücken; die Ansätze (298) und (298'') stellen also eine Lösung dar, und es handelt sich nur noch darum, die magnetische Verteilung zu bestimmen, die ihr entspricht. Man findet, daß die Kugel ein lokales magnetisches Moment besitzt von der Größe

$$\mu = + \frac{1}{4\pi} \left[\mathfrak{m}_i (q_i + 3 q_i' z^2) - \frac{\mathfrak{m}_a \, 2 q_a}{r_1^3} \right]; \qquad 300)$$

die magnetische Axe liegt der Z-Axe parallel. Die Kugel ist also ungleichförmig magnetisiert.

Obgleich die elektrische Potentialfunktion φ' einwertig ist, kommen elektrische Strömungen zustande, da die Gleitfläche für φ' eine Unstetigkeitsfläche ist; die Verhältnisse liegen also ähnlich, als wenn sich in der Kugelfläche elektromotorische flächenhafte Kräfte von örtlich wechselnder Stärke befänden.

In der That ergiebt sich

$$300') \qquad \overline{\varphi'_a} - \overline{\varphi'_i} = P_{ia} = \frac{p_a}{2 r_1^5}(\overline{a^2} - 2\overline{z^2}) = \frac{p_a}{2 r_1^3}(1 - 3\cos^2\vartheta);$$

die Potentialdifferenz ist also positiv am Äquator, negativ an den Polen, beide Zonen sind geschieden durch die Breitenkreise $\cos^2\vartheta = \frac{1}{3}$.

Die Stromlinien sind geschlossene Kurven, die in Meridianebenen liegen und ganz innerhalb eines Quadranten verlaufen. Grenzfälle bilden nach außen die z- und a-Axe, nach innen der dem oben erwähnten Breitenkreise entsprechende neutrale Punkt $r = r_1$, $\cos^2\vartheta = \frac{1}{3}$.

Die Lösung ist sogleich auf den zweiten speziellen Fall zu übertragen, daß die Medien (i) und (a) beide Dielektrica sind und keine wahren elektrischen Ladungen tragen. Natürlich kommt jetzt kein Leitungsstrom zustande, aber eine elektrische Polarisation tritt an seine Stelle. —

Litteratur zum IV. Teil.

F. NEUMANN, Vorlesungen über die Theorie des Potentials. Leipzig 1887. Theorie des Magnetismus. Leipzig 1881. Theorie der elektrischen Ströme. Leipzig 1884. — BEER, Einleitung in die Lehre von der Elektrostatik, dem Magnetismus und der Elektrodynamik. Braunschweig 1865. — KIRCHHOFF, Vorlesungen über die Theorie der Elektricität und des Magnetismus. Leipzig 1891. — MASCART, Traité d'électricité statique. Paris 1876. — MAXWELL, Treatise on Electricity and Magnetism. London 1873. Übers. von WEINSTEIN. Berlin 1883. — WIEDEMANN, Lehre von der Elektricität, 1. Aufl. Braunschweig 1882—83; 2. Aufl. 1895—96. — MASCART et JOUBERT, Leçons sur l'électricité. Paris 1882, 1886. — DUHEM, Leçons sur l'électricité et le magnétisme. Paris 1891, 1892. — POINCARÉ, Électricité et optique, I u. II. Paris 1890, 1892. Übers. Berlin 1893—95. Les Oscillations électriques. Paris 1894. — BOLTZMANN, Vorlesungen über MAXWELL's Theorie der Elektricität und des Lichtes, I u. II. Leipzig 1891 u. 1893. — HEAVISIDE, Electrical Papers I u. II. London 1892. — J. J. THOMSON, Recent researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893. — DRUDE, Physik des Äthers. Stuttgart 1894. — FÖPPL, Einführung in die MAXWELL'sche Theorie der Elektricität. Leipzig 1894. — A. GRAY, Absolute Measurements in Electricity and Magnetism. London 1888, 1893. — TUMLIRZ, Elektromagnetische Theorie des Lichtes. Leipzig 1883.

I. Kapitel. [1]) COULOMB, Hist. et Mém. de l'Acad. d. sciences. Paris 1785, S. 569—611. Klassikerausgabe Nr. 13, 1. u. 2. Abhandl. — [2]) CANTON, Electrical experiments 1753, in FRANKLIN experiments and observations, 5th edition, London 1769, S. 143 ff. — [3]) GALVANI, De viribus electricitatis in motu musculari commentatio. Bologna 1791. — [4]) v. HELMHOLTZ, Pogg. Annalen **89**, S. 228, 1853. Ges. Abhandl. I, S. 489—91. — [5]) VOLTA, Annali di chimica XIX, S. 38; Annales de chimie XL, S. 225, § 23, 1802. — [6]) F. NEUMANN, Theorie des Potentials, Kap. 9, § 8. MAXWELL, Treatise I, Art. 117. — [7]) MAXWELL, Treatise I, Art. 50, S. 52, Art. 87, S. 106. — [8]) W. THOMSON, LIOUVILLE's Journal X, S. 364, 1845; Papers on Electr. and Magn. S. 144. — [9]) MURPHY, Phil. Magazine (3) II, S. 350, 1833. — [10]) W. THOMSON, Phil. Magazine (4) V, S. 287, 1853; Papers S. 86—97. KIRCHHOFF, CRELLE's Journal **59**, S. 89, 1861; Ges. Abhandl. S. 78 und Nachtrag dazu S. 131. — [11]) MAXWELL, Treatise I, Art. 87—89. — [12]) GREEN, Essay on the application of math. analysis on the theories of electr. and magnetism, 1828, Art. 8; Papers S. 42—46. — [13]) MAXWELL, Treatise I, Art. 84. — C. NEUMANN, Berichte der sächs. Ges. d. Wiss. **42**, S. 88—104, 1890. — [15]) MAXWELL, Treatise I, Art. 79, 80. — [16]) SILOW, Pogg. Annalen **156**, S. 389, 1875. — [17]) FARADAY, Experimental Researches, 11. Reihe, § 1296 (spezifische Induktionskapazität). BOLTZMANN, Pogg. Annalen **151**, S. 463, 1874. — [18]) HERTZ, Wied. Ann. **40**, S. 577, § 10, 1890; Ges. Abhandl. II, S. 227—228. — [19]) POISSON, Mém. de l'Acad. Paris. V, S. 294, 1822. — [20]) HERTZ, l. c. § 10, S. 227. — [21]) HERTZ, l. c. § 9, S. 224. — [22]) W. THOMSON, Papers on Electr. and Magn. S. 489. — [23]) MAXWELL, Treatise II, Art. 794. — [24]) v. HELMHOLTZ, Berl. Sitzungsber. 1881, S. 197; Ges. Abhandl. I, S. 805, 810. — [25]) KIRCHHOFF, Wied. Ann. **24**, S. 52, § 2, 1884; Ges. Abhandl. Nachtrag S. 98—100. — [26]) W. THOMSON, Phil. Magazine (4) I, S. 177—186, 1851; Papers on Electr. and Magn. S. 485. — [27]) v. HELMHOLTZ, l. c. S. 191 bezw. 798. KIRCHHOFF, l. c. S. 100—102. — [28]) MAXWELL, Treatise I, Art. 106. — [29]) HERTZ, Wied. Ann. **41**, S. 369, § 6, 1890. — [30]) KIRCHHOFF, l. c. S. 103. — [31]) VOIGT, Nachr. k. Ges. d. Wiss. Göttingen 1894, S. 346; Wied.

Ann. **55**, S. 704, 1895. — [32]) LIPPMANN, Ann. de chim. et phys. (5) XXIV, S. 164—166, 1881; Journ. de phys. (1) X, S. 391, 1881. W. THOMSON, Math. phys. Papers I, S. 316. — [33]) VOIGT, Allg. Theorie der piezo- u. pyroelektr. Ersch. an Kryst., Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss. Göttingen, **36**, 1890. Wied. Ann. **45**. S. 524, 526, 1892. — [34]) VOIGT, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1894, S. 343; Wied. Ann. **55**, S. 701—731, 1895. — [35]) KORTEWEG, Wied. Ann. **9**, S. 57, 1880. LORBERG, Wied. Ann. **21**, S. 315—317, 1884. KIRCHHOFF, Wied. Ann. **24**, S. 70, 1885; Ges. Abhandl. Nachtrag, S. 109—113. — [36]) BOLTZMANN, Pogg. Ann. **155**, S. 403—421, 1875. — [37]) CASSIE, Proc. Roy. Soc. London **48**, S. 357, 1889; Phil. Transactions 1890, I, S. 1. NEGREANO, Compt. rend. CXIV, S. 345, 1892. PALAZ, Beibl. **11**, S. 259 (nach Inauguraldissertation Zürich 1886).

II. Kapitel. [38]) POISSON, Mém. de l'Acad. Paris V, 1822, S. 267—269. — [39]) W. THOMSON, Trans. Roy. Soc. 1850; Papers on Electr. and Magn. § 503, S. 380. — [40]) GAUSS, Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata, Pogg. Ann. **28**, S. 241, 1833; Werke V, S. 79, § 1. — [41]) RIECKE, Pogg. Ann. **149**, S. 62—66, 1873. — [42]) GAUSS, Resultate aus den Beob. des magnet. Vereins, I, Göttingen 1837, S. 1—19; Jahrb. von SCHUMACHER 1836, S. 1—47; Werke V, S. 311—344. — [43]) GAUSS, Resultate etc. III, S. 1—57, 1839; Werke V, S. 119—180. — [44]) W. THOMSON, Papers on Electr. and Magn., S. 489; Deutsche Ausgabe, Berlin 1890, S. 471. — [45]) POISSON, Mém. Acad. Paris V, 1822, S. 299—303. NEUMANN, Vorl. über Magnetismus, §§ 12, 13. KIRCHHOFF, CRELLE's Journal **48**, S. 348 (Anhang), 1854. — [46]) HERTZ, Wied. Ann. **40**, S. 577, § 9, 1890; Ges. Abhandl. II, S. 224. — [47]) W. THOMSON, Phil. Magazine (4) I, 1851, S. 177; Papers on Electr. and Magn. S. 471—487. — [48]) W. WEBER, Elektrodynam. Maßbest., Abh. sächs. Ges. d. Wiss. **1**, 1852, S. 569; Werke III, S. 543—547. KIRCHHOFF, CRELLE's Journal **48**, S. 348, 1853; Ges. Abh. S. 217. — [49]) KIRCHHOFF, Wied. Ann. **24**, S. 52, 1884; Ges. Abhandl. Nachtrag, Abh. 7. — [50]) THOMSON, Papers on Electr. and Magn. S. 485. — [51]) EWING, Proc. Roy. Soc. 1881, S. 22; Phil. Trans. 1885, S. 524; Magnetic Induction (Berlin 1892), Kap. V. WARBURG, Wied. Ann. **13**, S. 141, 1881.

III. Kapitel. [52]) OERSTED, SCHWEIGGER's Journal f. Chem. u. Phys. **29**, S. 275—281, 1820; GILBERT's Ann. **66**, S. 295, 1820. — [53]) MAXWELL, Phil. Transactions CLV, S. 482, 1865; Treatise II, Art. 607; Scientific Papers I, S. 557. — [54]) R. KOHLRAUSCH, Pogg. Ann. **75**, S. 220, 1848 und **78**, S. 1, 1849. — [55]) KIRCHHOFF, Pogg. Ann. **78**, S. 509, 1849 (nach F. NEUMANN's Vorlesung). Für Krystalle: MAXWELL, Treatise I, Art. 297. — [56]) HERTZ, Wied. Ann. **40**, S. 577, §§ 7 u. 9, 1890; Ges. Abh. II, S. 219—224. — [57]) ROWLAND, Pogg. Ann. **158**, S. 487—493, 1876. — [58]) W. WEBER, Resultate aus den Beob. des magn. Vereins 1840, S. 86; Werke III. S. 9, 321. — [59]) W. WEBER, Elektrodynam. Maßbest., Abh. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1857, S. 228; Werke III, S. 615. — [60]) BIOT u. SAVART, Annales de chim. et phys. XV, S. 222—223, 1820. — [61]) POUILLET, Pogg. Ann **42**, S. 281, 1837. W. WEBER, Pogg. Ann. **55**, S. 27, 1842; Werke III, S. 6—12. — [62]) W. WEBER, (1864), Werke, IV, S. 602. — [63]) W. WEBER u. R. KOHLRAUSCH, Elektrodynam. Maßbest., Abh. k. sächs. Ges. d. Wiss. **3**, S. 221—290, 1857; Werke III, S. 609—674; Pogg. Ann. **99**, S. 10, 1856. — [64]) F. NEUMANN, Vorlesungen über galvan. Ströme. § 62. — [65]) AMPÈRE, Recueil d'observations électro-dynamiques, Paris 1822, p. 164; Ann. de chim. et phys. XV, S. 172, 1820; XVIII, S. 320—322, 1821. — [66]) F. NEUMANN (Vorlesungen über galvan. Ströme). — [67]) F. NEUMANN, Abh. d. Berl. Akad. 1845, § 11, S. 67; Klassikerausgabe Nr. 10, S. 10. — [68]) KIRCHHOFF, Vorlesungen üb. Elektr. u. Magn. S. 213; Ges. Abh. S. 155; Pogg. Ann. **102**, S. 529, 1857. — [69]) AMPÈRE, Théorie des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience, Mém. de l'Acad. VI, 1823, (Neue Ausgabe, Paris 1883), S. 184 ff. — [70]) W. THOMSON, Papers on Electr. and Magn. § 571. MAXWELL, Treatise II, Art. 544, 580. — [71]) KIRCHHOFF, Berl. Sitzungsber. 1875, S. 487—497; Ges. Abh. S. 56; Elektr. u. Magn., 11. Vorl., § 4—6. — [72]) KIRCHHOFF, Pogg. Ann. **64**, S. 508, 1845; Ges. Abh. S. 11. — [73]) LOMMEL, Wied. Ann. **48**, S. 462, 1893; **50**. S. 316, 1893. — [74]) NOBILI, Ann. de chim. et phys. **34**, S. 192, 1827; **37**, S. 211 1828. RIEMANN, Pogg. Ann. **95**, S. 130, 1855. VOIGT, Wied. Ann. **17**, S. 257,

1882; **19**, S. 183, 1883. — [75]) HALL, Sillim. Journ. (3) XIX, S. 200—206, 1880; XX, S. 161, 1881; Phil. Magazine (5) IX, S. 225—231; X, S. 301—328, 1880; XII, S. 157, 1881. — [76]) OHM, Die galvanische Kette, Berlin 1827. — [77]) PLÜCKER, CRELLE's Journal **35**, S. 93—99, 1847; Ges. Abh. II, S. 703. — [78]) KIRCHHOFF, Pogg. Ann. **64**, S. 512, 1845; Ges. Abh. S. 15; Elektr. u. Magn., 9. Vorl., § 5. — [79]) MAXWELL, Treatise, I, Art. 280. — [80]) W. WEBER, Pogg. Ann. **67**, S. 273, 1846. WHEATSTONE, Pogg. Ann. **62**, S. 535, 1844. — [81]) F. NEUMANN, (Vorl. über galvan. Ströme); Züricher Vierteljahrsschrift **2**, S. 213, 1857. — [82]) MAXWELL, Treatise I, Art. 281, 282. — [83]) JOULE, Phil. Magazine (3) XXIII, S. 263, 347, 435, 1843; „Das mechanische Wärmeäquivalent", Braunschweig 1872, S. 1—40. — [84]) PELTIER, Ann. de chim. et phys. LVI, S. 371—385, 1834; Pogg. Ann. **43**, S. 324, 1838. — [85]) VOIGT, Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1895, S. 135—154. — [86]) W. THOMSON, Transactions R. Soc. Edinb. XXI, S. 143, 1854; Math. phys. Papers I, S. 316—319; II, S. 192—266. LE ROUX, Ann. de chim. et de phys. (4) X, S. 258—277, 1867. — [87]) W. THOMSON, Trans. R. Soc. Edinb. XXI, S. 123—173; Math. phys. Papers I, Art. 48, S. 249 ff., §§ 112—120. — [88]) W. THOMSON, Trans. R. Soc. Edinb. XXI, S. 153—167; Math. phys. Papers I, S. 266—284. — [89]) v. ETTINGSHAUSEN u. NERNST, Wied. Ann. **29**, S. 343—347, 1886; v. ETTINGSHAUSEN, Wied. Ann. **31**, S. 737—739, 1887; NERNST, Wied. Ann. **31**, S. 760—789, 1887. — [90]) ARRHENIUS, Bihang till Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar VIII, Nr. 13 u. 14, 1884; Ztschr. f. phys. Chemie **1**, S. 631—648, 1887. — [91]) FARADAY, Experim. Researches on Electricity, Ser. VII, Art. 821 u. 830; Phil. Transactions 1834, S. 102—122; Pogg. Ann. **33**, S. 495, 498, 1834. — [92]) HITTORF, Pogg. Ann. **89**, S. 177—211, 1853; **98**, S. 1—33, 1856; **103**, S. 1—56, 1858; **106**, S. 337—411, 513—586, 1859; Klassikerausgabe Nr. 21 u. 23. — [93]) F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **6**, S. 151—152, 1879. — [94]) F. KOHLRAUSCH, Wied. Ann. **6**, S. 171, 1879; **26**, S. 218, 1885. — [95]) OSTWALD, Ztschr. f. phys. Chemie **2**, S. 277—78, 1888. PLANCK, Wied. Ann. **34**, S. 139, 1888. — [96]) v. HELMHOLTZ, Sitzungsber. d. Akad. Berlin 1882, S. 22, 825; Ges. Abhandl. II, S. 958, 979. — [97]) NERNST, Ztschr. f. phys. Chemie **2**, S. 617—622, 1888; Theoretische Chemie, Stuttgart 1893, S. 308—310. — [98]) v. HELMHOLTZ, Ges. Abhandl. I, S. 840. NERNST, Sitzungsber. d. Akad. Berlin 1889, S. 83—95; Ztschr. f. phys. Chemie **2**, S. 634—636, 1888; **4**, S. 129—181 (§§ 3, 7, 10), 1889; Theoret. Chemie, S. 564. PLANCK, Wied. Ann. **39**, S. 161 u. **40**, S. 561, 1890. — [99]) NERNST, Ztschr. f. phys. Chemie **4**, S. 176—180, 1889; Theoret. Chemie, S. 568—69. — [100]) MAXWELL, Phil. Transactions CLV, S. 480, 1865; Treatise II, Art. 610. — [101]) HERTZ, Wied. Ann. **34**, S. 273, 1888; Ges. Werke II, Abhandl. 6. — [102]) W. WEBER, Elektrodynam. Maßbest., Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. **10**, S. 41, 1871; Werke IV, S. 281—285. RICHARZ, Sitzungsber. d. Münchener Akad. **24**, S. 32—38, 1894. — [103]) HERTZ, Wied. Ann. **41**, S. 374, 1890; Ges. Werke II, Abh. 14, S. 261.

IV. Kapitel. [104]) FARADAY, Exp. Researches in Electr., I. Reihe, Phil. Trans. 1831, und II. Reihe, ibid. 1832. — [105]) F. NEUMANN, Abh. d. Berl. Akad. 1848, S. 1 (Klassikerausgabe Nr. 36); Vorl. über elektr. Ströme S. 278, 294. — [106]) W. WEBER, Elektrodynam. Maßbest., insbes. Widerstandsmessungen, Abh. d. sächs. Ges. d. Wiss. **1**, 1852, S. 199; Werke III, Abh. 10, Art. 10, S. 321. — [107]) MERCADIER, Compt. rend. **116**, S. 800, 872, 974, 1893 (in anderer Darstellung). — [108]) W. WEBER, Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen, V, 1853; Pogg. Ann. **90**, S. 209 —247, 1853; Werke II, S. 277—327; III, S. 322 (absolute Widerstandsbest.). — [109]) LENZ, Pogg. Ann. **31**, S. 485, 1834. — [110]) HELMHOLTZ, Erhaltung der Kraft, S. 64; Ges. Abhandl. I, S. 62. — [111]) HELMHOLTZ, l. c., S. 67 bezw. 64. v. LANG, Theoret. Physik (2. Aufl., Braunschweig 1891), § 213. — [112]) MAXWELL, Treatise II, Art. 578 (S. 272 der Übers.). — [113]) v. LANG, Theoretische Physik, § 215, S. 443—444. — [114]) v. LANG, l. c., S. 447. — [115]) MAXWELL, Treatise II, Art. 686 (S. 391 der Übers.). — [116]) v. LANG, l. c., S. 449. — [117]) MASCART et JOUBERT, Leçons sur l'électricité, I, S. 601—602, Art. 551, 552. — [118]) MAXWELL, Treatise II, Art. 757 (S. 499 der Übers.). — [119]) FEDDERSEN, Pogg. Ann. **113**, S. 437, 1861; **116**, S. 132—171, 1862. LORENZ, Wied. Ann. **7**, S. 161, 1879. — [120]) SCHILLER, Pogg. Ann. **152**, S. 535—565, 1874. — [121]) PALAZ, Journ. de physique (2) V, S. 370, 1886.

— [122]) Nernst, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1893, S. 762; Ztschr. f. phys. Chemie **14**, S. 622—663, 1894. — [123]) Kirchhoff, Pogg. Ann. **102**, S. 530, 1857; Vorlesungen üb. Elektr. u. Magnet. S. 219; Ges. Abhandl. S. 155. — [124]) Heaviside, Phil. Magaz. (5) XIX, S. 405, 1888; Electrical Papers I, S. 449, II, S. 8. Hertz, Wied. Ann. **23**, S. 100, 1884; **40**, S. 594, 1889; Ges. Werke II, S. 225. — [125]) P. Curie, Journ. de phys. (3), III, S. 393—415, 1894. — [126]) Maxwell, Phil. Transactions CLV, S. 497—501, 1865; Treatise on Electr. and Magn. II, Kap. XX. Hertz, l. c., S. 251. — [127]) Hertz, Wied. Ann. **40**, S. 591, 1889; Ges. Werke II, S. 222. — [128]) Maxwell, Treatise II, Art. 541. — [129]) Poynting, Phil. Transactions CLXXV, S. 343—349, 1884. — [130]) Kirchhoff, Pogg. Ann. **102**, S. 543; Ges. Abhandl. S. 167. — [131]) Stefan, Wied. Ann. **41**, S. 400—411, 1890. — [132]) Hertz, Über die Induktion in rotierenden Kugeln, Inauguraldissert. Berlin 1880; Ges. Werke I, S. 37—134. — [133]) Maxwell, Treatise on Electr. and Magn. II, Art. 656—665. — [134]) Arago, Ann. de chim. et phys. XXVII, S. 363, 1824; XXVIII, S. 325, 1825; XXXII, S. 217, 1826. — [135]) Hertz, Wied. Ann. **31**, S. 421—447, 1887; **34**, S. 155—169 u. 273—285, 1888; Ges. Werke II, Nr. 2, 5, 6. — [136]) Hertz, Wied. Ann. **31**, S. 435; **34**, S. 156; Ges. Werke II, S. 46, 88. — [137]) Hertz, Wied. Ann. **31**, S. 445; Werke II, S. 56. Righi, Mem. Accad. delle Scienze Bologna (5) IV, S. 487, 1894; Nuovo Cimento (4) I, S. 25—40, 1895. Lebedew, Wied. Ann. **56**, S. 1—17, 1895. — [138]) Hertz, Wied. Ann. **36**, S. 1—15, 1888; Ges. Werke II, Nr. 9. — [139]) Hertz, Wied. Ann. **34**, S. 167—168; Ges. Werke II, S. 99—100. — [140]) Blondlot, Comptes rend. CXIII, S. 629, 1891. — [141]) Hertz, Wied. Ann. **31**, S. 436; **34**, S. 156; Ges. Werke II, S. 47, 88—89. — [142]) Drude, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1894, Nr. 3; Wied. Ann. **53**, S. 721—745, 1893; Poincaré, Oscillations électriques, S. 220—240. — [143]) Sarasin u. de la Rive, Arch. de Genève (3) XXIII, S. 113, 1890. — [144]) Bjerknes, Wied. Ann. **44**, S. 74—91 u. S. 92—101, 1891; Bihang till k. Svenska Vetensk.-Akad. Handlingar **20**, I, Nr. 4, 1895. Poincaré, Électricité et Optique II, Note V; Arch. de Genève, XXV, S. 609, 1891. — [145]) Maxwell, Treatise II, Art. 790, 791. — [146]) Lebedew, Wied. Ann. **56**, S. 6—8, 1895. — [147]) Boltzmann, Wiener Ber. (2) **68**, S. 81, 1870; **70**, S. 307, 1874; Pogg. Ann. **153**, S. 525, 1874. — [148]) Bjerknes Wied. Ann. **47**, S. 69, 1892. Klemencic, Wied. Ann. **50**, S. 456, 1893. Drude, Physik des Äthers, S. 561—562. — [149]) Hertz, Wied. Ann. **34**, S. 610, 1888; Ges. Werke II, Abh. 8. Sarasin und de la Rive, Arch. de Genève (3), XXIX, S. 358, 442, 1893. — [150]) Poincaré, Oscillations électriques, Chap. II. Drude, Physik des Äthers, S. 449. — [151]) Lecher, Wied. Ann. **41**, S. 850, 1890. — [152]) Hertz, Wied. Ann. **36**, S. 19, 1888; Ges. Werke II, S. 165. — [153]) Blondlot, Compt. rend. CXIII, S. 628, 1891. — [154]) Arons und Rubens, Wied. Ann. **42**, S. 581, 1891. Waitz, Wied. Ann. **44**, S. 527, 1891. Cohn, Wied. Ann. **45**, S. 370, 1892. Drude, Wied. Ann. **55**, S. 633, 1895. — [155]) F. Neumann, Sitzungsber. Akad. Berlin 1847, S. 341; Vorlesungen üb. elektr. Ströme S. 303—305. W. Weber, Elektrodynam. Maßbest., Abhandl. sächs. Ges. d. Wiss. **1**, 1852, Art. 38; Werke III, S. 407—417. — [156]) Hertz, Wied. Ann. **41**, S. 374, 1890; Ges. Werke II, S. 261. — [157]) Fizeau, Ann. de chim. et de phys. (3) LVII, S. 385, 1859; Pogg. Ann. Erg.-Bd. **3**, S. 457. Michelson und Morley, American Journ. of Science (3), XXXI, S. 377, 1886. — [158]) Lorentz, Versuch einer Theorie der elektr. u. opt. Erscheinungen in bewegten Körpern. Leyden 1895. — [159]) Röntgen, Berliner Sitzungsber. 1885, S. 195—198. — [160]) Hertz, Wied. Ann. **41**, S. 360—398; Ges. Werke II, Abhandl. 14. — [161]) Hertz, Wied. Ann. **41**, S. 385—389; Ges. Werke II, S. 271—275. —

V. Teil.

Optik.

I. Kapitel.

Die allgemeinen Grundlagen der Theorie.

§ 1. Die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Punktförmige Lichtquellen und Wellenflächen. Durchsichtige und absorbierende Medien. Energie und Intensität einer Lichtwelle. Optische Zustandsfunktionen.

Die zu Grundlagen der Theorie geeigneten Erfahrungsthatsachen sind in der Optik vielleicht noch schwieriger aufzufinden und durch Experimente rein darzustellen gewesen, als in anderen Gebieten der Physik, da gerade die am meisten charakteristischen Erscheinungen nur durch sehr feine Hilfsmittel nachzuweisen und messend zu verfolgen sind. In der That sind auch die am frühesten gewonnenen Erfahrungssätze, über die geradlinige Fortpflanzung eines sogenannten Lichtstrahles in einem homogenen Medium und über die Winkel, unter denen er beim Auftreffen auf die Grenze zweier Medien zurückgeworfen und gebrochen wird, für die allgemeine Theorie nahezu ohne alle Bedeutung. Ausgangspunkte für dieselbe sind erst verhältnismäßig spät gewonnen worden.

Die am längsten bekannte der hierher gehörigen Thatsachen, die wir demgemäß auch an die Spitze unserer Aufzählung stellen, ist die, daß das Licht zu seiner Ausbreitung von der Lichtquelle aus Zeit gebraucht, also eine endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt. Sie wurde bekanntlich von O. Römer aus der Beobachtung erschlossen, daß die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Verfinsterungen eines Jupitermondes sich kleiner ergab, wenn zwischen ihnen die Erde sich nach dem Jupiter hin bewegte, größer, wenn sie sich währenddem von ihm entfernte.[1])

Der aus dieser Beobachtung für den leeren Raum folgende enorme Wert der Lichtgeschwindigkeit — ca. $3 . 10^{10}$ — macht eine Messung derselben in auf der Erde zugänglichen Räumen äußerst schwierig; eine solche ist erst viel später, als jene erste, Fizeau und Foucault gelungen[2]) und hat für die Fortpflanzung im Luftraum zu einem mit dem für den leeren Raum geltenden Wert nahe übereinstimmenden Resultate geführt. Beiläufig mag erwähnt werden, daß Foucault seine Beobachtungen auch auf Wasser ausgedehnt und nachgewiesen hat, daß in demselben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes einen kleineren Wert besitzt, als in Luft.

Die erwähnten Beobachtungen bezogen sich ganz speziell auf die räumliche Ausbreitung des Beginnens und des Endes einer Lichtwirkung; indessen ist nicht zweifelhaft, daß, was von diesen gilt, auch von irgend einer anderen in der Lichtquelle stattfindenden Veränderung gelten muß; auch deren Wirkung wird sich mit der genannten endlichen Geschwindigkeit in den Raum fortpflanzen, und schließlich wird man auch bei einer Lichtquelle, die keine zeitlichen Veränderungen zeigt, die in irgend einem entfernten Punkte vorhandene Wirkung als durch Fortpflanzung aus einem um angemessene Zeit früheren Zustand der Quelle entstehend ansehen müssen.

Wir betrachten nun eine Lichtquelle, welche sich innerhalb eines unendlichen, homogenen, aber sonst beliebigen Mediums befindet, die klein ist gegen alle sonst in Betracht kommenden Längen, — z. B. gegen die Entfernungen von den untersuchten Stellen, — und die ihre Wirkung bei einer Drehung nicht ändert, also nach allen Richtungen gleichmäßig strahlt. Eine solche Lichtquelle, über deren Möglichkeit noch zu sprechen sein wird, wollen wir kurz als einen leuchtenden Punkt oder einen Lichtpunkt bezeichnen.

Ein beliebiger, etwa zur Zeit $t = 0$ in dem Lichtpunkt vorhandener Zustand wird sich nach dem Gesagten mit wachsender Zeit nach allen Seiten hin ausbreiten und sich zu einer Zeit t auf irgend einer stetig gekrümmten Oberfläche befinden, deren Radiusvektor vom Lichtpunkt aus s heißen möge. Das Verhältnis

$$\frac{ds}{dt} = \sigma$$

wird dann die längs s gemessene Geschwindigkeit der Ausbreitung an der betrachteten Stelle des Raumes darstellen und ist, streng genommen, nicht nur von der Richtung, sondern auch von der Größe von s abhängig; aber wir können als ein Resultat der Er-

fahrung ansehen, welches wir später auch theoretisch beleuchten werden, daß in allen denjenigen Entfernungen vom Lichtpunkte, die der Beobachtung zugänglich sind, σ allein von der Richtung von s abhängt. Dagegen wollen wir der Allgemeinheit halber verschiedene Lichtpunkte mit verschiedenen Zuständen behaftet, und demgemäß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten mit diesen Zuständen variierend zulassen.

Nehmen wir dies Resultat an, so sind die Oberflächen, auf welchen zu verschiedenen Zeiten die Wirkung eines bestimmten Zustandes im leuchtenden Punkt sich befindet, dem Medium individuell und einander ähnlich; wir nennen sie seine Wellenflächen und betrachten als ihre Repräsentantin eine in bestimmten Dimensionen ausgeführte, deren Festsetzung wir weiter unten treffen werden. In isotropen Medien sind die Wellenflächen Kugeln um den Lichtpunkt als Centrum.

Lassen wir das von einem Punkt ausgehende Licht sich nicht ungehindert ausbreiten, sondern umgeben wir die Quelle mit einem Schirm, der, wie wir sagen wollen, absolut schwarz ist, nämlich Licht weder durchläßt, noch zurückwirft, der aber eine irgendwie gestaltete Öffnung besitzt, so wird durch sie laut der Erfahrung ein Lichtkegel ausgeschnitten, innerhalb dessen, wenn die Öffnung eine später festzusetzende Größe nicht unterschreitet, bis auf relativ kleine Partien an seiner Begrenzung die Lichtfortpflanzung ebenso geschieht, als wenn der Schirm nicht vorhanden wäre. Speziell besitzt das Licht längs jeder Wellenfläche gleiche Intensität und Farbe, wenn dasselbe, wie wir annehmen wollen, bei Abwesenheit des Schirmes stattfand. Wir nennen einen solchen Lichtkegel ein Strahlenbündel, bei hinreichender Kleinheit der Öffnung auch einen Strahl, und übertragen den letzteren Namen einerseits auf einen Elementarkegel des Strahlenbündels, andererseits auf einen jeden Radiusvektor s vom Lichtpunkte aus. Die längs s gemessene Geschwindigkeit σ nennen wir demgemäß auch die Strahlengeschwindigkeit in der bestimmten Richtung von s. —

Wir verfolgen nun das Fortschreiten eines Stückes einer Welle, das unendlich klein gegen seine Entfernung vom leuchtenden Punkt, und demgemäß als eben zu betrachten ist; in unendlicher Entfernung kann dies Stück endlich sein, und die Ausbreitung geschieht dann, wie wir sagen, in ebenen Wellen.

Da die Wellenflächen in demselben Medium einander ähnlich sind, so trifft derselbe Vektor s stets nur parallele Flächenelemente, die betrachteten Stücke der Wellenfläche bleiben also im Fort-

schreiten sich selbst parallel. Nennt man die Normale vom leuchtenden Punkt auf ihre Ebene r, so giebt das Verhältnis

$$\frac{dr}{dt} = \omega,$$

die sogenannte Normalengeschwindigkeit, nach ihrer Definition an jeder Stelle die Geschwindigkeit an, mit der sich ein dort befindliches Element der Wellenfläche anscheinend in der Richtung seiner Normalen fortschiebt, und somit in sehr großer Entfernung von der Lichtquelle die längs der Normalen gemessene Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen. Nach der Ableitung ist ω in denjenigen Abständen nur von der Richtung, nicht aber von der Größe von r abhängig, in denen σ nur von der Richtung, nicht aber von der Größe von s abhängt.

Da, wie wir sehen werden, die Normalengeschwindigkeit ω eine durch die Beobachtung direkt und genau bestimmbare Größe ist, so benutzt man sie auch, um die Repräsentantin der Wellenflächen für ein bestimmtes homogenes Medium festzusetzen. Man wählt für sie diejenige Wellenfläche, deren Normale r in jeder Richtung gleich ω ist, d. h. gleich dem Weg, den in jener Richtung in der Zeiteinheit eine ebene Welle zurücklegen würde.

Diese spezielle Wellenfläche oder Strahlenfläche nennen wir kurz die Fläche S. Die ihr zugehörige Fußpunktsfläche, welche durch ihre Vektoren die in jeder Richtung stattfindende Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω für ebene Wellen angiebt, heiße kurz die Normalenfläche oder die Fläche N.

In isotropen Körpern fällt ersichtlich Strahl und Wellennormale, und demgemäß auch Strahlen- und Normalenfläche zusammen. —

Die Intensität des nach einer bestimmten Stelle fortgepflanzten Lichtes beurteilen wir am einfachsten nach dem Aussehen einer von demselben beleuchteten ebenen, meist weißen Fläche, welche unter einem stets gleichen Winkel gegen die Wellenfläche angebracht und unter einem stets gleichen betrachtet wird. Wenn die Welle eben ist, kann diese Prüfungsfläche beliebige Größe haben; wenn sie gekrümmt ist, darf die Fläche, um homogen beleuchtet zu werden, nur unendlich klein sein.

Zwei nach einer Stelle hin fortgepflanzte Lichtwellen betrachten wir als von gleicher Intensität und von gleicher Farbe, wenn identische Probeflächen, bei gleicher Neigung gegen die Fortpflanzungsrichtung und unter gleichem Winkel gesehen, gleichbeleuchtet erscheinen. Hierdurch ist ein einfaches Prinzip für die Vergleichung von Intensitäten gegeben, das in der Praxis häufig verwertet wird.

Wir wollen von ihm nur eine Anwendung machen, und zwar zur Bestimmung des Gesetzes, nach welchem die Intensität des von einem leuchtenden Punkte in den leeren oder den Luftraum ausgesandten Lichtes mit der Entfernung abnimmt.

Hierzu denken wir uns am einfachsten zwei identische Lichtquellen hergestellt, die also zwei gleichgelegene Probeflächen in gleicher Entfernung gleich beleuchten, und schwächen sodann die Wirkung der einen in einer gegebenen Weise ab; um die beiden Beleuchtungen wieder gleich zu machen, werden wir nunmehr die Entfernung der anderen von ihrer Probefläche in bestimmter Weise vergrößern müssen.

Bezeichnet β das Schwächungsverhältnis der ersten Lichtquelle, und sind r_1 und r_2 die Entfernungen der zweiten vor und nach der Schwächung, welche beiderseitig gleichen Beleuchtungen entsprechen, so hat die Beobachtung ergeben, daß

$$\beta = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

ist; hieraus folgt dann, daß im leeren oder im Luftraum die Intensität des Lichtes indirekt proportional dem Quadrat der Entfernung abnimmt.[3])

Um die oben vorausgesetzte Schwächung der einen Lichtquelle in einem verlangten Verhältnis hervorzubringen, giebt es ein einfaches Mittel, welches die Anwendung der durchgeführten, und uns daher noch nicht verfügbaren Theorie nicht erfordert.

Erfahrungsgemäß kann unser Auge getrennte Lichtwirkungen, welche sich in einer gewissen Geschwindigkeit folgen, nicht trennen, sondern verbindet sie zu einer Resultierenden. Wenn man daher ein Strahlenbündel in periodischem Wechsel abblendet und frei fortschreiten läßt, so wird — falls die Unterbrechungen nicht besondere physiologische Wirkungen üben — seine Wirkung dieselbe sein, als wenn es dauernd geschwächt wäre, und zwar wird das Verhältnis der Zeit, in welcher es sich frei fortpflanzt, zu der gesamten das oben angeführte Schwächungsverhältnis β darstellen. Man kann leicht mechanische Vorrichtungen konstruieren, um hieran anknüpfend dem β eine beliebige und genau bestimmbare Größe zu geben. —

Da aufgefangenes Licht thermische und chemische Wirkungen hervorzubringen vermag, so muß dasselbe bei seiner Ausbreitung Energie mit sich führen, und wir dürfen annehmen, daß die von unserem Auge wahrgenommene Intensität irgend eine Funktion der Energie ist, welche auf die Prüfungsfläche fällt. Die fortgepflanzte Energie kann unterwegs schon allmählich an das Medium, in dem die Fortpflanzung geschieht, abgegeben, sie kann aber auch in un-

veränderter Größe transportiert werden. Im ersteren Falle nennen wir das Medium absorbierend, im letzteren durchsichtig.

Aber auch im letzteren Falle wird sich die Energie der Volumeneinheit, oder die Energiedichte, mit wachsender Entfernung von der Lichtquelle vermindern. Denn die Energie einer von zwei Wellenflächen begrenzten Schicht von der längs eines bestimmten Strahles gemessenen Dicke δ verteilt sich bei der Fortpflanzung auf Schichten, welche zwar die gleiche Dicke, aber immer wachsende Grundfläche besitzen, und wenn man gemäß dem oben Gesagten annimmt, daß sich die Energie von dem Lichtpunkte aus längs der Radienvektoren fortpflanzt, so ergiebt sich, daß ihre Dichte in jeder Richtung indirekt proportional mit dem Quadrat der Entfernung abnehmen muß.

In Abständen von der Lichtquelle, welche so groß sind, daß man die Wellen als eben betrachten kann, wird hiernach in durchsichtigen Medien die Energiedichte konstant sein müssen, und man beurteilt demgemäß die Durchsichtigkeit eines Körpers am einfachsten darnach, ob und inwieweit er die Intensität einer in ihm fortgepflanzten und als eben anzusehenden Welle schwächt. Dabei ist indessen zu beachten, daß der Schluß von der wahrgenommenen Intensität des Lichtes auf die ganze fortgepflanzte Energie kein sicherer ist, da unzweifelhaft von den Lichtquellen auch Energie ausgeht, die auf unser Auge nicht einwirkt. Ein Teil von dieser läßt sich häufig durch thermische, ein anderer durch chemische Wirkungen konstatieren.

Unter allen Medien scheint der leere Raum allein vollständige Durchsichtigkeit zu besitzen, alle ponderabeln Körper scheinen Absorptionen zu bewirken; wo letztere, wie z. B. in der Luft, in sehr geringer Stärke stattfinden, kann man die Körper angenähert gleichfalls als durchsichtig betrachten.

Da nun im Luftraum die Beobachtung für die Abnahme der Intensität nach dem oben Gesagten dasselbe Gesetz ergeben hat, das die Theorie für die Abnahme der Energiedichte verlangt, so darf man zwischen diesen beiden Größen Proportionalität annehmen; und da sich zeigen läßt, worauf wir später eingehen werden, daß sich die gesamte Energie in zwei Teile zerlegen läßt, die resp. von den optisch wirksamen und den optisch unwirksamen Schwingungen herrühren und das gleiche Gesetz befolgen, so darf man die Intensität spezieller der Energie der eigentlichen Lichtschwingungen proportional oder, unter Verfügung über die Intensitätseinheit, derselben auch direkt gleich setzen. —

Betrachten wir nun das im leeren Raume oder in einem anderen durchsichtigen isotropen Medium von einer Lichtquelle ausgesandte Licht in einer solchen Entfernung von ihr, daß wir seine Wellen als eben ansehen können, so ergiebt das Vorstehende, daß die verschiedenen fortgepflanzten Zustände sich längs der Strahlen in unveränderter Stärke und mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Wenn man also das optische Verhalten an jeder Stelle und zu jeder Zeit durch irgendwelche p Funktionen $F, G, H, \ldots$ — optische Zustandsfunktionen — charakterisiert, so müssen dieselben die Argumente t, x, y, z allein in der Verbindung

$$t - \frac{r}{\omega} = t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\omega}$$

enthalten, wobei α, β, γ die Richtungscosinus der Normalen r auf der Wellenebene bezeichnen, die in dem vorausgesetzten speziellen Falle mit dem Strahl identisch ist. Denn eine Funktion von der Gestalt $F(t - r/\omega)$ stellt einen längs r in unveränderter Art und Stärke und mit der Geschwindigkeit ω fortgepflanzten Zustand dar. —

§ 2. Die analytische Form der Zustandsfunktionen für ebene Wellen. Die einfachen Interferenzerscheinungen. Superposition verschiedener Wellen. Unabhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Lichtes in allen Medien und von der Farbe im leeren Raume.

Wir wenden uns nunmehr dazu, die analytische Form der optischen Zustandsfunktionen im Falle ebener Wellen aus der Beobachtung abzuleiten. Dies gelingt durch Verwertung der als einfache Interferenz bezeichneten Erscheinung, die wir kurz dahin charakterisieren können, daß zwei Lichtwellen, die dieselbe Fläche nahezu parallel treffen, daselbst nicht stets zusammen eine größere Intensität liefern, als jede einzelne für sich ergiebt, sondern unter gewissen Umständen auch eine kleinere bewirken können.

Interferenzerscheinungen lassen sich auf sehr verschiedene Art hervorbringen, und wir werden uns mit diesen Methoden später ausführlicher beschäftigen. Indessen sind die bei weitem meisten für unsere augenblicklichen Zwecke nicht brauchbar, weil sie zum Verständnis die Grundlagen der Theorie verlangen, die wir erst legen wollen. Aber auch um die einfachste von ihnen zu verstehen, bedarf es noch einer Zwischenbetrachtung.

Wir können die Fortpflanzungsrichtung eines Strahlenbündels verändern, indem wir dasselbe auf die Grenzfläche zweier verschie-

dener isotroper homogener Medien auffallen lassen. Es wird dann ein Teil zurückgeworfen, und dieser Teil zeigt genau die Eigenschaften, wie das einfallende Bündel, nämlich — immer abgesehen von einer schmalen Randzone — auf jedem Querschnitt gleiche Intensität und gleiche Farbe. Ein anderer Teil dringt in das zweite Medium ein und verhält sich dort — wenn das Medium durchsichtig ist — zunächst der Grenze analog; in größerer Entfernung zeigt sich, daß das Bündel durch die Brechung in verschiedenfarbige Teile zerlegt worden ist, welche divergierende Wege verfolgen, und hierdurch ein sogenanntes Spektrum liefern. Durch Anwendung von Prismen und Prismenkombinationen läßt sich diese Divergenz beliebig vergrößern. Es giebt Quellen, deren Licht bei diesem Prozeß nicht zerlegt wird, und wir nennen dieses Licht homogen gefärbt oder besser einfarbig; weißes Licht stellt sich als ein Gemisch aller möglichen Einzelfarben in gewissen Verhältnissen dar. Operieren wir mit einfarbigem Licht, so verhält sich das gebrochene Bündel bezüglich der Intensität analog, wie das reflektierte.

Läßt man nun ein Strahlenbündel einfarbigen Lichtes auf eine plane Platte aus einem durchsichtigen isotropen Medium fallen und fängt das reflektierte Licht mit einem Schirm oder direkt mit dem Auge auf, so zeigt sich eine Intensität, die mit der Dicke der Platte und mit ihrer Neigung gegen die Einfallsrichtung außerordentlich schnell und kräftig, und zwar periodisch wechselt. Um den letzteren Wechsel deutlich wahrzunehmen, ist es erforderlich, die Platte möglichst dünn zu wählen; um den ersteren zu erkennen, stellt man sie am besten mit schwach variabler Dicke, z. B. keilförmig her. Man beobachtet dann ein System heller und dunkler Streifen parallel der Keilkante.

Diese variierende Intensität ist das Resultat der Zusammenwirkung der an der hinteren und der an der vorderen Fläche der Platte reflektierten Wellen, denn sie verschwindet, wenn nur eine Zwischengrenze vorhanden ist. Aber bei dem beschriebenen Experiment, das sich äußerlich durch Einfachheit vor allen übrigen verwandten auszeichnet, ist der Vorgang immer noch ein ziemlich komplizierter, weil die reflektierte Welle nicht nur aus zwei, sondern aus unendlich vielen Teilen zusammengesetzt ist, insofern von dem zunächst in die Platte eindringenden Teil Unterteile nach 1, 3, 5, ... $(2n+1)$-facher innerer Reflexion durch die Vorderfläche wieder austreten.

Wenn nun auch der schon von Newton[4]) aus der beschriebenen Erscheinung gezogene Schluß, daß in einem gegebenen Zeit-

punkte längs eines jeden Strahles die gleichen Zustände sich periodisch immer wiederholen, sehr nahe liegt, so erscheint es doch wünschenswert, ein Experiment zu finden, welches wirklich nur zwei Wellen zusammenwirken läßt.

Eine Anordnung, die das Gewünschte anscheinend liefert, ist die von TH. YOUNG[5]) angegebene und nach ihm benannte, welche wir nur erwähnen, weil sie zu gewissen, später zu besprechenden fundamentalen Beobachtungen benutzt worden ist.

Hier wird das von einem Punkt ausgehende Licht durch zwei einander sehr nahe kleine, etwa kreisrunde Öffnungen eines schwarzen Schirmes geführt und in einiger Entfernung dahinter auf einem weißen Schirm oder direkt mit dem durch eine Loupe bewaffneten Auge aufgefangen. Man nimmt dann zwischen den Projektionen der beiden Öffnungen helle und dunkle Streifen wahr, die normal zu der Verbindungslinie der Centra jener Projektionen liegen und verschwinden, sowie man Licht nur durch die eine der beiden Öffnungen passieren läßt.

Aber das Licht, welches nach jenen Stellen gelangt, ist kein direkt dorthin fortgepflanztes, und über seine Herkunft giebt nur die vollständige Theorie Aufschluß; daher ist das TH. YOUNG'sche Experiment für unsere Zwecke nicht brauchbar.

Dagegen leistet eine von JAMIN[6]) angegebene Anordnung in der That das Gewünschte vollständig. Bei derselben fällt ein Strahlenbündel schief auf eine sehr dicke plane Glasplatte und ist derart begrenzt, daß das nach einmaliger äußerer und die nach 1, 3, 5...-maliger innerer Reflexion weitergehenden Bündel räumlich völlig getrennt sind. Dieses System von Strahlenbündeln wird nun auf einer der ersten Platte identischen und parallelen aufgefangen; dann sondern sich auch hier die jedem einzelnen einfallenden entsprechenden reflektierten Bündel, aber von den beiden Bündeln entsprechenden fallen im allgemeinen je zwei zusammen.

Sondert man nun durch einen geeignet aufgestellten Schirm das Paar aus, von dem die eine Komponente am ersten Spiegel außen, am zweiten innen, die andere am ersten Spiegel innen, am zweiten außen reflektiert ist, so haben beide Bündel genau übereinstimmende Wege zurückgelegt, falls die Spiegel streng parallel und identisch sind.

Dreht man aber durch eine empfindliche Vorrichtung den einen Spiegel um äußerst kleine Winkel um eine zu seinen Ebenen parallele und zu den Strahlen normale Axe, so wechselt in jedem Punkte des von den beiden zusammenfallenden Bündeln getroffenen Raumes

die Intensität des Lichtes periodisch zwischen Helligkeit und Dunkelheit; dabei ist die größte Helligkeit heller, die größte Dunkelheit dunkler, als in dem von nur einem der Bündel gelieferten Licht.

Eine leichte geometrische Überlegung zeigt, daß bei der vorausgesetzten Drehung der Weg der beiden, im beobachteten Punkte zusammentreffenden Wellenebenen, den wir von einer beliebigen Wellenebene vor der ersten Reflexion aus rechnen können, eine immer wachsende Verschiedenheit erhält. Wenn hierdurch nun periodische Intensitätswechsel entstehen, so führt das mit Notwendigkeit auf die Vorstellung, daß längs jedes Strahles oder jeder Wellennormale in einem bestimmten Zeitmoment die Zustände von Ort zu Ort gleichfalls periodisch sich wiederholen. Nennen wir den Abstand λ benachbarter Wellen, welche gleiche Zustände zeigen, die Wellenlänge, so ist klar, daß bei gegenseitigen Verschiebungen der beiden Wellenzüge um eine Wellenlänge oder um ein ganzes Vielfaches einer solchen die Erscheinung sich nicht ändern kann.

Die beschriebenen Beobachtungen ergeben sonach das Resultat, daß die Zustandsfunktionen bei gegebenem t periodische Funktionen von r sind. Da nun r nur in der Verbindung $t - r/\omega$ in ihnen enthalten ist, so müssen sie periodisch auch von diesem Argument, und somit von der Zeit abhängen, also, wie wir sagen, Schwingungen ausführen. Sonach muß im allgemeinsten Falle gelten

$$1)\qquad F\left(t-\frac{r}{\omega}\right)=\Sigma\left(m_k \sin k\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right)+n_k\cos k\alpha\left(t-\frac{r}{\omega}\right)\right),$$

worin k gleich $1, 2, \ldots \infty$ ist; α steht dabei mit den Perioden τ von t und λ von r in dem Zusammenhang, der gegeben wird durch

$$1')\qquad \alpha=\frac{2\pi}{\tau},\quad \frac{\alpha}{\omega}=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \text{also}\quad \lambda=\omega\tau.$$

Aber diese höchst allgemeine Form der Zustandsfunktionen läßt sich noch spezialisieren.

Stellt man nämlich die oben beschriebenen Beobachtungen mit homogenem Licht von verschiedener Farbe an, so erhält man sie qualitativ immer übereinstimmend, aber bezüglich der Werte der Perioden verschieden. Wir schließen daraus, daß den verschiedenen Farben Zustandsfunktionen von verschiedener Periode τ entsprechen.

Da nun der Ansatz (1) eine Reihe von Gliedern mit verschiedenen Perioden enthält, so läßt er sich als einem Gemisch verschiedener Farben entsprechend deuten, und es scheint naturgemäß, ihn für einfarbiges Licht mit dem ersten Gliede abzubrechen; wir er-

halten somit für jede Zustandsfunktion als allgemeinsten, einfarbigem Lichte entsprechenden Wert

$$\left.\begin{aligned} F &= A' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) + A'' \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \\ &= A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) - d\right]. \end{aligned}\right\} \qquad 1'')$$

Hierin bezeichnen A', A'' und A, d neue Konstanten, zwischen denen die Beziehungen bestehen

$$A^2 = A'^2 + A''^2, \quad \operatorname{tg} d = -\frac{A''}{A'}; \qquad 1''')$$

A wird der Regel nach als absolute Größe geführt, während man A' und A'' mit Vorzeichen versieht.

Den in diesem Ansatz vorkommenden Parameter λ kann man aus den oben beschriebenen Beobachtungen, wenn sie mit quantitativen Messungen verbunden werden, berechnen; beispielsweise wird, wie leicht zu übersehen, bei der Newton'schen Anordnung die Differenz der Dicken der reflektierenden Schicht an den Stellen benachbarter Lichtminima gleich der Hälfte der Wellenlänge λ in der Substanz des Keiles sein müssen.

Die Werte von τ ergeben sich innerhalb des Spektrums vom violetten zum roten Ende hin wachsend; gleiches gilt im allgemeinen auch für λ. In Luft findet sich für die Grenzfarben, welche dem Auge noch eben wahrnehmbar sind, λ resp. gleich $3{,}9.10^{-5}$ und $7{,}6.10^{-5}$. Diesen Zahlen entsprechen, gemäß dem für Luft geltenden Wert von $\omega = 3.10^{10}$, Perioden τ im Betrage von ca. $1{,}3.10^{-15}$ und $2{,}5.10^{-15}$, und ihre außerordentliche Kleinheit erklärt, daß das Auge die Empfindung eines in Wahrheit veränderlichen Vorganges bei der Wahrnehmung von Licht nicht hat; in der That vermag es schon Einwirkungen, die in einigen hundertel Sekunden Abstand auf einander folgen, nicht mehr zu scheiden. Wir haben hieraus zu schließen, daß für die wahrgenommene Intensität einer Welle der Mittelwert ihrer Energiedichte maßgebend ist. —

Da die Strahlen und Wellen Wirkungen des Zustandes der Lichtquelle fortpflanzen, so ergiebt sich aus vorstehendem, daß in der Lichtquelle gleichfalls periodische Änderungen vor sich gehen, und somit Schwingungen stattfinden, wobei wir gänzlich dahingestellt lassen, was in Wirklichkeit diese Schwingungen ausführt. Dabei werden in allen praktischen Fällen die verschiedenen Teile der Lichtquelle überaus verschiedenartig schwingen, die fortgepflanzte Welle wird also die Resultante aus den von den einzelnen Teilen ausgehenden Elementarwellen darstellen.

Übrigens mag schon hier beiläufig bemerkt werden, daß diese resultierende Schwingung einer Lichtquelle keineswegs immer periodisch verlaufen, sondern zeitweise anderen Gesetzen folgen wird; da unser Auge aber die fortgepflanzten Wirkungen solcher Bewegungen nicht empfindet, so geben uns über sie seine Wahrnehmungen auch keinen Aufschluß. —

Die oben beschriebenen Beobachtungen über Interferenz vermögen uns bei weiterer Ausgestaltung noch nach anderer Richtung hin über die Vorgänge in einer fortgepflanzten Welle aufzuklären.

Bringt man zwei Strahlenbündel zur Interferenz, die um einen kleinen Winkel gegeneinander geneigt sind, so nimmt man bei geeigneter Veranstaltung in dem Raum, wo sich beide Bündel kreuzen, Interferenzerscheinungen wahr; z. B. werden bei Anwendung einfarbigen Lichtes gewisse Stellen dunkel erscheinen, die zusammen ein System nahe paralleler Flächen erfüllen und die sich auf einem auffangenden Schirm als dunkle, nahe parallele Kurven geltend machen. Untersucht man dagegen eines der Strahlenbündel in Teilen, die hinter dem Kreuzungsbereich liegen, so findet man an jeder Stelle dieselbe Intensität und Farbe, als wenn das andere Bündel, und somit auch die Interferenz selbst ganz beseitigt wird; jene dunkeln Zonen setzen sich nicht in die weiteren Gebiete der Bündel hinein fort.

Wir schließen aus dieser Beobachtung, daß die Interferenzen ein Strahlenbündel nicht dauernd zu verändern vermögen, und dürfen dies Resultat dahin deuten, daß die Interferenzen durch eine einfache Zusammenwirkung der beiden an sich ungeänderten Wellen zu Stande kommen. In der That wäre eine faktische Veränderung der Schwingung jeder einzelnen, die sich nicht fortpflanzt, nach dem Vorausgeschickten nicht zu verstehen.

Besteht aber die Interferenz in der bloßen Superposition verschiedener Schwingungen, so muß es möglich sein, die Zustandsfunktionen $F, G, H \dots$ so zu wählen, daß der Zustand, der durch das Zusammenwirken mehrerer Schwingungen entsteht, durch die Summen der analogen, für die verschiedenen Wellen charakteristischen F_h, G_h, H_h gegeben ist.

Denken wir uns nun die Zustandsfunktionen demgemäß gewählt, so erhalten wir das Resultat, daß für eine aus n einzelnen Schwingungen resultierende die entsprechenden $F, G, H \dots$ gegeben sind durch

$$1'''')\qquad F = \Sigma F_h, \quad G = \Sigma G_h, \quad H = \Sigma H_h. —$$

Diese Betrachtung gestattet eine in vielen Fällen wichtige Um-

kehrung. Es ergiebt sich nämlich, daß man hiernach jede gegebene optische Schwingung in Teilschwingungen zerlegen kann, die stets dann mit der gegebenen vollkommen äquivalent sein werden, wenn ihre Zustandsfunktionen F_h, G_h, ... mit denen F, G, ... der gegebenen durch die Beziehungen (1'''') verbunden sind.

Eine besonders interessante Zerlegung würde die sein, welche gegeben ist durch

$$\begin{array}{lll} F_1 = F, & G_1 = 0, & H_1 = 0, \ldots \\ F_2 = 0, & G_2 = G, & H_2 = 0, \ldots \\ F_3 = 0, & G_3 = 0, & H_3 = H, \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Hier erscheint die ursprüngliche Schwingung in Komponenten zerlegt, die je durch nur eine Zustandsfunktion charakterisiert sind. Derartige Zerlegungen werden uns später besonders beschäftigen. —

Das gewonnene Interferenzprinzip[7]), das in Formel (1'''') analytisch formuliert ist, werden wir später weiter verfolgen; jetzt mag nur noch eine aus Interferenzbeobachtungen geschlossene Erfahrungsthatsache von fundamentaler Bedeutung erwähnt werden.

Die mit homogenem Licht angestellten Interferenzbeobachtungen geben die gleichen Resultate bezüglich der Örter der Lichtmaxima und Minima, gleichviel welche Intensität das benutzte Licht besitzt. Hieraus folgt zunächst, daß die Wellenlängen λ von der Intensität unabhängig sind, und da $\lambda = \tau\omega$ ist, die Schwingungsdauer τ aber bei der Schwächung der Wirkung einer Lichtquelle durch größere Entfernung oder absorbierende Medien offenbar nicht geändert werden kann, weil sonst dieselbe Stelle zu verschiedenen Zeiten verschiedene Phasendifferenzen gegen die Lichtquelle erhalten müßte, so folgt aus dieser Beobachtung, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen in jedem Medium von der Intensität des Lichtes unabhängig ist.

Noch schärfer und völlig zwingend läßt sich der Nachweis führen, wenn man in dem JAMIN'schen Apparat die Hälften einer zerschnittenen absorbierenden Platte nebeneinander in den Weg der beiden Strahlenbündel bringt und nun die eine Hälfte parallel mit sich längs des betreffenden Strahlenbündels verschiebt. Beträgt diese Verschiebung die Länge s, so durchläuft die eine Welle den Weg s mehr im geschwächten Zustande, als die andere; wenn sie sich also bei geringerer Intensität mit kleinerer oder mit größerer Geschwindigkeit fortpflanzte, wie bei größerer Intensität, so müßte eine Verschiebung des Interferenzbildes stattfinden. Beobachtungen nach einer verwandten Methode

haben mit einer ganz außerordentlichen Genauigkeit festgestellt, daß ein solcher Einfluß fehlt, und haben somit das oben Gesagte bestätigt.[8])

Die angedeuteten Beobachtungen sind, wie innerhalb von Luft, auch innerhalb von tropfbaren Flüssigkeiten angestellt worden und haben das gleiche Resultat ergeben. Die Natur desselben gestattet unmittelbar die hypothetische Übertragung auf beliebige Medien, und wir wollen demgemäß ganz allgemein als erwiesen ansehen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer durch gewisse $F, G, \ldots$ bestimmten Schwingung in einer bestimmten Richtung von der Intensität der Bewegung, d. h. von dem absoluten Betrag der $F, G, \ldots$ unabhängig ist.

Welche Umstände bei ein und demselben Körper auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit influieren, wird uns später in den zu betrachtenden speziellen Fällen ausführlich beschäftigen. Hier mag nur noch erwähnt werden, daß merklich streng für den leeren und angenähert für den lufterfüllten Raum dem obigen Satz sich der weitere zuordnet, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie von der Intensität, so auch von der Farbe des Lichtes unabhängig ist. Dies läßt sich sehr scharf mit der im Eingang erwähnten Beobachtungsmethode feststellen; denn die Verfinsterung der Jupitermonde findet, von der Erde gesehen, gleichzeitig für alle Farben statt, und dasselbe gilt für das Wiederaufleuchten derselben. Beides könnte aber offenbar nicht stattfinden, wenn die verschiedenfarbigen Bestandteile des Sonnenlichtes sich im Weltraume mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzten.

Bei allen anderen Medien ergeben später zu besprechende Methoden die Geschwindigkeit als von der Farbe des Lichtes abhängig. —

§ 3. Zahl und Natur der optischen Zustandsfunktionen. Die Polarisationserscheinungen. Das Gesetz der Intensität.

Nachdem durch die Entwickelungen des vorigen Abschnittes für den Fall der Fortpflanzung ebener Wellen im leeren Raum oder in einem anderen durchsichtigen Medium die analytische Form der Zustandsfunktionen vollständig gewonnen ist, können wir dazu übergehen, ihre Zahl und ihre Natur näher zu bestimmen.

Der denkbar einfachste Vorgang, der sich durch den Raum ausbreitet, würde ein durch nur eine Skalargröße bestimmbarer sein, der nächst komplizierte ein durch nur eine Vektorgröße darstellbarer; daran würden sich solche schließen, die zur Darstellung mehrere Skalaren und Vektorgrößen nebeneinander erfordern, oder solche, die überhaupt nicht direkt auf diese Elemente zurückführbar sind.

Wir werden zeigen, daß die einfachste Annahme: die Zustandsfunktionen *F*, *G*, *H*, ... reduzierten sich auf einen einzigen Skalar, mit gewissen Erfahrungsthatsachen von ebenso einfachem, als allgemeinem Charakter in unlösbarem Widerspruch steht; daß dagegen die nächst einfache: jene Funktionen seien Bestimmungsstücke eines einzigen Vektors, mit eben jenen Thatsachen sehr wohl vereinbar ist. Wir werden demgemäß der Entwickelung bis auf weiteres die Hypothese zu Grunde legen, daß die optischen Vorgänge sich durch eine Vektorgröße ausdrücken lassen, und ihren Beweis, der sich naturgemäß durch eine direkte Beobachtung befriedigend nicht führen läßt, als durch die Übereinstimmung der Folgerungen aus dieser Hypothese mit der Erfahrung erbracht ansehen.

Die Erscheinungen, welche gegen die Annahme eines Skalares entscheiden, sind die Polarisationserscheinungen, definiert als Vorgänge, bei denen die verschiedenen Richtungen, die in einer ebenen Welle liegen, sich physikalisch verschiedenwertig erweisen. Auch mit ihnen werden wir uns später ausführlicher zu beschäftigen haben, und es mag hier nur ein bereits von Huyghens[9]) beobachtetes und doch vollständig entscheidendes Phänomen erwähnt werden.

Läßt man auf eine Fläche eines Spaltungsrhomboëders von Kalkspat, am besten von sog. Isländischem Doppelspat, ein feines Strahlenbündel normal auffallen, so entstehen in seinem Innern zwei gebrochene, von denen das eine, ordinäre (*o*), in der Verlängerung des einfallenden liegt, das andere, extraordinäre (*e*), um einen kleinen Winkel gegen das erstere geneigt ist. Beide Strahlenbündel treten einander parallel, bei hinreichender Dicke des Krystalles auch vollständig von einander gesondert aus der zweiten Grenzebene aus und lassen sich dann auf ihre Eigenschaften untersuchen.

Um das Resultat der hierauf bezüglichen Beobachtungen einfach auszusprechen, denken wir durch die Richtung des einfallenden Strahlenbündels, und somit der Normalen auf einer Rhomboëderfläche, eine Ebene gelegt, welche der krystallographischen Hauptaxe parallel liegt, und nennen dieselbe den jener Normale zugehörigen Hauptschnitt des Krystalles. Wir bemerken beiläufig, daß bei dem obigen Experiment die beiden im Innern des Krystalles fortschreitenden Bündel in dem Hauptschnitt durch das einfallende Bündel liegen.

Ferner wollen wir die Intensitäten der beiden aus dem Krystall tretenden Strahlenbündel kurz mit I_o und I_e bezeichnen.

Ist dann das einfallende Bündel direkt von einer Lichtquelle, einer Flamme oder der Sonne, entnommen und vor dem Eintritt in den Krystall nicht durch Reflexion oder Brechung modifiziert,

enthält es, wie wir kurz sagen wollen, natürliches Licht, so zeigt die Beobachtung, daß die Intensitäten I_o und I_e unabhängig von der Lage des Hauptschnittes sind, sich nämlich nicht ändern, wenn man den Krystall um die Richtung des einfallenden Bündels dreht.

Anders, wenn das einfallende Strahlenbündel auf seinem Wege von der Quelle bis zum Krystall durch Reflexionen oder Brechungen verändert worden ist; hier finden sich im allgemeinen die austretenden Intensitäten I_o und I_e von der Lage des Hauptschnittes abhängig.

Ist speziell das einfallende Strahlenbündel eines der beiden, in der eben beschriebenen Weise durch ein Kalkspat-Rhomboëder gewonnenen (o) resp. (e), so nimmt diese Veränderlichkeit ihre extremste Gestalt an, insofern bei bestimmter gegenseitiger Orientierung der beiden Krystalle nur je ein Strahlenbündel aus dem zweiten austritt, das andere also verschwindende Intensität besitzt.

Bei einer solchen Kombination zweier Kalkspate nennt man den ersten kurz den Polarisator, den zweiten den Analysator.

Das Gesetz der Veränderlichkeit ist ziemlich kompliziert, nimmt aber bei Beschränkung auf eine — übrigens ziemlich bedeutende — Annäherung eine sehr einfache Gestalt an. Bezeichnen nämlich I_{oo} und I_{oe} die Intensitäten der beiden aus dem Analysator austretenden Bündel, welche aus demjenigen entstehen, das den Polarisator als ordinäres verläßt, bezeichnen I_{eo} und I_{ee} diejenigen Intensitäten, welche von dem aus dem Polarisator austretenden extraordinären Bündel herrühren, und bedeutet χ den Winkel zwischen den Hauptschnitten der beiden Krystalle, so gilt

$$I_{oo} = I_o \cos^2\chi, \quad I_{oe} = I_o \sin^2\chi,$$
$$I_{eo} = I_e \sin^2\chi, \quad I_{ee} = I_e \cos^2\chi,$$

Bei parallelen Hauptschnitten verschwinden also I_{oe} und I_{eo}, bei gekreuzten I_{oo} und I_{ee}.

Nach diesen Resultaten verhält sich somit der aus dem ersten Krystall ausgetretene ordinäre Strahl bei einer Drehung um 90° genau so, wie der extraordinäre in der ursprünglichen Lage, und umgekehrt. Beide Strahlen (o) und (e) sind also nach der früheren Definition polarisiert, und wir bezeichnen sie, gemäß dem zuletzt Gesagten, spezieller als normal zu einander polarisiert im weiteren Sinne des Wortes.

Es ist ohne weiteres klar, daß mit dieser Erscheinung die Annahme, ein Skalar charakterisiere den Zustand an einer beliebigen Stelle x, y, z eines Strahlenbündels, unvereinbar ist, und wir führen

daher die nächst einfache ein, dahin lautend, daß eine Vektorgröße zu jenem Zwecke ausreiche. Es bietet sich dann von selbst die Bestimmung der Zustandsfunktionen als der Komponenten u, v, w jenes durch p zu bezeichnenden Vektors, und wir setzen ganz allgemein für homogenes Licht

$$\left.\begin{aligned} u &= F' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)+F''\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)=F\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)-a\right],\\ v &= G' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)+G''\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)=G\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)-b\right],\\ w &= H' \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)+H''\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)=H\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)-c\right],\end{aligned}\right\} \quad 2)$$

worin F, G, H die Amplituden, a, b, c die relativen Phasen der Komponenten u, v, w bedeuten.

Stellt man, wie dies früher wiederholt in ähnlichen Fällen geschehen ist, den Vektor p durch eine Strecke dar, deren eines Ende im Punkte x, y, z ruht, so beschreibt nach den Formeln (2) das andere Ende eine Ellipse. Dieselbe liegt in der Ebene

$$\left.\begin{vmatrix} u & F' & F'' \\ v & G' & G'' \\ w & H' & H'' \end{vmatrix} = 0,\right\} \quad 2')$$

und ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen haben die Gleichungen

$$(v H' - w G')^2 + (v H'' - w G'')^2 = (G' H'' - H' G'')^2, \quad 2'')$$

. . . .

Bei Einführung von F, G, H und a, b, c nehmen diese Gleichungen die Form an

$$\frac{u}{F}\sin(b-c)+\frac{v}{G}\sin(c-a)+\frac{w}{H}\sin(a-b)=0, \quad 2''')$$

$$\frac{v^2}{G^2}+\frac{w^2}{H^2}-\frac{2vw}{GH}\cos(b-c)=\sin^2(b-c), \quad 2'''')$$

. . . .

welche hervortreten läßt, daß die Gestalt und die Lage der Bahnellipse von den absoluten Werten von F, G, H und a, b, c unabhängig sind. Bei gleichen Werten der Verhältnisse $F:G:H$ und der Differenzen $(c-b)$, $(c-a)$, $(a-b)$ sind die dargestellten Bewegungen nur durch die absolute Größe der Bahnkurve und durch den Ort des Vektors in der Bahn zu einem gegebenen Zeitpunkt verschieden.

Beiläufig mag darauf hingewiesen werden, daß nach dem S. 531 zu dem System (1'''') Gesagten die allgemeinste Bewegung im homogenen Lichte sich auffassen läßt als die Superposition von drei Bewegungen (1), (2), (3), gegeben durch

$$u_1 = u, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0,$$
$$u_2 = 0, \quad v_2 = v, \quad w_2 = 0,$$
$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = w,$$

die ersichtlich in geraden Linien — nämlich den Koordinatenaxen X, Y, Z — stattfinden. Ihre Amplituden F, G, H bestimmen ein Parallelepipedon von mit den Koordinatenebenen parallelen Flächen, das je nach der Wahl des Koordinatensystemes verschiedene Gestalt besitzt, aber, wie es auch gebildet sei, stets die Bahnellipse derart umschließt, daß alle sechs Flächen von ihr berührt werden.

Alle diese Parallelepipeda haben Diagonalen D von der gleichen Länge, denn die Größe

3) $$D^2 = F^2 + G^2 + H^2$$

kann sich bei einer Koordinatentransformation nicht ändern. Man erkennt dies ohne Rechnung daraus, daß D^2 mit dem über eine Periode τ genommenen Mittelwert von dem Quadrate des Vektors p, nämlich von

3') $$p^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

proportional ist. Die Diagonale D ist also eine Invariante der elliptischen Schwingung und als solche für sie in hohem Grade charakteristisch. Da sie indessen von den Phasendifferenzen der Komponenten u, v, w unabhängig ist, so gehört sie nicht allein der gegebenen Schwingung an, sondern zugleich auch allen anderen, welche durch beliebige Änderungen der Differenzen $a - b, \ldots$ aus ihr entstehen. —

Diese Resultate gestatten sofort zu übersehen, daß die Annahme, der Zustand in einer Lichtwelle werde durch einen Vektor charakterisiert, mit dem Huyghens'schen Experiment vollkommen verträglich ist. In der That bestimmen zwei Reihen von Komponenten

3'') $$\begin{cases} u_1 = F \sin T_1, & u_2 = \quad G\beta \sin(T_2 - d), \\ v_1 = G \sin T_2, & v_2 = -F\beta \sin(T_1 - d), \\ w_1 = H \sin T_3, & w_2 = \quad H\beta \sin(T_3 - d), \end{cases}$$

worin

3''') $$T_1 = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{z}{\lambda}\right) - a, \quad T_2 = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{z}{\lambda}\right) - b, \quad T_3 = 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{z}{\lambda}\right) - c$$

ist, und β und d Konstanten bezeichnen, zwei Vektoren p_1 und p_2, deren Schwingungen sich längs der Z-Axe fortpflanzen, und von denen sich der erste in Bezug auf das Axensystem X, Y, Z ebenso verhält, wie der zweite in Bezug auf das System Y, $-X$, Z; sie stellen somit zwei normal zu einander polarisierte Schwingungen dar.

Die Konstanten β und d sind zum Zwecke allgemeinster Fassung hinzugefügt; eine Variation von β verändert nur die Größe, nicht aber die Gestalt der Bahnkurve, und d giebt dem Vektor p_2 eine Verzögerung gegen p_1; die erstere Größe würde nur die relative Intensität der beiden Wellen modifizieren, die letztere würde die direkte Wirkung der Wellen auf unser Auge überhaupt nicht berühren.

Wir werden demgemäß also bis auf weiteres die Lichterscheinungen als von nur einem Vektor p abhängig ansehen, womit nicht ausgeschlossen ist, daß zu gewissen Untersuchungen vorübergehend ein zweiter eingeführt wird, der mit ihm in rein geometrischer Beziehung steht, dessen Verhältnis zu p also nicht durch dem Medium individuelle Konstanten vermittelt wird. Es sei indessen schon hier bemerkt, daß gewissen Erscheinungen gegenüber diese einfachste Verfügung sich als ungenügend erweist, und daß dann eine größere Zahl von Vektoren herangezogen werden muß, die mit p durch Beziehungen verbunden sind, welche nicht rein geometrisch, sondern von der Substanz abhängig sind, innerhalb deren die Fortpflanzung des Lichtes geschieht. Wir kommen auf diese Vorgänge weiter unten zurück. —

Nachdem wir somit für die nächsten Entwickelungen die Anzahl und die Natur der optischen Zustandsgrößen bestimmt haben, bietet sich erneut die Frage nach dem Gesetz der Intensität I in der durch gegebene u, v, w bestimmten Welle zunächst einfarbigen Lichtes. Daß wir diese Intensität der mittleren Energiedichte der Welle gleich setzen dürfen, ist bereits S. 524 und 529 erörtert; es bleibt also jetzt nur die Energie durch die Bestimmungsstücke des Vektors p zu geben. Indessen erfordert die Lösung dieser Aufgabe die voll entwickelte Theorie, und wenn wir zum Aufbau dieser Theorie Beobachtungsresultate über die Intensität von Wellen unter bestimmten Umständen verwerten wollen, so können wir zunächst nur einen hypothetischen Ansatz bilden, der später zu bestätigen sein wird.

Zu einem solchen gelangen wir durch die Überlegung, daß unser Auge nicht das Detail des Schwingungsvorganges, sondern nur ein mittleres Resultat desselben auffaßt. Jedenfalls kann hiernach die Phase der Schwingung auf die wahrgenommene Intensität einen Einfluß nicht üben. Die Energie einer geradlinigen Schwingung kann also nur eine Funktion ihrer Amplitude sein, und da eine elliptische Schwingung mit drei geradlinigen Komponenten äquivalent ist, so liegt es nahe, ihre Energie, wenigstens in einem isotropen Medium, gleichfalls nur von den Amplituden ihrer Komponenten abhängig anzunehmen.

Nach S. 536 ist nun für alle Schwingungen, die durch bloße Phasenänderungen ineinander übergehen, die Diagonale $D=\sqrt{F^2+G^2+H^2}$ des umschriebenen Parallelepipedons von gleicher Größe und zugleich vom Koordinatensystem unabhängig; da aber auch die Energiedichte sich bei Koordinatentransformationen nicht ändern darf, so wollen wir sie spezieller als eine Funktion von D allein ansetzen.

Die unzweifelhafte Willkürlichkeit dieser Festsetzung wird vielleicht gemildert, indem man sie nach S. 536 anschaulicher dahin formuliert, daß die mittlere Energiedichte einer Funktion des über eine Periode gebildeten Mittelwertes von p^2 gleichgesetzt wird. Ihre Rechtfertigung findet sie aber allein in der Übereinstimmung der aus ihr gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung.

In welcher Weise die Energiedichte resp. I in einem isotropen Medium spezieller von D abhängt, werden wir später erörtern; hier genügt es, einerseits zu benutzen, daß, wenn für Wellen derselben Farbe in demselben Medium D konstant ist, gleiches auch von I gelten muß, und andererseits, daß wachsendem, abnehmendem und verschwindendem D auch eine wachsende, abnehmende und verschwindende Intensität entsprechen muß. Wir können demgemäß die Betrachtungen, soweit sie nur qualitativer Art sind, statt auf die Intensität I selber, deren Gesetz uns unbekannt ist, auch auf die Intensitätsgröße D^2 richten und wollen demgemäß weiter verfahren.

Ebenso wie die vorstehend formulierte Frage, so wollen wir auch die andere nach dem Gesetze für die Intensität eines Gemisches von Licht verschiedener Farbe zunächst noch offen lassen.

Wir betonen schließlich noch, daß, wenn auch I resp. D^2 ein Skalar ist, der von den Parametern der Schwingung einige gar nicht, andere nur in einer einzigen Kombination enthält, dennoch, wie schon das oben erwähnte HUYGHENS'sche Experiment zeigt, und wie auch weitere Erscheinungen, auf die wir bald eingehen werden, beweisen, die allgemeine Theorie durchaus an die vollständigen Formeln für die Vektorkomponenten u, v, w anzuknüpfen ist.

§ 4. Die Interferenz polarisierten Lichtes. Allgemeine Eigenschaften transversaler Schwingungen.

Wir haben schon S. 535 bemerkt, daß der Vektor p ganz allgemein eine elliptische Schwingung ausführt; wir wissen aber noch nicht, wie sich in einzelnen Fällen die Gestalt ihrer Bahn oder die Lage ihrer Ebene bestimmt. In der That sind diese Verhältnisse je

nach den Umständen, d. h. je nach den Einwirkungen, welche das von einer Quelle ausgehende Licht erfährt, überaus verschieden und so kompliziert, daß ihre Klarstellung die Hilfe der vollentwickelten Theorie verlangt; es giebt aber einen Fall von fundamentaler Bedeutung, in welchem sich Lage und Gestalt der Schwingungsellipse bei Zugrundelegung der obigen Prinzipien durch die Beobachtung eindeutig bestimmen lassen, und wir wollen auf diesen jetzt näher eingehen.

Wenn ein Strahlenbündel, am einfachsten von einfarbigem Lichte, auf ein hinreichend dickes Spaltungsstück von Doppelspat normal auffällt, so treten aus der zur Einfallsfläche parallelen zwei gesonderte Strahlenbündel aus, die wir auf Grund des HUYGHENS'schen Experimentes als normal zu einander polarisiert bezeichneten. Durch eine geeignet aufgestellte Blende kann man das eine Bündel beseitigen und das andere gesondert zur Wirkung bringen; wir wollen willkürlich annehmen, daß für letzteres das oben als das ordinäre bezeichnete Bündel gewählt ist.

Richtet man nun zwei nahe identische Spaltungsstücke in gleicher Weise her und bringt die hindurchgegangenen Schwingungen zur Interferenz, indem man die Spaltungsstücke mit dem YOUNG'schen oder dem JAMIN'schen Apparat kombiniert, so zeigt die Beobachtung dieselbe Interferenzerscheinung, wie bei fehlenden Krystallen, wenn beide sich in parallelen Lagen befinden; dreht man dann aber den einen Krystall um die Richtung des durchgehenden ordinären Bündels, so nehmen die Interferenzen an Stärke ab und sind völlig verschwunden, die wahrgenommenen Lichtintensitäten also völlig konstant, wenn die Drehung, und somit der Winkel χ zwischen den beiden Hauptschnitten, $\frac{1}{2}\pi$ beträgt; sie erscheinen wieder bei weiterer Drehung und erreichen ein Maximum der Stärke, wenn $\chi = \pi$ ist, nehmen dann wieder ab, verschwinden für $\chi = \frac{3}{2}\pi$ abermals und erreichen bei $\chi = 2\pi$ den Ausgangswert wieder.

Diese Beobachtung, welche in minder einfacher Weise von FRESNEL und ARAGO an dem YOUNG'schen Apparat angestellt ist[10]), führt zu dem Schluß, daß zwei Wellen von der Natur, wie sie hier aus dem Doppelspat austreten, interferieren, wie das direkt von der Quelle ausgehende, d. h. wie das natürliche Licht, wenn sie zu einander parallel polarisiert sind, — daß sie aber nicht interferieren, wenn sie zu einander normal polarisiert sind.

Um diese wichtige Beobachtung theoretisch zu verwerten, gehen wir von dem in (1'''') analytisch gefaßten Interferenzprinzip aus,

vermöge dessen zwei oder mehrere gleichzeitig an einem Punkte eintreffende Schwingungen sich zu einer einzigen zusammensetzen, deren Zustandsfunktionen die Summen der bezüglichen Einzelwerte sind; wir erhalten also, da die Zustandsfunktionen den Komponenten u, v, w eines Vektors p gleichgesetzt sind, für nur zwei interferierende Wellen:

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$
$$p^2 = (u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2 + (w_1 + w_2)^2.$$

Zwei ebene Wellen, die in einem Winkel χ gegeneinander polarisiert sind, werden nach dem S. 536 Ausgeführten dargestellt durch

$$4) \begin{cases} u_1 = F_1 \sin T_1, & u_2 = F_1 \beta \cos\chi \sin(T_1 - d) - G_1 \beta \sin\chi \sin(T_2 - d), \\ v_1 = G_1 \sin T_2, & v_2 = F_1 \beta \sin\chi \sin(T_1 - d) + G_1 \beta \cos\chi \sin(T_2 - d), \\ w_1 = H_1 \sin T_3, & w_2 = H_1 \beta \sin(T_3 - d), \end{cases}$$

worin die T_h Abkürzungen sind, deren Bedeutung die Vergleichung mit dem System (3‴) ergiebt.

Wir bestimmen nun für die durch Interferenz aus diesen beiden Wellen entstehende Schwingung die resultierenden Amplituden F, G, H, aus denen die Intensitätsgröße $D^2 = F^2 + G^2 + H^2$ sich berechnet. Es ergiebt sich allgemein

$$4') \begin{cases} F^2 = F_1^2 + 2 F_1 \beta \left(F_1 \cos\chi \cos d - G_1 \sin\chi \cos(a - b - d)\right) \\ \qquad + \beta^2 \left(F_1^2 \cos^2\chi + G_1^2 \sin^2\chi - 2 F_1 G_1 \cos\chi \sin\chi \cos(a - b)\right), \\ G^2 = G_1^2 + 2 G_1 \beta \left(F_1 \sin\chi \cos(a - b + d) + G_1 \cos\chi \cos d\right) \\ \qquad + \beta^2 \left(F_1^2 \sin^2\chi + G_1^2 \cos^2\chi + 2 F_1 G_1 \cos\chi \sin\chi \cos(a - b)\right), \\ H^2 = H_1^2 (1 + 2\beta \cos d + \beta^2). \end{cases}$$

Für die beiden oben hervorgehobenen Spezialfälle zweier parallel und zweier normal zu einander polarisierter Wellen giebt dies

$$4'') \begin{cases} D^2_{(\chi = 0)} = (F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(1 + 2\beta \cos d + \beta^2), \\ D^2_{(\chi = \frac{1}{2}\pi)} = (F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(1 + \beta^2) \\ \qquad - 2\beta (2 F_1 G_1 \sin(a - b) \sin d - H_1^2 \cos d). \end{cases}$$

Interferenz findet nun statt, wenn die Intensität, und somit D^2 vom Gangunterschied, d. h. also von d abhängig ist.

Die erste Formel zeigt, daß parallel polarisierte Wellen immer interferieren, denn das von d abhängige Glied ist nur dann gleich Null, wenn entweder eine oder beide Wellen verschwindende Intensität besitzen.

Die zweite Formel zeigt, daß normal zu einander polarisierte Wellen im bisher benutzten allgemeinen Wortsinn gleichfalls inter-

ferieren können, daß somit in dem oben erwähnten Experiment das Schwingungsgesetz der beobachteten Wellen ein spezielleres sein muß, als das in den Formeln (4) ausgedrückte.

Die Intensität wird für $\chi = \frac{1}{2}\pi$ von d unabhängig, wenn die beiden Bedingungen

$$F_1 G_1 \sin(a - b) = 0, \quad H_1 = 0 \tag{4'''}$$

erfüllt sind. Die zweite, welche wir vorausnehmen, ergiebt $w_1 = w_2 = 0$ und sagt aus, daß die Schwingungsebene des Lichtvektors in der Wellenebene liegen, die Schwingung also transversal sein muß.

Um die erste Bedingung zu verwerten, betrachten wir die Bahngleichung für die Schwingung des Vektors p_1, welche nach (2'''') für ein in die Wellenebene gelegtes XY-Koordinatensystem lautet

$$\frac{u_1^2}{F_1^2} + \frac{v_1^2}{G_1^2} - \frac{2\, u_1 v_1}{F_1 G_1} \cos(a - b) = \sin^2(a - b). \tag{5}$$

Die Hauptaxen dieser Ellipse sind um Winkel μ gegen die X-Axe geneigt, welche die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2 F_1 G_1}{F_1^2 - G_1^2} \cos(a - b) \tag{5'}$$

sind, das Axenverhältnis $\alpha : \beta = \operatorname{tg} \nu$ ist gegeben durch die Formel

$$\sin 2\nu = \frac{2 F_1 G_1}{F_1^2 + G_1^2} \sin(a - b). \tag{5''}$$

Da der Nenner rechts nur dann gleich Null ist, wenn die Schwingung überhaupt verschwindet, so degeneriert die Ellipse zu einer geraden Linie auch nur dann, wenn

$$F_1 G_1 \sin(a - b) = 0 \tag{5'''}$$

ist. Diese Formel stimmt mit der ersten in (4''') überein, und es ergiebt sich hiernach, daß die beiden aus einer Doppelspatplatte austretenden ebenen Wellen geradlinige transversale Schwingungen ausführen.

Über die Lage dieser geradlinigen Schwingungen in der Wellenebene läßt sich auf Grund der Symmetrieverhältnisse des Krystalles noch ein Schluß ziehen. Seinem physikalischen Verhalten, wie seiner Form nach ist der Kalkspat symmetrisch in Bezug auf die Ebene normal zu einer Spaltungsfläche durch die Hauptaxe, d. h. in Bezug auf jenen Hauptschnitt, welcher bei dem vorausgesetzten Experiment die beiden im Krystall fortgepflanzten Strahlen enthält. Die Schwingungsrichtung des Vektors kann also bei beiden nur parallel oder senkrecht zum Hauptschnitt liegen. Es ist klar, daß man dem Lichtvektor p die eine oder die andere Lage für jede der beiden Wellen erteilen

kann; da aber nach altem Gebrauch der ordinäre Strahl als im Hauptschnitt, der extraordinäre als normal dazu polarisiert bezeichnet wird, so ist es bequem, die Vektoren p als in jenen Polarisationsebenen schwingend anzunehmen. Wir wollen demgemäß und zum Unterschied von anderen, später einzuführenden den Vektor p den Polarisationsvektor nennen.

Nachdem die beiden aus einem Kalkspat normal austretenden Wellen als lineär polarisiert erkannt worden sind, kann man gegebenes Licht irgend welcher Herkunft dann als gleichfalls lineär polarisiert betrachten, wenn es die gleichen Eigenschaften hat, wie eine jener Wellen. Dies läßt sich konstatieren, indem man ein abgesondertes feines Strahlenbündel in der oben beschriebenen Weise durch einen hinreichend dicken, als Analysator dienenden Kalkspat gehen läßt und das Verhalten der beiden austretenden Bündel bei einer Drehung des Krystalles um die Richtung des einfallenden Bündels untersucht. Verschwindet jedes der austretenden Bündel bei gewissen Positionen des Analysators, so ist das einfallende Licht jedenfalls lineär polarisiertes. Dieser Nachweis ist, wie sich weiter zeigen wird, von allergrößter praktischer Wichtigkeit.

Beiläufig werde bemerkt, daß man, um nicht an die Benutzung feiner Strahlenbündel gebunden zu sein, aus Kalkspat eigentümliche Präparate hergestellt hat, welche von den beiden Wellen, die aus einer eintretenden entstehen, nur die eine austreten lassen, die andere aber durch eine innere Reflexion so ablenken, daß sie abgeblendet und somit unwirksam gemacht werden kann. Diese Präparate, deren Konstruktion zu beschreiben hier zu weit führen würde, werden nach dem Erfinder des zumeist benutzten Nicol'sche Prismen oder kurz Nicols genannt. —

Aus dem Resultat, welches oben über die Natur der normal aus dem Doppelspat austretenden Wellen erhalten ist, zieht man gewöhnlich die Folgerung, daß, wie jede der austretenden, so auch die einfallende ebene Welle natürlichen Lichtes nur transversale Schwingungen enthält. Dieser Schluß ist nicht zwingend; man kann ihn aber durch die Überlegung stützen, daß, wenn die einfallende Welle longitudinale Schwingungen enthielte, die nicht in den durchgehenden Wellen fortbeständen, dann die reflektierten Wellen einen Überschuß an longitudinalen Schwingungen enthalten müßten, der bei wiederholten Reflexionen sich immer steigern und dadurch auch den reflektierten Bruchteil des einfallenden Lichtes vergrößern würde. Da eine solche allmähliche Steigerung der relativen Intensität der reflektierten Wellen aber nicht bemerkt ist, so erscheint das Vorhandensein von

longitudinalen Schwingungen in ebenen Wellen natürlichen Lichtes sehr unwahrscheinlich, wenn es auch nicht mit Strenge ausgeschlossen werden kann.

Vollkommen unzulässig würde aber der Schluß sein, daß, weil in ebenen Wellen natürlichen Lichtes die Schwingungen transversal stattfinden, Gleiches unter allen Umständen stattfinden müßte. Wir werden vielmehr später zeigen, daß nicht nur Kugelwellen stets, sondern auch ebene Wellen unter gewissen Umständen neben den transversalen auch longitudinale Schwingungen ausführen.

Wir schließen indessen derartige Fälle zunächst aus und unterwerfen jetzt nur noch der genaueren Untersuchung die Schwingungen, welche in ebenen Wellen transversal stattfinden können.

Im allgemeinen ergeben die Untersuchungen von S. 535, daß, gleichviel welchen Ursprung die Lichtbewegung hat, die Schwingung des Vektors p eine elliptische sein muß; in unserem Falle muß dann speziell die Bahn in die Wellenebene fallen.

Um die Umstände festzustellen, unter denen die elliptische Schwingung degeneriert, kombinieren wir den allgemeinen Ansatz (2)

$$\left.\begin{aligned} u &= F' \sin T + F'' \cos T = F \sin (T - a), \\ v &= G' \sin T + G'' \cos T = G \sin (T - b), \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

worin kurz

$$2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right) = T$$

gesetzt ist, mit der Gleichung der Bahnellipse (5)

$$\frac{u^2}{F^2} + \frac{v^2}{G^2} - \frac{2uv}{FG} \cos (a - b) = \sin^2 (a - b) \qquad 6')$$

und bemerken, daß

$$F'G' + F''G'' = FG \cos (a - b), \quad F'G'' - F''G' = FG \sin (a - b) \qquad 6'')$$

ist.

Die Bahnellipse erscheint auf ihre Hauptaxen bezogen, wenn

$$FG \cos (a - b) = F'G' + F''G'' = 0,$$

also

$$a - b = \frac{2h + 1}{2}\pi \qquad 7)$$

ist; hier wird dann

$$u = F \sin (T - a), \quad v = \pm G \cos (T - a)$$

oder auch

$$u = \mp F \cos (T - b), \quad v = G \sin (T - b). \qquad 7')$$

Das obere Vorzeichen entspricht dabei negativer (rechter), das untere positiver (linker) Rotation um die $+Z$-Axe, längs welcher

die Fortpflanzung der Welle geschieht; ihnen korrespondieren die Werte

7'') $$F'G'' - F''G' = \pm FG.$$

Die Bahnellipse degeneriert zum **Kreise**, wenn außer diesen Bedingungen noch erfüllt ist

8) $$F = G \text{ resp. } F'^2 + F''^2 = G'^2 + G''^2.$$

Die Bahnellipse wird zur **Geraden**, wenn, wie schon benutzt,

$$FG \sin(a - b) = F'G'' - F''G' = 0,$$

8') $$\text{also } a - b = h\pi$$

ist; hier wird

$$u = F \sin(T - a), \quad v = \pm G \sin(T - a)$$

oder

8'') $$u = \pm F \sin(T - b), \quad v = G \sin(T - b).$$

Das obere Vorzeichen entspricht einer Schwingung im ersten und dritten, das untere einer im zweiten und vierten Quadranten; in diesen beiden Fällen gilt dann gleichzeitig

8''') $$F'G' + F''G'' = \pm FG. —$$

Die vorstehenden Resultate geben wichtige Direktiven an die Hand zur praktischen Herstellung beliebiger transversal-elliptischer Schwingungen aus lineären, welche, wie S. 541 erörtert, durch einen Kalkspat, resp. durch einen Nicol aus natürlichem Licht direkt erhalten werden können.

Läßt man nämlich eine ebene Welle lineärpolarisierten Lichtes auf einen Kalkspat normal auffallen, sodaß die Polarisationsrichtung mit dem Hauptschnitt einen beliebigen Winkel einschließt, so entstehen in dem Krystall zwei normal zu einander gerichtete lineäre Schwingungen, und gleiche treten aus dem Krystall aus.

Nach S. 534 haben diese Wellen Amplituden, welche vom Winkel χ zwischen dem Hauptschnitt des Krystalles und der Polarisationsebene des auffallenden Lichtes — beiläufig in ziemlich komplizierter und erst später bestimmbarer Weise — abhängen; außerdem besitzen sie eine relative Phasendifferenz, aus der man schließt, daß sie sich mit verschiedener Geschwindigkeit in dem Krystall fortpflanzen; sie setzen sich also bei weiterer gemeinsamer Fortpflanzung zusammen zu einer Welle elliptischen Lichtes.

Ein besonders wichtiger Fall, den wir weiterhin voraussetzen wollen, ist der, daß die austretenden Amplituden **gleich** sind, was erreicht wird, wenn der Winkel χ nahe 45^0 beträgt; hier kann je

nach der Größe der Phasendifferenz jede Ellipticität vom Grenzfall der geraden Linie bis zu dem des Kreises hervorgebracht werden.

Bildet man aus dem Kalkspat einen Keil mit äußerst kleinem brechenden Winkel, der an jeder Stelle sehr nahe als eine planparallele Platte betrachtet werden darf, so werden die austretenden Wellen in der Richtung parallel der Keilkante gleichen, in der Richtung normal dazu stetig veränderlichen Polarisationszustand zeigen. Und zwar werden, von einem Streifen ausgehend, für den die relative Phasendifferenz $(a-b)$ gleich $2n\pi$ ist, wo also das austretende Licht dem einfallenden parallel lineär polarisiert ist, mit wachsendem $(a-b)$, also bei Entfernung von der Keilkante, elliptische Schwingungen mit negativer Rotationsrichtung folgen, die bei $a-b=(2n+\frac{1}{2})\pi$ in kreisförmige übergehen und bei $a-b=(2n+1)\pi$ sich in lineäre verwandeln, deren Richtung um 90^0 gegen die Ausgangsrichtung gedreht ist. Bei weiterem Wachsen von $a-b$ folgen elliptische Schwingungen mit positiver Rotationsrichtung, die speziell bei $a-b=(2n+\frac{3}{2})\pi$ wieder kreisförmig, bei $a-b=(2n+2)\pi$ lineär und den ursprünglichen parallel sind. Genaueren Aufschluß über den Zustand an jeder Stelle geben die Formeln (5') und (5'').

Fängt man die austretenden Wellen mit einem Nicol auf und läßt sie dann ins Auge gelangen, so werden gewisse Streifen des Keiles bei bestimmten Stellungen des Nicols dunkel erscheinen; es sind diejenigen Streifen, aus denen lineärpolarisiertes Licht austritt, und zwar dann, wenn die Polarisationsebene des Nicols normal steht zu derjenigen der aus dem Keil austretenden Welle.

Wenn auf den Keil, statt des lineären, irgendwie elliptisch polarisiertes Licht auffällt, und die Orientierung wiederum so gewählt wird, daß die beiden austretenden Komponenten gleiche Amplituden haben, so zeigt die resultierende Welle denselben Charakter, der oben beschrieben ist; nur sind die verschiedenen Streifen gegen die Keilkante etwas verschoben, da die einfallenden Komponenten bereits eine Phasendifferenz besaßen, die sich zu der im Keil entstehenden summiert. —

§ 5. Eigenschaften und analytische Darstellung des natürlichen und des teilweise polarisierten Lichtes. Allgemeine Bedingung für die Transversalität der Lichtschwingungen.

Die Entwickelungen des vorigen Abschnittes hatten uns dazu geführt, die Schwingungen in ebenen Wellen natürlichen Lichtes als transversal anzunehmen, sie haben uns aber einen näheren Ein-

blick in die Natur dieser Schwingungen noch nicht gewährt; wir wenden uns dazu, einen solchen nunmehr zu gewinnen.

Von charakteristischen Eigenschaften des natürlichen Lichtes haben wir bisher nur die eine kennen gelernt, daß die Intensitäten der beiden aus einer normal auffallenden Welle solchen Lichtes mittels eines Kalkspates abgesonderten lineär polarisierten Wellen von der Orientierung des Hauptschnittes des Krystalles unabhängig sind.

Entsinnen wir uns, daß jede transversale Schwingung durch die Werte ihrer Komponenten nach zwei auf einander normalen und in der Schwingungsebene liegenden Komponenten darstellbar ist, so können wir dies Resultat auch dahin aussprechen, daß bei natürlichem Licht diese Komponenten Intensitäten besitzen, die unabhängig sind von den Richtungen, nach denen sie genommen sind.

Suchen wir unter den oben besprochenen transversalen Schwingungsarten eine, die diese Eigenschaft besitzt, so ist schon nach Symmetrie klar, daß nur die zirkular polarisierte in Betracht kommen kann. In der That ergiebt die durch (7′) bestimmte Bewegung für $F = G$ nach einer Richtung, die einen Winkel φ mit der X-Axe einschließt, eine Komponente

$$F(\sin(T-a)\cos\varphi \pm \cos(T-a)\sin\varphi) = F\sin(T-a\pm\varphi),$$

deren Amplitude gleich F, also von φ unabhängig ist.

Nach dem Bisherigen könnten also in ebenen Wellen natürlichen Lichtes zirkulare Schwingungen stattfinden.

Wir ziehen nunmehr aber eine zweite Erfahrungsthatsache bezüglich des natürlichen Lichtes heran, dahin gehend, daß dasselbe seinen Charakter nicht ändert, wenn man der einen Komponente eine beliebige Verzögerung gegen die dazu normale erteilt.

Man kann dies beweisen, indem man natürliches Licht durch einen sehr flachen Keil aus Kalkspat hindurchgehen läßt und das austretende Licht mit einem Nicol'schen Prisma untersucht. Obwohl hier nach S. 546 nebeneinander liegende Teile der Welle, in Komponenten mit den verschiedensten relativen Verzögerungen zerlegt, austreten, zeigt keiner bei einer Drehung des Analysators eine Veränderlichkeit der Intensität.

Daß zirkular polarisiertes Licht diese Eigenschaft nicht besitzt, ergiebt ohne weiteres das auf S. 546 weiter Gesagte, und somit ist ausgeschlossen, daß natürliches Licht mit zirkular polarisiertem identisch sei.

Da hierdurch auch bewiesen ist, daß keiner der überhaupt möglichen Polarisationszustände für sich die Eigenschaften natürlichen

Lichtes zeigt, so bleibt nur die schon auf S. 530 angekündigte Annahme übrig, daß letzteres verschiedene Polarisationszustände in sehr schneller Folge nach einander enthalte.

Diese Annahme bietet zunächst eine große Schwierigkeit, da sie mit der beobachteten und oben beschriebenen Erscheinung der Interferenz zwischen zwei aus derselben Welle abgezweigten und gegeneinander verzögerten Wellen im Widerspruch zu stehen scheint. In der That, wenn der Schwingungszustand fortwährenden Veränderungen unterworfen ist, so können diese Wellenteile, als in ganz verschiedener und fortwährend wechselnder Bewegung befindlich, eine regelmäßige Interferenzerscheinung nicht zeigen. Die sichere Beobachtung von Interferenzerscheinungen bei Gangunterschieden, welche einer Wegdifferenz von ca. 50000 Wellenlängen entsprechen[11]), zwingt uns daher dazu, die Hypothese von zeitlich wechselnden Schwingungszuständen im natürlichen Licht dahin zu spezialisieren, daß jeder einzelne Zustand lange genug andauert, um eine sehr große Anzahl — vielleicht viele Millionen — regelmäßiger Schwingungen auszusenden; da die Schwingungszahl der dem Auge wahrnehmbaren Farben im Mittel etwa 6.10^{14} beträgt, so können trotzdem überaus viele Wechsel des Zustandes in der Sekunde stattfinden.

Diese Auffassung des natürlichen Lichtes, zu welcher seine an die Spitze gestellten Eigenschaften drängen, wird kräftig gestützt durch die Erfahrung, daß zwei Wellen, welche von zwei verschiedenen Lichtquellen ausgehen, auch wenn sie durch einen Kalkspat nach derselben Richtung lineär polarisiert werden, unter keinen Umständen Interferenzen liefern.

Das Ausbleiben dieser Erscheinungen wäre nicht einzusehen, wenn jede Quelle ihren Schwingungszustand dauernd beibehielte; es erklärt sich aber sofort, wenn man denselben gemäß dem Obigen unausgesetzt wechselnd denkt. Denn da beide Quellen voneinander unabhängig sind, so besitzen an derselben Stelle innerhalb wahrnehmbarer Zeit die beiden Wellen alle möglichen Phasendifferenzen, können also bestimmt charakterisierte Interferenzen nicht ergeben.

Die erörterte Auffassung wird endlich auch nahe gelegt durch die Überlegung der Vorgänge, die sich wahrscheinlich in einer, gleichviel wie kleinen, Lichtquelle abspielen. Die chemischen Vorgänge, welche hier stattfinden, betreffen bald dies, bald jenes materielle Teilchen, und die dabei eintretenden Schwingungen werden gleichmäßig nur andauern, so lange die bewegenden Umstände die gleichen sind, und nach deren Aufhören binnen sehr kurzer Zeit durch Widerstände vernichtet werden.

Die von der Quelle ausgehende Schwingung ist die Resultante aus den von den einzelnen Teilchen fortgepflanzten und wird demnach auch fortwährend wechseln. Ja man kann auf Grund dieser Erwägung behaupten, es sei weniger verwunderlich, daß der Schwingungszustand dauernd wechselt, als daß überhaupt eine so große Reihe merklich gleichartiger Schwingungen einander folge, wie die Interferenzerscheinungen ergeben.

Schließlich sei noch hervorgehoben, daß nur bei derartig wechselnden Schwingungszuständen eine Lichtquelle so, wie im Eingang angenommen, sich nach allen Richtungen hin ganz gleichmäßig wirksam erweisen kann; jede regelmäßige Schwingung würde eine Verschiedenwertigkeit verschiedener Fortpflanzungsrichtungen zur Folge haben. —

Wir gehen nun zu dem analytischen Nachweis über, daß überhaupt und unter welchen Voraussetzungen die eingeführte Auffassung des natürlichen Lichtes mit dessen zwei Fundamentaleigenschaften im Einklang ist.

Der Ansatz

$$9)\qquad \begin{cases} u = F' \sin T + F'' \cos T, \\ v = G' \sin T + G'' \cos T \end{cases}$$

stellt bei zeitlich in beliebiger Weise veränderlichen F und G eine Welle homogenen Lichtes von veränderlichem Schwingungszustand dar. Eine Verzögerung der Komponente v um einen Betrag d setzt nur

$$G' \cos d + G'' \sin d = G_0' \text{ an Stelle von } G',$$
$$- G' \sin d + G'' \cos d = G_0'' \text{ an Stelle von } G''.$$

Um die erste der beiden Fundamentaleigenschaften in Betracht zu ziehen, bilden wir die Komponente q nach einer beliebigen Richtung, welche um den Winkel φ gegen die X-Axe geneigt ist, d. h. den Ausdruck

$$9')\qquad q = (F' \cos\varphi + G' \sin\varphi) \sin T + (F'' \cos\varphi + G'' \sin\varphi) \cos T.$$

Ist die Änderung der F und G innerhalb einer großen Zahl von Perioden unmerklich, wie nach dem oben Gesagten anzunehmen nötig, so sind die Intensitätsgrößen D^2 der ganzen Welle und D_φ^2 ihrer Komponente in der durch φ bestimmten Richtung zu einem beliebigen Zeitpunkt gegeben durch

$$9'')\qquad D^2 = F'^2 + F''^2 + G'^2 + G''^2,$$

$$9''')\qquad \begin{cases} D_\varphi^2 = (F' \cos\varphi + G' \sin\varphi)^2 + (F'' \cos\varphi + G'' \sin\varphi)^2 \\ \quad = (F'^2 + F''^2) \cos^2\varphi + (G'^2 + G''^2) \sin^2\varphi \\ \qquad + 2(F'G' + F''G'') \cos\varphi \sin\varphi. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den mittleren Wert einer Funktion Π während einer der Wahrnehmung eben noch zugänglichen Zeit durch $\mathfrak{S}\,\Pi$, so ergeben sich als Bedingungen für die Unabhängigkeit des mittleren Wertes $\mathfrak{S}\,D_\varphi^2$ der Intensitätsgröße D_φ^2 von dem Winkel φ, der die Richtung der genommenen Komponente bestimmt, die zwei Formeln

$$\mathfrak{S}(F'^2 + F''^2) - \mathfrak{S}(G'^2 + G''^2) = 0, \quad \mathfrak{S}(F'G' + F''G'') = 0. \qquad 9'''')$$

Indessen reichen diese beiden Bedingungen noch nicht aus, um natürliches Licht zu charakterisieren, da sie, wie oben gesagt und aus den Formeln (7) und (8) folgt, auch bei zirkular polarisiertem erfüllt sind.

Wir denken demgemäß die Verzögerung d hervorgebracht, ersetzen G', G'' durch G_0', G_0'' und suchen die Bedingungen dafür auf, daß die mittlere Intensitätsgröße $\mathfrak{S}\,D_\varphi^2$ auch von d unabhängig ist.

Die erste Formel (9'''') ändert sich durch die Vertauschung nicht; die zweite aber nimmt die Gestalt an

$$\mathfrak{S}\left[(F'G' + F''G'')\cos d + (F'G'' - F''G')\sin d\right] = 0,$$

welche bei willkürlichem d zerfällt in

$$\mathfrak{S}(F'G' + F''G'') = 0, \quad \mathfrak{S}(F'G'' - F''G') = 0. \qquad 10)$$

Diese beiden Beziehungen, verbunden mit

$$\mathfrak{S}(F'^2 + F''^2) - \mathfrak{S}(G'^2 + G''^2) = 0, \qquad 10')$$

sprechen somit drei für natürliches Licht charakteristische Eigenschaften aus.[12])

Führt man die Amplituden F, G und die Verzögerungen a, b ein, so nehmen diese Bedingungen die Gestalt an

$$\mathfrak{S}(F^2 - G^2) = 0, \quad \mathfrak{S}\,FG\cos(a-b) = 0, \quad \mathfrak{S}\,FG\sin(a-b) = 0. \qquad 10'')$$

Der mittlere Wert der gesamten Intensitätsgröße D^2 ergiebt sich hiernach zu

$$\mathfrak{S}\,D^2 = 2\,\mathfrak{S}(F'^2 + F''^2) = 2\,\mathfrak{S}\,F^2. \qquad 10''')$$

Die gefundenen Bedingungen (10) und (10'), resp. (10''), sind auf unendlich viele Weisen erfüllbar; man kann sonach aus ihnen über den Schwingungszustand im natürlichen Licht eine genaue Aufklärung nicht erhalten. Eine ganz spezielle Lösung derselben wird durch lineäre Schwingungen gegeben, deren Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit um die Wellennormale rotiert.

Hier ist in dem Ansatz (9)

$$F' = A\cos\alpha t, \quad G' = A\sin\alpha t, \quad F'' = G'' = 0$$

zu setzen, und sind die Summen in (10) und (10') mit den Integralen über die Dauer einer Rotation zu vertauschen. Ist diese Dauer sehr

groß gegen die einer Lichtschwingung, so findet eine sehr bedeutende Zahl von Schwingungen bei nur unmerklich veränderter Schwingungsrichtung statt, und es kann demnach eine Interferenz auch bei großen Gangunterschieden eintreten. In der That kann man an Licht, welches durch einen hinreichend schnell rotierenden Polarisator geliefert wird, alle Eigenschaften natürlichen Lichtes nachweisen. —

Sind durch eine gegebene Welle nicht alle drei Bedingungen (10″) erfüllt, so nennen wir das betreffende Licht teilweise polarisiert. Um die verschiedenen hierbei vorliegenden Möglichkeiten anschaulich zu deuten, wollen wir eine Welle betrachten, die durch Superposition von natürlichem und elliptisch polarisiertem Licht erhalten ist.

Für eine solche setzen wir

$$11)\quad \begin{cases} u = A' \sin T + A'' \cos T = (F' + F_1') \sin T + (F'' + F_1'') \cos T, \\ v = B' \sin T + B'' \cos T = (G' + G_1') \sin T + (G'' + G_1'') \cos T, \end{cases}$$

und zwar mögen die F', F'' und G', G'' die frühere Bedeutung haben, die F_1', F_1'' und G_1', G_1'' aber Konstanten sein.

Nunmehr werden die Bedingungen (10) und (10′) durch A', A'', B', B'' an Stelle von F', F'', G', G'' nicht mehr erfüllt sein, es wird vielmehr statt derselben etwa gelten

$$11')\quad \begin{cases} \mathfrak{S}(A'^2 + A''^2) - \mathfrak{S}(B'^2 + B''^2) = \mathsf{A}, \\ \mathfrak{S}(A'B' + A''B'') = \mathsf{B}, \quad \mathfrak{S}(A'B'' - A''B') = \Gamma, \end{cases}$$

wobei A, B, Γ Konstanten bezeichnen. Diese Formeln nehmen, da die F', F'' und G', G'', als natürlichem Licht entsprechend, den alten Bedingungungen noch genügen müssen, die Gestalt an:

$$11'')\quad \begin{cases} (F_1'^2 + F_1''^2 + 2 F_1' \mathfrak{S} F' + 2 F_1'' \mathfrak{S} F'') \\ -(G_1'^2 + G_1''^2 + 2 G_1' \mathfrak{S} G' + 2 G_1'' \mathfrak{S} G'') = \mathsf{A}, \\ F_1' G_1' + F_1'' G_1'' + F_1' \mathfrak{S} G' + F_1'' \mathfrak{S} G'' \\ \qquad + G_1' \mathfrak{S} F' + G_1'' \mathfrak{S} F'' = \mathsf{B}, \\ F_1' G_1'' - F_1'' G_1' + F_1' \mathfrak{S} G'' - F_1'' \mathfrak{S} G' \\ \qquad - G_1' \mathfrak{S} F'' + G_1'' \mathfrak{S} F' = \Gamma. \end{cases}$$

Diese Beziehungen lassen sich indessen noch erheblich vereinfachen, wenn man in Betracht zieht, daß die erste der beiden obigen Fundamentaleigenschaften nicht nur dem natürlichen Licht, sondern auch einem Gemisch von natürlichem und zirkularem zugehört, und daß demgemäß für ein solches A und B verschwinden müssen.

Das dem natürlichen zugefügte elliptische Licht ist nun nach (7) und (8) immer dann zirkularpolarisiert, wenn seine Amplituden den Bedingungen

$$(F_1'^2 + F_1''^2) - (G_1'^2 + G_1''^2) = 0, \quad F_1' G_1' + F_1'' G_1'' = 0 \qquad 11''')$$

genügen; verbinden wir diese Beziehungen mit den Werten $A = B = 0$, so ergeben die beiden ersten Formeln (11′)

$$\left.\begin{aligned} F_1' \mathfrak{S} F' + F_1'' \mathfrak{S} F'' - G_1' \mathfrak{S} G' - G_1'' \mathfrak{S} G'' = 0, \\ F_1' \mathfrak{S} G' + F_1'' \mathfrak{S} G'' + G_1' \mathfrak{S} F' + G_1'' \mathfrak{S} F'' = 0, \end{aligned}\right\} \qquad 11'''')$$

als Bedingungen, welche unter den gemachten Voraussetzungen erfüllt sein müssen.

Nun bestimmen aber die Formeln (11‴) die F_1, G_1 nicht vollständig, sondern zwei von ihnen bleiben mit einer gewissen Beschränkung willkürlich. Wir können daher z. B. $F_1'' = G_1' = 0$ setzen und erhalten dann $F_1' = \pm G_1''$; ebenso auch $F_1' = G_1'' = 0$ und erhalten $F_1'' = \mp G_1'$. Bei allen solchen Verfügungen müssen die Formeln (11⁗) gültig bleiben; sie führen daher zu den weiteren Bedingungen für natürliches Licht

$$\mathfrak{S} F' = \mathfrak{S} F'' = \mathfrak{S} G' = \mathfrak{S} G'' = 0. \qquad 12)$$

Führt man sie in die allgemeinen Gleichungen (11″) ein, so nehmen dieselben die einfache Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} (F_1'^2 + F_1''^2) - (G_1'^2 + G_1''^2) = F_1^2 - G_1^2 = A, \\ F_1' G_1' + F_1'' G_1'' = F_1 G_1 \cos(a_1 - b_1) = B, \\ F_1' G_1'' - F_1'' G_1' = F_1 G_1 \sin(a_1 - b_1) = \Gamma, \end{aligned}\right\} \qquad 12')$$

während der Ausdruck (9‴) für die Größe $\mathfrak{S} D_\varphi^2$ liefert

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S} D_\varphi^2 = \mathfrak{S} (F'^2 + F''^2) + (F_1'^2 + F_1''^2) \cos^2\varphi + (G_1'^2 + G_1''^2) \sin^2\varphi \\ + 2 (F_1' G_1' + F_1'' G_1'') \sin\varphi \cos\varphi \\ = \mathfrak{S} F^2 + \tfrac{1}{2} (F_1^2 + G_1^2) + \tfrac{1}{2} (F_1^2 - G_1^2) \cos 2\varphi \\ + F_1 G_1 \cos(a_1 - b_1) \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad 12'')$$

Ist irgend eine Art von Schwingungen durch Werte von u und v mit veränderlichen Amplituden A', A'', B', B'' gegeben, welche die Bedingungen $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$ nicht erfüllen, und die demnach kein natürliches Licht darstellen, so kann man die vorstehenden Resultate benutzen, um festzustellen, durch welche Beimengung sich die dargestellte Schwingung von natürlichem Licht unterscheidet.

Der allgemeinste Fall ist der einer Beimengung von elliptisch beliebig polarisiertem Licht; er tritt ein, wenn A, B und Γ von Null verschieden sind, und man kann nach (12′) aus ihren Werten die Parameter der Bahnellipse ableiten.

Hat die Bahnellipse die Koordinatenaxen zu Hauptaxen, so ist $B = 0$; A giebt dann direkt die Differenz der Halbaxenquadrate

an, und das Vorzeichen von Γ bestimmt nach (7″) die Rotationsrichtung. Degeneriert die Ellipse zu einem Kreise, so wird $A=0$, zugleich findet sich $\mathfrak{S} D_\varphi^2 = \mathfrak{S} F^2 + F_1^2$.

Der — praktisch wichtigste — Fall, daß die Beimengung aus lineär polarisiertem Licht besteht, ist durch die Bedingung $\Gamma=0$ charakterisiert. Da zugleich

13) $$B = \pm F_1 G_1, \quad A = F_1^2 - G_1^2$$

ist, so kann man aus A und B die Amplitude Δ' und das Azimut Θ' gegen die Richtung der X-Axe für die Beimengung leicht berechnen. Für erstere gilt

13′) $$A^2 + 4B^2 = (F_1^2 + G_1^2)^2 = \Delta'^4,$$

für letzteres

13″) $$\frac{2B}{A} = \pm \frac{2F_1 G_1}{F_1^2 - G_1^2} = \pm \operatorname{tg} 2\Theta';$$

das doppelte Vorzeichen ist so zu verstehen, daß je nach dem Vorzeichen von B das Azimut Θ' in positiver oder in negativer Richtung zu rechnen ist.

Findet sich außer Γ auch noch B gleich Null, so liegt die Polarisationsrichtung der Beimengung entweder in der X- oder in der Y-Axe; ersteres findet statt, wenn hierbei A größer, letzteres, wenn es kleiner als Null ist. Zugleich ist dann der absolute Wert von A dem Quadrat der Amplitude des beigemengten lineär schwingenden Lichtes gleich. —

Die vorstehenden Formeln kommen unter anderem dann zur Anwendung, wenn das bezüglich seiner Schwingungsart zu untersuchende Licht aus natürlichem dadurch entstanden ist, daß dessen Komponenten nach zwei zu einander normalen Richtungen, die wir zur X- und Y-Axe wählen können, verschiedene Schwächungen und Verzögerungen erhalten haben.

Ein solcher Fall ist gegeben durch die Ansätze

14) $$\begin{cases} u = \alpha\,(F' \sin(T-a) + F'' \cos(T-a)) = A' \sin T + A'' \cos T, \\ v = \beta\,(G' \sin(T-b) + G'' \cos(T-b)) = B' \sin T + B'' \cos T, \end{cases}$$

wobei die F und G den Bedingungen (10) und (10′) genügen und gilt:

$$A' = \alpha(F' \cos a + F'' \sin a), \quad A'' = -\alpha(F' \sin a - F'' \cos a),$$
$$B' = \beta(G' \cos b + G'' \sin b), \quad B'' = -\beta(G' \sin b - G'' \cos b).$$

Hier findet sich

14′) $$A = \alpha^2 \mathfrak{S} F^2 - \beta^2 \mathfrak{S} G^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\mathfrak{S} F^2$$
$$B = 0, \quad \Gamma = 0;$$

das untersuchte Licht ist also stets ein Gemisch von natürlichem und lineär polarisiertem, dessen Polarisationsrichtung in die X- oder in die Y-Axe fällt, je nachdem $\alpha^2 > \beta^2$ oder $\beta^2 > \alpha^2$ ist.

Die mittlere Intensitätsgröße der ganzen Bewegung ist

$$\mathfrak{S} D^2 = (\alpha^2 + \beta^2) \mathfrak{S} F^2, \tag{15}$$

die der lineär polarisierten

$$\mathfrak{S} D_p^2 = \pm (\alpha^2 - \beta^2) \mathfrak{S} F^2; \tag{15'}$$

das Verhältnis beider lautet also

$$\frac{\mathfrak{S} D_p^2}{\mathfrak{S} D^2} = \pm \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}. - \tag{15''}$$

Nachdem wir im Vorstehenden nachgewiesen haben, daß das sogenannte natürliche Licht aus transversalen Schwingungen von durch den Ansatz (9) bestimmten Bewegungsarten bestehen muß, die sich in schneller Folge gegenseitig ablösen, und daß es somit im Grunde in jedem Augenblick elliptisch polarisiert ist, drängt sich neuerdings die Frage auf, ob denn bei allem polarisierten Licht, das ja im allgemeinsten Falle auch elliptisch schwingt, der Vektor p eine transversale Bewegung ausführt, und wenn nicht, wodurch dann das natürliche sich noch von dem allgemeinst möglichen unterscheidet.

Indessen ist hier bezüglich entscheidender Erfahrungsthatsachen eine Lücke vorhanden, und es muß an Stelle derselben eine Hypothese gestellt werden, die nur durch die Übereinstimmung der aus ihr gezogenen Folgerungen mit der Beobachtung gestützt wird.

Diese Hypothese geht dahin, daß ebene Wellen, die sich in isotropen Medien fortpflanzen, dann, und nur dann unter allen Umständen transversal schwingen, wenn sie in ihrer ganzen Ausdehnung homogen sind, d. h. überall gleiche Schwingungsform und -stärke besitzen. Es ist ohne weiteres klar, daß bei ebenen Wellen natürlichen Lichtes die Voraussetzung erfüllt ist; denn selbst wenn in großer Nähe der Lichtquelle der Schwingungszustand innerhalb der dort nicht ebenen Welle variiert, so muß diese Änderung stetig geschehen; und das hat in unendlicher Entfernung die Konstanz innerhalb endlicher Stücke zur Folge.

§ 6. Die Differentialgleichungen für die Fortpflanzung von Lichtschwingungen im leeren Raum. Komplexe Lösungen. Die Gleichung der Energie. Die Energie mehrfarbigen Lichtes.

Wir gehen nun dazu über, die allgemeinen Differentialgleichungen für das Verhalten des Polarisationsvektors p abzuleiten, und beginnen

mit der Lösung dieser Aufgabe für den leeren Raum, wo die Verhältnisse am einfachsten liegen. Die Grundlagen für die Entwickelungen bilden die folgenden, im Vorstehenden begründeten Sätze.

Eine homogene ebene Welle kann nur transversale, im übrigen aber beliebige Schwingungen ausführen, und pflanzt sich im leeren Raume mit einer Geschwindigkeit fort, die von dem stattfindenden Schwingungszustand und von der Fortpflanzungsrichtung unabhängig ist. Mehrere fortgepflanzte Schwingungen superponieren sich, ohne auf einander einzuwirken.

Diese Thatsachen werden ausgedrückt durch die Ansätze für die Komponenten von p

16) $$u = \sum F_h\left(t - \frac{r}{v}\right), \quad v = \sum G_h\left(t - \frac{r}{v}\right), \quad w = \sum H_h\left(t - \frac{r}{v}\right),$$

worin F_h, G_h, H_h beliebige periodische Funktionen darstellen, v eine universelle Konstante, die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, bezeichnet, und

16') $$r = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist; dabei muß noch die Bedingung

16'') $$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$$

erfüllt sein, die für jeden Teil gleicher Periode in den Summen (16) gelten muß und auch durch Differentiation liefert

16''') $$\frac{\partial u}{\partial t}\alpha + \frac{\partial v}{\partial t}\beta + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\alpha + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\beta + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\gamma = 0,$$

u. s. f.

Um die Differentialgleichungen für p zu erhalten, sind aus diesen Formeln die willkürlichen Funktionen F_h, G_h, H_h und die Richtungskosinus α, β, γ zu eliminieren.

Aus jeder der Formeln (16) kann man leicht die verlangte Elimination ausführen; man erhält so

17) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \triangle u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v^2 \triangle v, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2 \triangle w;$$

aber dabei bleibt in (16'') α, β, γ vorhanden.

Beachtet man dagegen, daß für homogene ebene Wellen die Funktion

17') $$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

den Wert

$$\vartheta = -\frac{1}{v}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\alpha + \frac{\partial v}{\partial t}\beta + \frac{\partial w}{\partial t}\gamma\right)$$

hat, und daß dieser Ausdruck nach (16″) verschwindet, so kann man die Bedingung

$$\vartheta = 0 \qquad 17'')$$

in unserem Falle als mit (16″) gleichwertig betrachten und die Formeln (17) und (17″) als das gesuchte System bezeichnen, in welchem eine der drei Bedingungen (17) eine Folge der übrigen darstellt.

Dasselbe gestattet leicht die Überführung in die symmetrische Gestalt

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right),\end{array}\right\} \qquad 18)$$

wobei

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad 18')$$

die Komponenten eines zweiten Vektors d darstellen, der die Natur eines der S. 537 charakterisierten geometrischen Hilfsvektoren besitzt.

Diese Gleichungen lassen in der That homogene ebene Wellen nur zu, wenn sie transversal schwingen; es folgt aus dem ersten Tripel nämlich sogleich

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \text{ d. h. } \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\alpha + \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\beta + \frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\gamma = 0,$$

was unter Heranziehung von (16‴) das Behauptete beweist.

Wir betrachten die Systeme (18) und (18′) als die allgemeinen Differentialgleichungen, denen jede Bewegung des Lichtvektors im leeren Raum genügen muß. Man kann sie noch homogener gestalten, indem man vorübergehend

$$\frac{\partial u}{v \partial t} = a, \quad \frac{\partial v}{v \partial t} = b, \quad \frac{\partial w}{v \partial t} = c$$

setzt, wodurch sie die Form annehmen

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v\left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v\left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right); \qquad 18'')$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = v\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial b}{\partial t} = v\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial c}{\partial t} = v\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right). \qquad 18''')$$

Die obigen Gestalten der Grundgleichungen für den leeren Raum geben zwei verschiedene Interpretationen der dargestellten Erscheinungen an die Hand.

Identifiziert man nämlich in der ersten Form (17), (17″) resp. (18), (18′) den Vektor p mit der Verschiebung eines Punktes in einem

nicht-starren Körper, so wird der Vektor d zu dem Doppelten seiner Drillung, und die Gleichungen (17) stimmen nach Bd. I, S. 379 mit den für die Bewegung eines elastischen isotropen, aber inkompressibeln Körpers geltenden überein. Diese Beziehung gestattet, die Lichterscheinungen als auf den Schwingungen eines hypothetischen elastischen Mediums beruhend anzusehen, welches den sogenannten leeren Raum erfüllt und bekanntlich als der Lichtäther bezeichnet wird.

Deutet man dagegen in der zweiten Form (18′), (18″) a, b, c als die Komponenten der magnetischen, ξ, η, ζ als diejenigen der elektrischen Feldstärke, welche eine im leeren Raum stattfindende elektromagnetische Störung bestimmen, so werden die Gleichungen (18″) und (18‴) mit den Grundformeln (248‴) von S. 418 dieses Bandes identisch; und diese Beziehung ist, wie schon früher bemerkt, die Grundlage der sogenannten elektromagnetischen Theorie des Lichtes.

Differentiiert man die dritte Gleichung (18) nach y und zieht von ihr die nach z differentiierte zweite ab, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)\right],$$

was man durch die Abkürzungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = -w_1, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = -v_1$$

auf die Form bringen kann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y}\right).$$

Aus dieser und den beiden entsprechenden Formeln erhellt, daß man ohne Änderung der Bedingungen ξ, η, ζ mit u_1, v_1, w_1 und u, v, w mit ξ, η, ζ vertauschen kann, und hieraus ergiebt sich, daß bei der Fortpflanzung im leeren Raume die Benutzung des Vektors d zu denselben Gesetzen führt, wie diejenige von p. —

Die oben abgeleiteten Grundformeln für den leeren Raum sind lineär homogen, sie gestatten also, wie gesagt, die Superposition verschiedener, in beliebiger Weise fortgepflanzter Schwingungen und führen auf Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die von der Amplitude unabhängig sind; die gleiche Eigenschaft müssen nach dem S. 531 Gesagten auch die Hauptgleichungen für jedes beliebige Medium besitzen. Man macht von dieser Thatsache einerseits in der Weise Gebrauch, daß man bei mehrfarbigem Lichte die Anteile von verschiedener Farbe für sich untersucht und erst die Endresultate super-

poniert. Andererseits behandelt man häufig vorteilhaft zwei Lösungen, die periodischen Schwingungen entsprechen, gleichzeitig, indem man statt reeller trigonometrischer Funktionen Exponentialgrößen mit komplexen Exponenten einführt; es stellt dann nämlich sowohl der reelle, als der imaginäre Anteil — den wir weiter bevorzugen werden — eine Lösung der Grundgleichungen dar.

Über die Verwertung derartiger komplexer Lösungen ist bereits S. 467 einiges mitgeteilt; es genügt daher, hier das ergänzend nachzutragen, was für die speziellen Zwecke der Optik von Bedeutung ist. Dabei mögen komplexe Größen der Übersichtlichkeit halber weiterhin mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden; z. B. seien $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die komplexen Größen, deren reeller oder imaginärer Teil Lösungen für u, v, w ergiebt, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ diejenigen, welche ebenso Lösungen für ξ, η, ζ liefern.

Wir setzen, um ebene Wellen zu erhalten,

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{F} e^{i\mathfrak{T}}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G} e^{i\mathfrak{T}}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{H} e^{i\mathfrak{T}}, \tag{19}$$

worin

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{F} = F' + iF'', \quad \mathfrak{G} = G' + iG'', \quad \mathfrak{H} = H' + iH'' \\ \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right) \end{array}\right\} \tag{19'}$$

und

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{r} = r - i\varkappa r' = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z, \\ r = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad r' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \end{array}\right\} \tag{19''}$$

ist. Dabei bezeichnet ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Ebene konstanter Phase oder der Wellenebene, α, β, γ sind die Richtungskosinus von deren Normalen r, α', β', γ' diejenigen der Normalen r' auf den Ebenen konstanter Amplitude, $\varkappa$ ist der Schwächungsindex der Amplitude längs r'. Die Wellen werden homogen, wenn $\varkappa$ verschwindet oder $r' = r$ wird.

Die komplexen Amplituden $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ kann man durch reelle F, G, H ersetzen, indem man schreibt

$$\mathfrak{F} = F e^{-id_1}, \quad \mathfrak{G} = G e^{-id_2}, \quad \mathfrak{H} = H e^{-id_3}, \tag{19'''}$$

also

$$\mathfrak{u} = F e^{i(\mathfrak{T} - d_1)}, \quad \mathfrak{v} = G e^{i(\mathfrak{T} - d_2)}, \quad \mathfrak{w} = H e^{i(\mathfrak{T} - d_3)}; \tag{19''''}$$

die d_h haben hier somit die Bedeutung von Phasenänderungen.

Die im allgemeinen elliptischen Schwingungen werden linear, wenn

$$\mathfrak{F} : \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$$

reell ist; sie sind transversal, wenn

20) $$\mathfrak{F}\alpha + \mathfrak{G}\beta + \mathfrak{H}\gamma = 0,$$
d. h.
$$F'\alpha + G'\beta + H'\gamma = 0, \quad F''\alpha + G''\beta + H''\gamma = 0$$
ist.

Ist letzteres der Fall, und legen wir die Z-Axe in die Wellennormale r, so wird $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $H' = H'' = 0$, und die Amplituden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ geben Aufschluß über Lage und Form der Bahnellipse von p. Es ist

20′) $$\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}} = \frac{F}{G} e^{-i(d_1 - d_2)} = R' + i R'' = P e^{+id},$$

worin R', R'', P und d Abkürzungen sind. Für die Parameter μ und ν der Bahnellipse ergeben sich dann aus (5′) und (5″) die Beziehungen

20″) $$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{P}{P^2 - 1} \cos d, \quad \sin 2\nu = -\frac{2P}{P^2 + 1} \sin d.$$

Ein spezieller Fall von häufigem Vorkommen ist der, daß speziell
$$\mathfrak{F} = A + iB, \quad \mathfrak{G} = A - iB$$
ist; hier gilt dann leicht ersichtlicher Weise

20‴) $$R' = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}, \quad R'' = \frac{2AB}{A^2 + B^2}, \quad P = 1, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} d = \frac{B}{A}. —$$

Was den allgemeinen Fall einer beliebig orientierten elliptischen Schwingung angeht, so ist der Ansatz (19) äquivalent mit
$$u = \varepsilon(F' \sin T + F'' \cos T), \quad v = \varepsilon(G' \sin T + G'' \cos T),$$
$$w = \varepsilon(H' \sin T + H'' \cos T),$$
wobei
$$\varepsilon = e^{-\frac{2\pi\varkappa r}{\tau\omega}}, \quad T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r}{\omega}\right).$$

Den Amplituden F', F'', ... kann man leicht eine einfache und anschauliche Bedeutung geben. Es sind nämlich ersichtlich $\pm \varepsilon F'$, $\pm \varepsilon G'$, $\pm \varepsilon H'$ und $\pm \varepsilon F''$, $\pm \varepsilon G''$, $\pm \varepsilon H''$ die Komponenten des Vektors p zu den Zeitpunkten, für welche $T = \frac{1}{2}(2h+1)\pi$ und $T = h\pi$ ist, unter h eine ganze Zahl verstanden. Sucht man nun die Bedingung dafür auf, daß zu diesen Zeitpunkten p Maxima und Minima erreicht, so erhält man

21) $$F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0,$$

d. h. $\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2$ reell. Die Erfüllung dieser Bedingung läßt sich, wie eine einfache Überlegung ergiebt, durch geeignete Wahl des Anfangspunktes für die Zeit t jederzeit erreichen; nehmen wir dies als bewirkt an, so folgt, daß

$$\left.\begin{array}{c} p'^2 = \varepsilon^2 (F'^2 + G'^2 + H'^2), \\ f' = \varepsilon F'/p', \; g' = \varepsilon G'/p', \; h' = \varepsilon H'/p' \end{array}\right\} \qquad 21')$$

für die eine, und

$$\left.\begin{array}{c} p''^2 = \varepsilon^2 (F''^2 + G''^2 + H''^2), \\ f'' = \varepsilon F''/p'', \; g'' = \varepsilon G''/p'', \; h'' = \varepsilon H''/p'' \end{array}\right\} \qquad 21'')$$

für die andere Axe der Ellipse das Quadrat der Halbaxe p' resp. p'' und ihre Richtungskosinus f', g', h' resp. f'', g'', h'' angiebt.

Ein spezieller Fall von besonderer Wichtigkeit ist der, daß die Bedingung (21) dadurch erfüllt wird, daß

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 = 1 \qquad 21''')$$

gemacht ist, was sich stets durch Abzweigung eines Faktors aus $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, der auch in die Exponentialgröße $e^{i\mathfrak{T}}$ gezogen werden kann, erreichen läßt. Hier mögen dann $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die komplexen Richtungskosinus der elliptischen Schwingung heißen. Für die Größen und die Richtungskosinus der Halbaxen der Bahnellipse bleiben dabei die Formeln (21') und (21'') gültig, wenn nur das ε, der geänderten Bedeutung der Exponentialgröße entsprechend, gleichfalls geändert wird. —

Von diesen allgemeinen Überlegungen machen wir eine erste Anwendung, um zu zeigen, daß ebene Wellen im leeren Raum auch andere als transversale Schwingungen enthalten können. Wir legen die Wellennormale in die XZ-Ebene, die Richtung konstanter Amplitude in die Y-Axe und erhalten, indem wir, wie oben gesagt, mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die komplexen Funktionen bezeichnen, deren reelle und imaginäre Teile Lösungen für u, v, w darstellen, aus (18) und (18') die Formeln

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{u}'' = v^2 \left(\dfrac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial x \, \partial z}\right), \; \mathfrak{v}'' = v^2 \left(\dfrac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x^2}\right), \\ \mathfrak{w}'' = v^2 \left(\dfrac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x \, \partial z}\right), \end{array}\right\} \qquad 22)$$

welche $\mathfrak{v}$ vollständig von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ sondern.

Nehmen wir zunächst die Gleichung für $\mathfrak{v}$ vor und setzen die Lösung aus (19) ein, worin nach der Annahme jetzt $\mathfrak{b} = 0$ ist, so ergiebt sich

$$\omega^2 = v^2 (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2),$$

während die Amplitude $\mathfrak{G}$ willkürlich bleibt.

Benutzen wir ferner die Lösungen für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ aus (19) in den übrigen Gleichungen, so ergiebt sich zunächst

$$\mathfrak{F}(\omega^2 - v^2 \mathfrak{c}^2) = - \mathfrak{H} v^2 \mathfrak{a} \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{H}(\omega^2 - v^2 \mathfrak{a}^2) = - \mathfrak{F} v^2 \mathfrak{a} \mathfrak{c},$$

und hieraus

22') $$\omega^2 = v^2 (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2), \quad \mathfrak{F}\mathfrak{a} + \mathfrak{H}\mathfrak{c} = 0,$$

wovon die letzte Gleichung auch direkt aus

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0$$

zu gewinnen ist.

Die beiden Formeln für ω stimmen überein, die Komponente $\mathfrak{v}$ und die Resultierende aus $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{w}$ pflanzen sich also mit derselben Geschwindigkeit fort. Sondert man Reelles und Imaginäres, so erhält man

22'') $$\omega^2 = v^2 (1 - \varkappa^2), \quad 0 = \varkappa(\alpha\alpha' + \gamma\gamma') = \varkappa \cos(r, r').$$

Die erste dieser Gleichungen ergiebt, daß die Geschwindigkeit ω von v, d. h. von der für homogene ebene Wellen geltenden, verschieden und von $\varkappa$ abhängig wird. Ist $\varkappa > 1$, so wird ω imaginär; setzen wir dafür $i\omega'$, so lautet der Ausdruck für T

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r - i\varkappa r'}{i\omega'}\right) = \frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{\varkappa r' + i r}{\omega'}\right),$$

es ist also jetzt die Bewegung in ihrer Natur geändert, die Welle schreitet parallel $-r'$ mit der Geschwindigkeit $\omega'/\varkappa$ fort und ist parallel mit r geschwächt. Hieraus folgt, daß im leeren Raum für eine längs r fortschreitende Welle $\varkappa < 1$ sein muß.

Die zweite Gleichung (22'') zeigt, daß im leeren Raum entweder $\varkappa = 0$ oder $\cos(r, r') = 0$ sein muß, daß also, wenn die ebene Welle inhomogen ist, die Ebenen konstanter Amplitude senkrecht stehen müssen zu denjenigen konstanter Phase.

Legt man speziell die Wellennormale in die Z-Axe, so wird $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ und wegen $\cos(r, r') = 0$ auch $\alpha' = 1$, $\gamma' = 0$, somit wegen $\mathfrak{F}\mathfrak{a} + \mathfrak{H}\mathfrak{c} = 0$

22''') $$\mathfrak{F} : \mathfrak{H} = 1 : -i\varkappa;$$

die aus u und w resultierende Schwingung ist somit elliptisch, die Ellipsenaxen fallen in die Koordinatenaxen X und Z, und ihr Verhältnis ist $\varkappa : 1$. Verschwindet die Inhomogenität der Welle, also $\varkappa$, so verschwindet die Komponente w, und die Bewegung wird wieder transversal. —

Faßt man die Hauptgleichungen (18) mit den Faktoren $\partial u / \partial t = u'$, $\partial v / \partial t = v'$, $\partial w / \partial t = w'$ zusammen, multipliziert das Resultat mit dem Volumenelement dk und integriert über den ganzen leeren Raum unter der Annahme, daß er Schwingungen nur im Endlichen enthält,

so ergiebt sich nach einer teilweisen Integration, bei welcher das abgesonderte Oberflächenintegral verschwindet,

$$\frac{d}{dt}\int \tfrac{1}{2}\Big[(u'^2 + v'^2 + w'^2) + v^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\Big]\,dk = 0\,; \qquad 23)$$

das erhaltene Integral ist also von der Zeit unabhängig, und wir werden es daher, bis auf einen noch unbestimmten, aber von der Zeit unabhängigen Faktor, als den Ausdruck für die ganze Energie E der im leeren Raum vorhandenen Schwingung auffassen dürfen. Da der Vektor p, und somit d, durch alles Bisherige nur bis auf einen konstanten Faktor definiert ist, so dürfen wir jenen Faktor ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich einer reinen Zahl, und zwar gleich Eins setzen.

Die Dimensionen des Vektors p und seiner Komponenten sind hierdurch bestimmt zu

$$[p] = m^{1/2}\, l^{-1/2}\, t^{-1}\,, \qquad 23')$$

und ihre Einheiten folgen demgemäß aus denen für die Energie.

Beiläufig werde bemerkt, daß es sehr schwierig ist, die Energie einer Lichtbewegung in absolutem Maße zu bestimmen. Auch wenn die Natur uns wirklich absolut schwarze Körper in aller Strenge darböte, welche, wie S. 521 gesagt, auffallende Lichtschwingungen weder zurückwerfen, noch durchlassen, sondern alle verschlucken und in Wärme umsetzen, so würde ihre direkte Anwendung nicht zum Ziele führen. Denn wenngleich die in bestimmter Zeit in ihnen entwickelte Wärme das Maß für die eingedrungene Energie liefert, so bestimmt sie doch nicht die Energie nur der optisch wirksamen, sondern eben der ganzen fortgepflanzten Schwingungen, und eine ungeänderte Aussonderung der ersteren scheint nicht möglich zu sein.

Für rein optische Zwecke ist aber eine solche Bestimmung der Energie in absolutem Maße nicht erforderlich. Hier kommt man aus mit der Festsetzung einer technischen Einheit für die Lichtstärke einer Quelle, und als solche hat man diejenige gewählt, welche ein Quadratcentimeter der Oberfläche einer Platinmasse im Moment des Schmelzens in normaler Richtung ausstrahlt. —

Setzen wir abgekürzt

$$v^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 2\varphi,\quad u'^2 + v'^2 + w'^2 = 2\psi,\quad \varphi + \psi = \varepsilon\,, \qquad 23'')$$

so hat φ den Charakter einer potentiellen, ψ denjenigen einer kinetischen mechanischen Energie der Volumeneinheit, und ε wird mit der Energiedichte identisch. Die Formel (23) lautet dann

$$\frac{d}{dt}\int(\varphi + \psi)\,dk = \frac{d}{dt}\int \varepsilon\, dk = 0\,, \qquad 23''')$$

oder bei Einführung der gesamten Energien

$$23'''')\quad \begin{cases} \int \varphi\, d k = \Phi, \quad \int \psi\, d k = \Psi, \quad \int \varepsilon\, d k = E \\ \text{auch} \quad \dfrac{d}{d t}(\Phi + \Psi) = \dfrac{d E}{d t} = 0. \end{cases}$$

Für den Fall einer ebenen Welle mit konstanter Amplitude gilt

$$24)\quad \xi = \frac{1}{v}(v'\gamma - w'\beta), \quad \eta = \frac{1}{v}(w'\alpha - u'\gamma), \quad \zeta = \frac{1}{v}(u'\beta - v'\alpha),$$

und somit, wie leicht nachweisbar, da $u'\alpha + v'\beta + w'\gamma = 0$ ist,

$$\varphi = \psi.$$

Hier ist also die Dichte der potentiellen gleich derjenigen der kinetischen Energie, beide sind periodische Funktionen der Zeit, aber ihr Mittelwert für die Dauer einer Periode ist konstant.

Nachdem wir S. 524 und 529 die Intensität I einer Welle einfarbigen Lichtes mit deren mittlerer Energiedichte gleich gesetzt haben, ergiebt sich für dieselbe jetzt, wo die Amplituden von u, v, w mit F, G, H bezeichnet sind,

$$24')\quad \begin{cases} I = \displaystyle\int_0^\tau (u'^2 + v'^2 + w'^2)\frac{d t}{\tau} \\ \quad = \dfrac{2\pi^2}{\tau^2}(F^2 + G^2 + H^2) = \dfrac{2\pi^2 D^2}{\tau^2}; \end{cases}$$

sie unterscheidet sich also nur durch den Faktor $2\pi^2/\tau^2$ von der früher benutzten Intensitätsgröße D^2, und die für letztere erhaltenen Resultate lassen sich sonach ohne weiteres auf I übertragen. —

Mit Hilfe des gefundenen Ausdruckes für die Energie können wir nun auch die schon früher gestreifte Frage erörtern, in wie weit es zulässig ist, für die Berechnung der Intensität einzelne Bestandteile eines Gemisches von verschiedenen Farben für sich allein zu behandeln und auch die optisch nicht wirksamen Schwingungen bei der Theorie der Lichterscheinungen zu vernachlässigen.

Für ein Gemisch von Schwingungen verschiedener Perioden ist zu setzen

$$u = \sum F_h \sin\left[\frac{2\pi}{\tau_h}\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - a_h\right],$$

. . . .

oder, wenn alle Perioden vertreten sind,

$$u = \int_0^\infty F \sin\left[\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{\omega}\right) - a\right] d\tau,$$

. . . .

wobei F und a Funktionen von τ bezeichnen. Wir knüpfen an den ersten Ausdruck an, aus dem durch Grenzübergang der zweite zu gewinnen ist. Aus ihm folgt als charakteristisch für die Anteile der einzelnen Komponenten an der gesamten Intensität

$$\int_0^T u'^2 \frac{dt}{T} = \int_0^T \left(\sum \frac{F_h 2\pi}{\tau_h} \cos\left[\frac{2\pi}{\tau_h}\left(t - \frac{z}{\omega}\right) - a_h\right]\right)^2 \frac{dt}{T},$$

. . . .

wobei T jetzt die kleinste Zeit bedeutet, die von dem Auge noch gesondert empfunden werden kann. Da T als unendlich groß gegen die Perioden τ der von Lichtquellen in merklicher Intensität ausgehenden Schwingungen betrachtet werden darf, so geben alle Produkte verschiedener Kosinus unter der Summe nur verschwindende Anteile zu dem Resultat, und wir erhalten schließlich

$$\int_0^T u'^2 \frac{dt}{T} = \sum \frac{2\pi^2 F_h^2}{\tau_h^2}, \quad \int_0^T v'^2 \frac{dt}{T} = \sum \frac{2\pi^2 G_h^2}{\tau_h^2}, \quad \int_0^T w'^2 \frac{dt}{T} = \sum \frac{2\pi^2 H_h^2}{\tau_h^2}, \qquad 24'')$$

also

$$I = 2\pi^2 \sum \frac{1}{\tau_h^2}(F_h^2 + G_h^2 + H_h^2) = 2\pi^2 \sum \left(\frac{D_h}{\tau_h}\right)^2. \qquad 24''')$$

Die resultierende Intensität ist also gleich der Summe der Intensitäten der verschiedenfarbigen Bestandteile. Aus diesem Resultat folgt aber die Berechtigung, bei Berechnung der resultierenden Intensitäten die homogenen Bestandteile gesondert zu behandeln und von den optisch nicht wirksamen überhaupt abzusehen.

§ 7. Das HAMILTON'sche Prinzip für Lichtschwingungen im leeren Raum und seine Verallgemeinerung für beliebige durchsichtige und absorbierende Medien. Allgemeine Form der Hauptgleichungen und der Grenzbedingungen. Die verschiedenen Typen der optischen Energie.

Faßt man die Hauptgleichungen (18) mit den Faktoren δu, δv, δw zusammen, welche willkürliche, aber stetige Funktionen der Koordinaten bezeichnen, die im Unendlichen zu jeder Zeit, und zur Zeit $t = t_1$ und $t = t_2$ überall verschwinden, multipliziert das Resultat mit $dk\,dt$ und integriert über den ganzen Raum und über die Zeit von t_1 bis t_2, so erhält man zunächst

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \ldots - v^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)\delta u - \ldots\right] dk = 0,$$

und nach Ausführung einer teilweisen Integration der ersten drei Glieder nach der Zeit, der letzten je nach einer Koordinate, wobei die abgesonderten Terme verschwinden,

$$-\int_{t_1}^{t_2} d\,t \int \left[\frac{\partial\, u}{\partial\, t}\,\frac{\partial\,\delta u}{\partial\, t} + \ldots - v^2\,\xi\left(\frac{\partial\,\delta\, w}{\partial\, y} - \frac{\partial\,\delta\, v}{\partial\, z}\right) - \ldots\right] d\,k = 0.$$

Dies läßt sich aber unter Benutzung der Identitäten

$$\frac{\partial\,\delta\, u}{\partial\, t} = \delta\,\frac{\partial\, u}{\partial\, t} = \delta\, u', \quad \frac{\partial\,\delta\, w}{\partial\, y} = \delta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, y} \quad \text{u. s. f.}$$

und Benutzung der Bezeichnungen (23'') u. f. sogleich überführen in

$$25)\qquad \int_{t_1}^{t_2} d\,t \int \delta(\varphi - \psi)\, d\,k = \int_{t_1}^{t_2} \delta(\Phi - \Psi)\, d\,t = 0\,.$$

Diese Gleichung stellt das HAMILTON'sche Prinzip für den Fall der im leeren Raum fortgepflanzten Lichtschwingungen dar; sie ersetzt, wie Bd. I, S. 79 in einem ähnlichen Falle gezeigt ist, die Hauptgleichungen vollständig und bietet vor ihnen den Vorteil kürzerer Fassung.

Wir benutzen sie als Ausgangspunkt für die weiteren Entwickelungen und werden die Grundformeln für die Fortpflanzung von Schwingungen in anderen Medien, als dem leeren Raum, aus ihr dadurch entwickeln, daß wir den Ausdruck für $(\varphi - \psi)$, der sich oben in speziellster Form darstellt, angemessen verallgemeinern.

Diese Erweiterungen sind bis zu einem gewissen Grade willkürlich; sie sind von vornherein beschränkt allein durch die Bedingung, daß, um die Superposition verschiedener fortgepflanzter Bewegungen zu gestatten, oder, was auf dasselbe führt, um Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu liefern, die von den Amplituden der Schwingungen unabhängig sind, die aus dem HAMILTON'schen Prinzip (25) folgenden Differentialgleichungen homogen linear sein müssen. Hieraus ergiebt sich nämlich, daß die Funktionen φ und ψ in den u, v, w und in ihren Differentialquotienten homogen vom zweiten Grade sein müssen.

Eine zweite Beschränkung fügen wir der ersten notwendigen willkürlich zu, indem wir festsetzen, daß die erweiterte Funktion $(\varphi - \psi)$ nur die Argumente u, v, w, ξ, η, ζ und ihre Differentialquotienten nach der Zeit enthalten soll. Es ist damit ein gewisses System von Vorgängen verwandten Charakters begrenzt, der sich in der Form der Differentialgleichungen, wie wir sehen werden, dadurch ausspricht, daß dieselben in Bezug auf die Koordinaten nicht von

höherer, als zweiter Ordnung sind. Hiermit hängt zusammen, daß die getroffene Verfügung in jeder Richtung die Fortpflanzung von höchstens zwei Wellen zuläßt; daß die Beobachtung gleichfalls keine größere Zahl ergiebt, wird man als einen Beweisgrund für die Berechtigung der gemachten Einschränkung ansehen dürfen. —

Wegen des Zusammenhanges der HAMILTON'schen Gleichung in der Gestalt (25) mit der Gleichung der Erhaltung der Energie (23'''') ergiebt sich von vornherein, daß alle in der skizzierten Weise vorgenommenen Erweiterungen der ersteren Formel die Gesetze von Vorgängen liefern müssen, bei denen die Energie des Schwingungsvorganges konstant bleibt; sie führen also allein auf die Theorien verschiedenartiger durchsichtiger Medien.

Für absorbierende Medien wird an Stelle der Gleichung (23'''') treten müssen

$$\frac{dE}{dt} = A',$$

wobei A' als eine bei den Schwingungen von äußeren Ursachen geleistete Arbeit zu betrachten ist und, wenn man annimmt, daß absorbierende Körper unter allen Umständen die Schwingungsenergie verkleinern, eine stets negative Größe sein muß.

Statt der vorstehenden Formel können wir auch schreiben

$$\int\left(\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial t} - \alpha'\right) dk = 0, \qquad 25')$$

wobei α' die an der Volumeneinheit geleistete Arbeit bezeichnet und unter allen Umständen $\int \alpha' dk < 0$ ergeben muß.

Wegen der Verbindung, in welcher hier α' mit dem Glied $-\partial\varphi/\partial t$ steht, das die Arbeit innerer Kräfte repräsentiert, kann man sogleich das HAMILTON'sche Prinzip auch für absorbierende Medien, wie folgt, bilden:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left(\delta(\varphi-\psi) - \delta'\alpha\right) dk = 0. \qquad 25'')$$

Hierin muß $\delta'\alpha$ erstens die Eigenschaft haben, bilineär zu sein in den Differentialquotienten von u, v, w und in deren Variationen, zweitens muß es bei Vertauschung der Variationen mit Differentialquotienten nach der Zeit eine resultierende Arbeit A' liefern, die jederzeit kleiner, als Null ist. Zu diesen notwendigen Einschränkungen können wir nach dem oben Gesagten die weitere fügen, daß die Argumente von α' ausschließlich durch $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ und ihre Differentialquotienten nach der Zeit gebildet werden. —

Über die Verwendung der erweiterten Hamilton'schen Gleichung zur Ableitung der Differentialgleichungen für Lichtschwingungen läßt sich ganz allgemein folgendes sagen.

Die Ausführung der Variation $\delta(\varphi - \psi)$ und die Berechnung von $\delta' a$ liefert zunächst eine Summe von Gliedern, die multipliziert sind in Variationen irgend welcher Differentialquotienten von $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ nach der Zeit. Wir wollen kurz schreiben

$$26)\qquad \begin{cases} \delta(\varphi - \psi) - \delta' a = \Sigma(U_n\,\delta u^{(n)} + V_n\,\delta v^{(n)} + W_n\,\delta w^{(n)} \\ \qquad\qquad + \Xi_n\,\delta \xi^{(n)} + H_n\,\delta \eta^{(n)} + Z_n\,\delta \zeta^{(n)}), \end{cases}$$

worin die U, V, W, Ξ, H, Z lineäre Funktionen der u, v, w und ihrer Differentialquotienten bezeichnen, und $\partial^n u/\partial t^n = u^{(n)}, \ldots$ gesetzt ist.

Diese Summe ist in das Hamilton'sche Integral (25″) einzutragen und durch teilweise Integrationen so umzuformen, daß nur noch $\delta u, \delta v, \delta w$ als Faktoren auftreten; wenn einerseits im Unendlichen zu jeder Zeit, andererseits zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 überall die Variationen verschwinden, so resultiert auf diese Weise

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int dk\, \Sigma(-1)^n \left[\left(\frac{\partial^n U_n}{\partial t^n} - \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial H_n}{\partial z} - \frac{\partial Z_n}{\partial y}\right)\right) \delta u \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial^n V_n}{\partial t^n} - \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial Z_n}{\partial x} - \frac{\partial \Xi_n}{\partial z}\right)\right) \delta v$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^n W_n}{\partial t^n} - \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial \Xi_n}{\partial y} - \frac{\partial H_n}{\partial x}\right)\right) \delta w \right] = 0,$$

und dies führt wegen der Willkürlichkeit der $\delta u, \delta v, \delta w$ auf die Hauptgleichungen

$$\Sigma(-1)^n \left(\frac{\partial^n U_n}{\partial t^n} - \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{\partial H_n}{\partial z} - \frac{\partial Z_n}{\partial y}\right)\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder, anders geschrieben, auf

$$26') \quad \Sigma(-1)^n \frac{\partial^n U_n}{\partial t^n} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n H_n}{\partial t^n}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n Z_n}{\partial t^n}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da diese Formeln, was besonders betont werden möge, ebensowohl für homogene, wie für stetig veränderliche Körper gültig sind, so kann man aus ihnen nun auch die Bedingungen für den Übergang einer Schwingung über eine anscheinende Unstetigkeitsfläche des physikalischen Verhaltens ableiten, wenn man die Vorstellung faßt, daß in jener Fläche wirklich ein, wenngleich sehr

schneller, aber doch stetiger Übergang stattfindet, und annimmt, daß sowohl die Komponenten $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$, als die Funktionen $U_n, V_n, W_n, \Xi_n, H_n, Z_n$ endlich bleiben, und die Hauptgleichungen (26'), wie auch die Bedingungen (18')

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ihre Gültigkeit behalten.

Legt man nämlich die XY-Ebene in das betrachtete Element der Grenzfläche und setzt voraus, daß — wie sich weiter bestätigen wird — die U_n, V_n, W_n nur Differentialquotienten von u, v, w nach der Zeit enthalten, so ergiebt sich in der schon S. 421 benutzten Weise für die Grenze zwischen zwei Teilen (h) und (i) gültig

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \\ \left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n \Xi_n}{\partial t^n}\right)_h = \left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n \Xi_n}{\partial t^n}\right)_i, \\ \left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n H_n}{\partial t^n}\right)_h = \left(\Sigma(-1)^n \frac{\partial^n H_n}{\partial t^n}\right)_i. \end{aligned}\right\} \qquad 26'')$$

Aus dieser Ableitung der Grenzbedingungen geht hervor, daß in der Grenzfläche selbst Schwingungsenergie nicht verloren geht; das ist, wenn die Hauptgleichungen sich auf einen durchsichtigen Körper beziehen, von vornherein klar, es gilt aber auch bei absorbierenden Körpern, weil die an einem Volumenelement dk von äußeren Kräften geleistete Arbeit mit dk proportional gesetzt ist, also beim Übergang zu einer unendlich dünnen Grenzschicht für ein endliches Stück derselben doch nur eine unendlich kleine Resultierende ergiebt.

Unser Ausgangspunkt schließt also flächenhafte Wirkungen des Lichtes, etwa Wärmeentwickelungen nach Art der S. 323 u. f. behandelten Peltier-Wärme, von vornherein aus. Dies stimmt mit der Erfahrung überein, insofern Effekte jener Art in der That noch nicht beobachtet sind. —

Untersuchen wir nun die Erweiterungen, welche innerhalb der gezogenen Grenzen an dem Ausdruck für $\varphi - \psi$ in der Gleichung (25) anzubringen sind, so können dieselben beliebig als Ergänzungen von φ oder als solche von ψ aufgefaßt werden. Wir werden, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, übersichtlichere Resultate erhalten, wenn wir sie jederzeit der Funktion φ zurechnen; denn diese nimmt, wie früher betont, die Stelle einer potentiellen Energie ein, und ihr zugefügte Glieder repräsentieren somit Kräfte neuer Art, die

bei den Schwingungen in Wirkung treten. ψ hingegen besitzt den Charakter einer kinetischen Energie und würde denselben durch eine Erweiterung verlieren.

Behalten wir sonach für ψ den früheren Ausdruck

$$2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2$$

bei, so wird ein streng in sich geschlossenes System von allgemeineren Werten von φ in folgender Weise erhalten.

Erstens sei φ gegeben durch eine Summe von bilineären Funktionen φ_{ab} von der Gestalt

$$27)\quad \left\{\begin{aligned} 2\varphi_{ab} = \xi^{(a)}(l_{11}\xi^{(b)} + l_{12}\eta^{(b)} + l_{13}\zeta^{(b)}) + \eta^{(a)}(l_{21}\xi^{(b)} + l_{22}\eta^{(b)} + l_{23}\zeta^{(b)}) \\ + \zeta^{(a)}(l_{31}\xi^{(b)} + l_{32}\eta^{(b)} + l_{33}\zeta^{(b)}). \end{aligned}\right.$$

Dieser Ansatz enthält dann als höchst speziellen Fall den Ausdruck (23″), von dem wir ausgingen.

Zweitens können wir eine Summe von Gliedern φ_{cd} bilden, gegeben durch

$$27')\quad \left\{\begin{aligned} 2\varphi_{cd} = u^{(c)}(m_{11}\xi^{(d)} + m_{12}\eta^{(d)} + m_{13}\zeta^{(d)}) \\ + v^{(c)}(m_{21}\xi^{(d)} + m_{22}\eta^{(d)} + m_{23}\zeta^{(d)}) \\ + w^{(c)}(m_{31}\xi^{(d)} + m_{32}\eta^{(d)} + m_{33}\zeta^{(d)}). \end{aligned}\right.$$

Drittens können wir auch eine Summe von Gliedern φ_{ef} einführen, für welche gilt

$$27'')\quad \left\{\begin{aligned} 2\varphi_{ef} = u^{(e)}(n_{11}u^{(f)} + n_{12}v^{(f)} + n_{13}w^{(f)}) \\ + v^{(e)}(n_{21}u^{(f)} + n_{22}v^{(f)} + n_{23}w^{(f)}) \\ + w^{(e)}(n_{31}u^{(f)} + n_{32}v^{(f)} + n_{33}w^{(f)}). \end{aligned}\right.$$

Der letzte Ansatz, obwohl analytisch den beiden ersten nahe verwandt, ist physikalisch sehr wesentlich von ihnen verschieden; denn er stellt einen Anteil an der Energie dar, der auch bei im ganzen Raum gleichzeitig und gleichmäßig stattfindenden Schwingungen, deren Wellenlänge also unendlich ist, von Null verschieden bleibt, während die beiden ersten Anteile unter diesen Umständen verschwinden, weil dann gleiches von ξ, η, ζ gilt. Wegen dieser abweichenden Natur werden wir von der Anwendung dieses dritten Ansatzes absehen. Wir bemerken beiläufig, daß auf dem hier eingenommenen Standpunkt seine Berücksichtigung auch zu gewissen Widersprüchen zwischen der Erfahrung und den Folgerungen aus der Theorie führen würde. Auf den wesentlichsten von ihnen soll unten kurz eingegangen werden.

Hiernach kommt die dritte Wertreihe für φ überhaupt für uns nicht mehr in Betracht.

Um die den übrigen entsprechenden Gleichungen abzuleiten, wollen wir bemerken, daß, weil φ unter dem Zeitintegral steht, an dessen Grenzen alle Variationen $\delta u^{(n)}, \ldots \delta \xi^{(n)}, \ldots$ verschwinden, die Glieder von der Gestalt φ_{ab} jederzeit durch teilweise Integrationen unter dem Variationszeichen auf eine der beiden Formen

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_\alpha = {} & a_{11}^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} + a_{22}^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} + a_{33}^{(\alpha)} \zeta^{(\alpha)} \zeta^{(\alpha)} \\ & + 2a_{23}^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} \zeta^{(\alpha)} + 2a_{31}^{(\alpha)} \zeta^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} + 2a_{12}^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)}, \end{aligned}\right\} \qquad 28)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi_\beta = {} & \xi^{(\beta)} (b_{11}^{(\beta)} \xi^{(\beta+1)} + b_{12}^{(\beta)} \eta^{(\beta+1)} + b_{13}^{(\beta)} \zeta^{(\beta+1)}) \\ & + \eta^{(\beta)} (b_{21}^{(\beta)} \xi^{(\beta+1)} + b_{22}^{(\beta)} \eta^{(\beta+1)} + b_{23}^{(\beta)} \zeta^{(\beta+1)}) \\ & + \zeta^{(\beta)} (b_{31}^{(\beta)} \xi^{(\beta+1)} + b_{32}^{(\beta)} \eta^{(\beta+1)} + b_{33}^{(\beta)} \zeta^{(\beta+1)}) \end{aligned}\right\} \qquad 28')$$

reduziert werden können und sonach in zwei Typen von verschiedenem Charakter zerfallen. Der erste Typus stellt sich als die direkte Verallgemeinerung des Ausgangswertes (23″) dar.

Das Zeitintegral über die Variationen $\delta\varphi_\alpha$ läßt sich durch abermalige Integrationen auf die Gestalt bringen

$$\left.\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta\varphi_\alpha dt = (-1)^\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \, (& a_{11}^{(\alpha)} \xi^{(2\alpha)} \delta\xi + a_{22}^{(\alpha)} \eta^{(2\alpha)} \delta\eta + \ldots \\ & + a_{12}^{(\alpha)} (\xi^{(2\alpha)} \delta\eta + \eta^{(2\alpha)} \delta\xi)), \end{aligned}\right\} \qquad 29)$$

und wenn man periodische Schwingungen voraussetzt, also benutzt, daß

$$\xi^{(2\alpha)} = (-1)^\alpha \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\alpha} \xi, \ldots$$

ist, auch auf die andere

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\varphi_\alpha dt = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\alpha} \int_{t_1}^{t_2} dt \, (a_{11}^{(\alpha)} \xi\delta\xi + a_{22}^{(\alpha)} \eta\delta\eta + \ldots + a_{12}^{(\alpha)} (\xi\delta\eta + \eta\delta\xi)).$$

Der allgemeine Fall ist nun der, daß Glieder von der Form φ_α mit verschiedenem α nebeneinander auftreten; hier erhält man dann, wenn man abgekürzt

$$\Sigma \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\alpha} a_{hk}^{(\alpha)} = a_{hk} \qquad 29')$$

setzt, sehr einfach

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\Sigma\varphi_\alpha) dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(a_{11} \xi\delta\xi + a_{22} \eta\delta\eta + \ldots + a_{12} (\xi\delta\eta + \eta\delta\xi)\right). \qquad 29'')$$

Das Resultat ist also dasselbe, als wenn an Stelle der Funktion $\Sigma\varphi_\alpha$ ein einziges Glied φ_α gestanden hätte, gegeben durch

$$2\varphi_\alpha = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + \ldots + 2a_{12}\xi\eta, \qquad 29''')$$

wobei die a_{hk}, statt wie früher Konstanten, nunmehr Funktionen der Periode τ — und somit der Farbe des Lichtes — darstellen.

Ähnlich behandelt, führt das Glied φ_β zunächst auf

30)
$$\left\{\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta\varphi_\beta = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Big[&(b_{23}^{(\beta)} - b_{32}^{(\beta)})(\zeta^{(\beta+1)}\delta\eta^{(\beta)} - \eta^{(\beta+1)}\delta\zeta^{(\beta)})\\ &+ (b_{31}^{(\beta)} - b_{13}^{(\beta)})(\xi^{(\beta+1)}\delta\zeta^{(\beta)} - \zeta^{(\beta+1)}\delta\xi^{(\beta)})\\ &+ (b_{12}^{(\beta)} - b_{21}^{(\beta)})(\eta^{(\beta+1)}\delta\xi^{(\beta)} - \xi^{(\beta+1)}\delta\eta^{(\beta)})\Big]\,dt;\end{aligned}\right.$$

dies zeigt, daß $b_{11}^{(\beta)}$, $b_{22}^{(\beta)}$, $b_{33}^{(\beta)}$ aus dem Integral verschwinden, während die übrigen $b_{hk}^{(\beta)}$ nur in den Verbindungen $b_{hk}^{(\beta)} - b_{kh}^{(\beta)}$ vorkommen. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$b_{hh}^{(\beta)} = 0,\quad b_{23}^{(\beta)} - b_{32}^{(\beta)} = 2b_1^{(\beta)},\quad b_{31}^{(\beta)} - b_{13}^{(\beta)} = 2b_2^{(\beta)},\quad b_{12}^{(\beta)} - b_{21}^{(\beta)} = 2b_3^{(\beta)}$$

setzen und erhält, weiter umformend,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta\varphi_\beta\,dt = (-1)^\beta\int_{t_1}^{t_2}dt\Big(&b_1^{(\beta)}(\zeta^{(2\beta+1)}\delta\eta - \eta^{(2\beta+1)}\delta\zeta)\\ &+ b_2^{(\beta)}(\xi^{(2\beta+1)}\delta\zeta - \zeta^{(2\beta+1)}\delta\xi)\\ &+ b_3^{(\beta)}(\eta^{(2\beta+1)}\delta\xi - \xi^{(2\beta+1)}\delta\eta)\Big).\end{aligned}$$

Für den Fall periodischer Bewegungen verwandelt sich dies in

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta\varphi_\beta\,dt = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\beta}\int_{t_1}^{t_2}dt\Big(&b_1^{(\beta)}(\zeta'\delta\eta - \eta'\delta\zeta) + b_2^{(\beta)}(\xi'\delta\zeta - \zeta'\delta\xi)\\ &+ b_3^{(\beta)}(\eta'\delta\xi - \xi'\delta\eta)\Big),\end{aligned}$$

und die Summe über Glieder mit verschiedenen β liefert, wenn man wieder

30′) $$\Sigma\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\beta} b_h^{(\beta)} = b_h$$

setzt,

30″)
$$\left\{\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta(\Sigma\varphi_\beta)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}dt\Big(&b_1(\zeta'\delta\eta - \eta'\delta\zeta) + b_2(\xi'\delta\zeta - \zeta'\delta\xi)\\ &+ b_3(\eta'\delta\xi - \xi'\delta\eta)\Big).\end{aligned}\right.$$

Dies Resultat ist das gleiche, als wenn an Stelle der Funktion $\Sigma\varphi_\beta$ ein einziger Ausdruck φ_b gestanden hätte, gegeben durch

30‴) $$2\varphi_b = b_1(\zeta'\eta - \eta'\zeta) + b_2(\xi'\zeta - \zeta'\xi) + b_3(\eta'\xi - \xi'\eta),$$

wobei die b_h, statt wie früher Konstanten, nunmehr Funktionen von τ, und somit von der Farbe des fortgepflanzten Lichtes, darstellen. —

Die durch (29‴) und (30‴) definierten beiden Hilfsfunktionen φ_a und φ_b, welche den Inhalt der komplizierten allgemeinen Ansätze (28) und (28′) kurz zusammenfassen, haben einen auffallend verschiedenartigen Charakter.

φ_a ist eine quadratische Form der Vektorkomponenten ξ, η, ζ und läßt sich als solche für die verschiedenen Krystallgruppen nach Schema II′ in Bd. I, S. 138 mit Leichtigkeit spezialisieren; sie verschwindet für keine von ihnen, auch nicht für isotrope Körper, und kann als Darstellung einer in allen vorkommenden und auf den Eigenschaften dieser Medien beruhenden potentiellen Energie aufgefaßt werden. In der That liefert φ_a, in der früher erörterten Weise behandelt, die Differentialgleichungen für die Lichtbewegung in gewöhnlichen durchsichtigen Krystallen, wie dies in den nächsten Paragraphen gezeigt werden soll.

φ_b hingegen ist bilineär in den sechs Vektorkomponenten ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', enthält sie aber nur in drei Aggregaten, die sich ebenso, wie die ξ, η, ζ selbst verhalten, und die daher als Komponenten eines neuen Vektors δ anzusehen sind. Auch die drei Parameter b_h lassen sich als Komponenten eines Vektors b betrachten, und unter Rücksicht hierauf gewinnt φ_b die Bedeutung

$$2\varphi_b = b\,\delta \cos(b, \delta). \tag{30''''}$$

Fragt man nach den Körpern, in welchen nach den Symmetrieverhältnissen eine derartige potentielle Energie sich entwickeln kann, so ist zu bemerken, daß die bilineäre Form (30‴) mit dem Bd. I, S. 137, als zweiten bezeichneten Typus skalarer Funktionen übereinstimmt, und zwar mit der speziellen Form, die S. 138 als zweiter Spezialfall behandelt ist. Demgemäß ergiebt das Schema II″ sogleich diejenigen Krystallgruppen, für welche die Konstanten b_h von Null verschieden sein können, wie auch die den einzelnen bei Benutzung eines speziellen Koordinatensystems entsprechenden Werte.

Die Anzahl der Gruppen, für die φ_b eine Bedeutung hat, ist, wie man bemerkt, schon nach der Theorie eine sehr geringe; ihre eigentümlichen Symmetrieverhältnisse lassen sich leicht charakterisieren, wenn man bedenkt, daß, weil das Gesetz für φ_b selbst ein Symmetriezentrum besitzt, für die darauf beruhenden Vorgänge die Symmetrieelemente maßgebend sind, die in der Tabelle Bd. I, S. 134 und 135 aufgeführt sind.

Eine andere Auffassung giebt der Ausdruck (30⁗) für φ_b an die Hand. Das Medium erscheint hier charakterisiert durch einen Vektor b, der nach S. 418 ein axialer sein muß, — dessen entgegen-

gesetzte Richtungen also gleichwertig sind, während die positive und die negative Rotationsrichtung um ihn verschiedenwertig erscheinen, — da der Vektor δ nach seiner Definition axial ist, und φ einen Skalar repräsentiert; dieser Charakter eines axialen Vektors muß also auch den Symmetrieelementen derjenigen Krystallgruppen innewohnen, für welche die b_h von Null verschieden sind.

Es ist sehr auffällig und bisher noch nicht verständlich, daß an den Krystallgruppen, welche die verlangte Symmetrie von Natur besitzen, diejenigen Erscheinungen, die aus der Energie φ_b folgen müßten, noch nie beobachtet sind, daß aber, wenn man irgend einem Körper künstlich diese Symmetrie — oder Unsymmetrie — bezüglich seines physikalischen Verhaltens mitteilt, eine Wirkung in dem Sinne, wie sie die Theorie verlangt, wenngleich je nach Umständen von verschiedener Stärke, sogleich auftritt.

Eine solche Einwirkung wird nun aber durch eine magnetische Kraft geliefert, denn die Symmetrie des magnetischen Feldes ist nach S. 418 die eines axialen Vektors. In der That wird sich zeigen, daß der Ansatz (30'''), neben (29''') benutzt, zu Differentialgleichungen für die im magnetischen Feld veränderte Lichtbewegung in Krystallen führt, falls man die Richtung des Vektors b in die der lokalen magnetischen Axe legt und seine Größe als eine Funktion des spezifischen magnetischen Momentes betrachtet. —

Auch die durch (27') gegebene Wertreihe für φ_{cd} läßt sich auf zwei verschiedene Typen zurückführen, die wir sondern wollen; sie lauten

31)
$$\left\{\begin{aligned} 2\varphi_\gamma = u^{(\gamma)}\left(c_{11}^{(\gamma)}\xi^{(\gamma)} + c_{12}^{(\gamma)}\eta^{(\gamma)} + c_{13}^{(\gamma)}\zeta^{(\gamma)}\right) \\ + v^{(\gamma)}\left(c_{21}^{(\gamma)}\xi^{(\gamma)} + c_{22}^{(\gamma)}\eta^{(\gamma)} + c_{23}^{(\gamma)}\zeta^{(\gamma)}\right) \\ + w^{(\gamma)}\left(c_{31}^{(\gamma)}\xi^{(\gamma)} + c_{32}^{(\gamma)}\eta^{(\gamma)} + c_{33}^{(\gamma)}\zeta^{(\gamma)}\right), \end{aligned}\right.$$

31')
$$\left\{\begin{aligned} 2\varphi_\delta = u^{(\delta)}\left(d_{11}^{(\delta)}\xi^{(\delta+1)} + d_{12}^{(\delta)}\eta^{(\delta+1)} + d_{13}^{(\delta)}\zeta^{(\delta+1)}\right) \\ + v^{(\delta)}\left(d_{21}^{(\delta)}\xi^{(\delta+1)} + d_{22}^{(\delta)}\eta^{(\delta+1)} + d_{23}^{(\delta)}\zeta^{(\delta+1)}\right) \\ + w^{(\delta)}\left(d_{31}^{(\delta)}\xi^{(\delta+1)} + d_{32}^{(\delta)}\eta^{(\delta+1)} + d_{33}^{(\delta)}\zeta^{(\delta+1)}\right). \end{aligned}\right.$$

Aus dem ersten Ausdruck gewinnt man leicht

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\varphi_\gamma\,dt = \tfrac{1}{2}(-1)^\gamma\int_{t_1}^{t_2}dt\Big[\left(\xi^{(2\gamma)}c_{11}^{(\gamma)} + \eta^{(2\gamma)}c_{12}^{(\gamma)} + \zeta^{(2\gamma)}c_{13}^{(\gamma)}\right)\delta u + \cdots \\ + \left(u^{(2\gamma)}c_{11}^{(\gamma)} + v^{(2\gamma)}c_{21}^{(\gamma)} + w^{(2\gamma)}c_{31}^{(\gamma)}\right)\delta\xi + \cdots\Big],$$

und somit bei periodischen Bewegungen

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\gamma}\int_{t_1}^{t_2} dt\Big[\big(\xi c_{11}^{(\gamma)} + \eta c_{12}^{(\gamma)} + \zeta c_{13}^{(\gamma)}\big)\,\delta u + \dots$$
$$+ \big(u c_{11}^{(\gamma)} + v c_{21}^{(\gamma)} + w c_{31}^{(\gamma)}\big)\,\delta\xi + \dots\Big].$$

Enthält φ Glieder von verschiedenen γ, und setzt man

$$\Sigma\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\gamma} c_{hk}^{(\gamma)} = c_{hk}, \tag{32}$$

so ergiebt sich schließlich

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta(\Sigma\varphi_\gamma)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\Big[&(\xi c_{11} + \eta c_{12} + \zeta c_{13})\,\delta u + \dots\\ &+ (u c_{11} + v c_{21} + w\, c_{31})\,\delta\xi + \dots\Big].\end{aligned}\right\} \tag{32'}$$

Dem entspricht genau, aus (31′) folgend, bei Benutzung der Abkürzung

$$\Sigma\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\delta} d_{hk}^{(\delta)} = d_{hk} \tag{32''}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta(\Sigma\varphi_\delta)\,dt = \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt\Big[&(\xi' d_{11} + \eta' d_{12} + \zeta' d_{13})\,\delta u + \dots\\ &- (u' d_{11} + v' d_{21} + w' d_{31})\,\delta\xi - \dots\Big].\end{aligned}\right\} \tag{32'''}$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch weiter umgestalten, da sie in dem HAMILTON'schen Prinzip unter einem Raumintegral auftreten, an dessen Grenzen alle Variationen verschwinden; man kann nämlich die in $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ multiplizierten Glieder durch eine teilweise Integration so umformen, daß als Faktoren nur δu, δv, δw vorkommen.

Dann erhält im ersten Integral δu den Faktor

$$\left.\begin{aligned}U_\gamma = \tfrac{1}{2}(\xi c_{11} + \eta c_{12} + \zeta c_{13})&\\ + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u c_{13} + v c_{23} + w c_{33}) - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(u c_{12} + v c_{22} + w c_{32})&\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

im zweiten aber

$$\left.\begin{aligned}U_\delta = \tfrac{1}{2}(\xi' d_{11} + \eta' d_{12} + \zeta' d_{13})&\\ - \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u' d_{13} + v' d_{23} + w' d_{33}) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(u' d_{12} + v' d_{22} + w' d_{32}).&\end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

Diese Ausdrücke sind sehr kompliziert, und wenn sie auch bei Anwendung auf einzelne Krystallgruppen, nach deren Symmetrie spezialisiert, sich erheblich vereinfachen und für viele zu Null werden, so liefern sie doch, neben den aus φ_a folgenden Gliedern in die Hauptgleichungen eingesetzt, Resultate, die in dieser Allgemeinheit nicht in der Natur vorzukommen scheinen. Es ist daher rationell, von vornherein eine Vereinfachung vorzunehmen, für die

man eine Direktive darin finden kann, daß die Variationen der $\Sigma\varphi_a$ und $\Sigma\varphi_\beta$ sich auf die Form $\Xi\delta\xi + H\delta\eta + Z\delta\zeta$ bringen ließen, während dies bei den $\Sigma\varphi_\gamma$ und $\Sigma\varphi_\delta$ im allgemeinen nicht möglich ist. Diesem Unterschied kann man nach dem S. 568 Gesagten auch eine physikalische Bedeutung beilegen.

Sucht man die Bedingungen dafür, daß die Ausdrücke (32′) und (32″) unter dem Raumintegral der HAMILTON'schen Gleichung durch teilweise Integration der in δu, δv, δw multiplizierten Glieder auf die gewünschte Form zu reduzieren sind, so findet man

$$33'')\qquad \left\{\begin{array}{l} c_{11}^{(\gamma)} = c_{22}^{(\gamma)} = c_{33}^{(\gamma)} = c^{(\gamma)},\ c_{23}^{(\gamma)} = c_{31}^{(\gamma)} = c_{12}^{(\gamma)} = 0, \\ d_{11}^{(\delta)} = d_{22}^{(\delta)} = d_{33}^{(\delta)} = d^{(\delta)},\ d_{23}^{(\delta)} = d_{31}^{(\delta)} = d_{12}^{(\delta)} = 0, \end{array}\right.$$

worin $c^{(\gamma)}$ und $d^{(\delta)}$ neue Bezeichnungen sind.

Hierdurch reduzieren sich die Ansätze (31) und (31′) auf

$$33''')\qquad \left\{\begin{array}{l} 2\varphi_\gamma = (u^{(\gamma)}\xi^{(\gamma)} + v^{(\gamma)}\eta^{(\gamma)} + w^{(\gamma)}\zeta^{(\gamma)})\,c^{(\gamma)}, \\ 2\varphi_\delta = (u^{(\delta)}\xi^{(\delta+1)} + v^{(\delta)}\eta^{(\delta+1)} + w^{(\delta)}\zeta^{(\delta+1)})\,d^{(\delta)}, \end{array}\right.$$

welche von dem Koordinatensystem unabhängig sind, und daher eine Gleichwertigkeit aller Richtungen aussprechen. Zugleich ergiebt sich, daß in dem HAMILTON'schen Integral die Variation $\delta(\Sigma\varphi_\gamma)$ ersetzt werden kann durch

$$33'''')\qquad \delta\varphi_c = c(u\,\delta\xi + v\,\delta\eta + w\,\delta\zeta),$$

wobei c aus den $c^{(\gamma)}$ gemäß der Definition (32) hervorgeht; dagegen verschwindet die Variation $\delta(\Sigma\varphi_\delta)$, und somit das ganze Integral (32‴), und die Funktionen φ_δ verlieren bei der eingeführten Spezialisierung jeden Einfluß auf die stattfindenden Schwingungen.

Wir werden sehen, daß der Ansatz (33⁗), neben $\delta\varphi_a$ benutzt, die Gesetze für spezielle Erscheinungen liefert, welche denjenigen nahe verwandt sind, die nach S. 572 bei allen Körpern im magnetischen Felde auftreten, und welche von gewissen Körpern, den natürlich-aktiven, ohne eine äußere Einwirkung gezeigt werden.

Welche Krystallgruppen nach ihrer Symmetrie derartige Phänomene zeigen können, ergiebt die Discussion der Funktionen φ_γ oder aber der Variation $\delta\varphi_c$; man erkennt leicht, daß weder ein Symmetriecentrum, noch eine Symmetrieebene, noch eine Spiegelaxe mit jenen Ausdrücken vereinbar ist, und hierdurch sind die einzig möglichen Gruppen in einfacher Weise bestimmt. Isotrope Körper im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind ausgeschlossen; wenn also anscheinend isotrope Medien Aktivität zeigen, so müssen sie in Wahrheit eine Anhäufung von anisotropen Teilchen mit allen möglichen Orientierungen darstellen. —

Wir gehen nun dazu über, für $\delta'\alpha$ die den gemachten Voraussetzungen nach möglichen Werte ähnlich abzuleiten, wie im Vorstehenden die für φ oder $\delta\varphi$ anzunehmenden. Es sind zulässig bilineäre Funktionen der Differentialquotienten der Argumente $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ nach der Zeit und ihrer Variationen, die bei Vertauschung der letzteren mit Differentialquotienten nach der Zeit für das Integral $\int \alpha' d k$ stets negative Werte ergeben.

Als allgemeine Glieder von $\delta'\alpha$ schreiben wir zunächst

$$-\delta'\alpha_\mu = \left(m_{11}^{(\mu)}\xi^{(\mu)} + m_{12}^{(\mu)}\eta^{(\mu)} + m_{13}^{(\mu)}\zeta^{(\mu)}\right)\delta\xi^{(\mu_1)} + \dots \qquad 34)$$

$$-\delta'\alpha_\nu = \left(n_{11}^{(\nu)}u^{(\nu)} + n_{12}^{(\nu)}v^{(\nu)} + n_{13}^{(\nu)}w^{(\nu)}\right)\delta u^{(\nu_1)} + \dots \qquad 34')$$

$$-\delta'\alpha_\pi = \left(p_{11}^{(\pi)}u^{(\pi)} + p_{12}^{(\pi)}v^{(\pi)} + p_{13}^{(\pi)}w^{(\pi)}\right)\delta\xi^{(\pi_1)} + \dots \qquad 34'')$$

$$-\delta'\alpha_\sigma = \left(q_{11}^{(\sigma)}\xi^{(\sigma)} + q_{12}^{(\sigma)}\eta^{(\sigma)} + q_{13}^{(\sigma)}\zeta^{(\sigma)}\right)\delta u^{(\sigma_1)} + \dots \qquad 34''')$$

Von diesen kommen die letzten beiden Ausdrücke nicht in Betracht, da sie bei keiner Verfügung über die Konstanten stets negative Werte des Integrales $\int \alpha' dk$ liefern. Von den ersten beiden geben nur solche das verlangte Resultat, für welche $\mu_1 = \mu - 1$, $\nu_1 = \nu - 1$ ist, falls gleichzeitig die Konstanten m und n gewissen Ungleichungen genügen; dabei kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Beziehungen

$$m_{hk}^{(\mu)} = m_{kh}^{(\mu)}, \quad n_{hk}^{(\nu)} = n_{kh}^{(\nu)}$$

einführen, da Glieder vom Typus $m_{hk}^{(\mu)} = -m_{kh}^{(\mu)}$ nach (30) energieerhaltenden Kräften entsprechen und schon oben berücksichtigt sind.

Der Ansatz (34') hat mit (27'') das gemein, daß er bei im ganzen Raume gleichem Verhalten des Lichtvektors p, also bei unendlich langen Wellen, nicht verschwindet, und da wir wegen dieses Verhaltens (27'') von der Benutzung ausgeschlossen haben, so ist es konsequent, dasselbe mit (34') zu thun, sich also auf (34) zu beschränken.

Beseitigen wir, wie oben wiederholt geschehen, durch teilweise Integrationen die Variationen von Differentialquotienten nach der Zeit, setzen wir periodische Bewegungen voraus und benutzen die Abkürzung

$$\Sigma\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{2\mu-2} m_{hk}^{(\mu)} = m_{hk}, \qquad 35)$$

so ergiebt sich $-\Sigma\delta'\alpha_\mu$ gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned}-\delta'\alpha = (m_{11}\xi' + m_{12}\eta' + m_{13}\eta')\delta\xi + (m_{21}\xi' + m_{22}\eta' + m_{23}\zeta')\delta\eta \\ + (m_{31}\xi' + m_{32}\eta' + m_{33}\zeta')\delta\zeta,\end{aligned}\right\} \qquad 35')$$

wobei

$$m_{hk} = m_{kh}. \text{ —} \qquad 35'')$$

Die vorstehenden Entwickelungen haben dazu geführt, die allgemeinen Resultate von S. 566 erheblich zu spezialisieren. Da wir für ψ_1 immer die gleiche Form $2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2$ führen, so wird

36) $$\delta\psi = u'\delta u' + v'\delta v' + w'\delta w',$$

und da sich nach (29‴), (30‴), (33‴), (35′) für $\delta\varphi - \delta'\alpha$ stets ein in $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ lineärer Ausdruck ergiebt, den wir schreiben wollen

36′) $$\delta\varphi - \delta'\alpha = \Xi\delta\xi + H\delta\eta + Z\delta\zeta,$$

so sind in dem allgemeinen Schema (26) alle U_n, V_n, W_n gleich Null, nur

36″) $$U_1 = -u', \quad V_1 = -v', \quad W_1 = -w',$$

und es verschwinden alle Ξ_n, H_n, Z_n bis auf

36‴) $$\Xi_0 = +\Xi, \quad H_0 = +H, \quad Z_0 = +Z.$$

Hieraus folgt, daß die allgemeinen Hauptgleichungen (26′) sich für periodische Bewegungen reduzieren auf

37) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial \Xi}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \Xi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x},$$

womit die Definitionen

37′) $$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

zu verbinden sind. Die Grenzbedingungen (26″) lauten

37″) $$\overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \quad \overline{\Xi}_h = \overline{\Xi}_i, \quad \overline{H}_h = \overline{H}_i;$$

ihnen ordnen sich als Folgen des gleichzeitigen Bestehens mit den letzten Gleichungen (37) und (37′) zu die Beziehungen

37‴) $$\overline{\zeta}_h = \overline{\zeta}_i, \quad \overline{w}_h = \overline{w}_i,$$

die mitunter vorteilhaft an Stelle von zwei Formeln des Systemes (37″) gesetzt werden können.

Die Vergleichung der Formeln (37) mit (18) läßt die Analogie zwischen beiden Systemen hervortreten. Auch bei Zugrundelegung der allgemeinen Hauptgleichungen ergiebt sich

37⁗) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

es schwingt also in homogenen ebenen Wellen sowohl der Polarisationsvektor p, als der Hilfsvektor d transversal. Es möge erwähnt werden, daß die Einführung der oben ausgeschlossenen Ansätze (27″) und (34′), sowie der allgemeinen Formen von (31) und (31′) Gleichungen liefert, die mit dieser Bedingung nicht vereinbar sind. Man kann hieraus ein weiteres Argument für ihre Ausschließung entnehmen.

II. Kapitel.

Fortpflanzung ebener Wellen in durchsichtigen Medien.

§ 8. Die optische Energie, die Hauptgleichungen und die Grenzbedingungen für durchsichtige inaktive Krystalle. Isotrope Körper. Die Geschwindigkeit ebener homogener Wellen in Krystallen als Funktion der Polarisationsrichtung. Optische Axen.

Für die Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in durchsichtigen inaktiven Krystallen bilden nach S. 560 u. f. die Grundlage die Ansätze für die beiden Teile ψ und $\varphi = \varphi_a$ der optischen Energiedichte:

$$\left.\begin{aligned} 2\psi &= u'^2 + v'^2 + w'^2, \\ 2\varphi &= a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta. \end{aligned}\right\} \quad 38)$$

Die erste Funktion hat die Symmetrie einer Kugel, die zweite diejenige eines dreiaxigen Ellipsoides, und eine gleiche eignet offenbar dem optischen Verhalten des Mediums für jede einzelne Farbe; wir charakterisieren dasselbe spezieller durch die Oberfläche von der Gleichung

$$(x^2+y^2+z^2)^j = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \quad 38')$$

die für $j = 0$ das Polarisationsellipsoid, für $j = 2$ das Polarisationsovaloid des Krystalles genannt wird. Da nach (29′) die Koeffizienten a_{hk} Funktionen der Farbe sind, so haben die Axen dieser Flächen, welche wir die optischen Symmetrieaxen oder die Polarisationsaxen des Krystalles nennen wollen, im allgemeinen für jede Farbe verschiedene Größe und Lage. Die Verhältnisse vereinfachen sich für Krystallgruppen, welche gewisse Symmetrien zeigen, und das Schema II′ auf S. 138 in Bd. I, nach welchem die Funktion φ zu spezialisieren ist, ergiebt, da die $\mathfrak{a}_{hk}$ dort genau an derselben Stelle stehen, wie die a_{hk} hier, ohne weiteres folgende einfache Resultate.

Bei allen Krystallen des triklinen Systemes ist die Lage und die Größe der optischen Symmetrieaxen von vornherein nicht bestimmt; einzig darf ausgesagt werden, daß beide sich stetig mit der Farbe ändern.

Bei sämtlichen Krystallen des monoklinen Systemes fällt für alle Farben die eine optische Symmetrieaxe in die Bd. I, S. 131 als krystallographisch ausgezeichnet eingeführte Z-Axe; die beiden andern haben mit der Farbe stetig wechselnde Positionen in der XY-Ebene. Die relativen Größen der drei Axen sind unbestimmt.

Bei den Krystallen des rhombischen Systemes geben die krystallographischen Hauptaxen für alle Farben die Richtungen der optischen Symmetrieaxen an, über deren Größe aber von vornherein nichts bestimmt ist.

Bei den Krystallen des rhomboëdrischen, des quadratischen und des hexagonalen Systemes degenerieren die dreiaxigen Polarisationsflächen für alle Farben zu Rotationsflächen, deren Rotationsaxe in die krystallographisch ausgezeichnete Z-Axe fällt.

Bei den Krystallen des regulären Systemes degenerieren die Polarisationsflächen für alle Farben zu Kugeln; diese Körper verhalten sich sonach optisch isotrop. —

Wählt man das einer Farbe entsprechende optische Symmetrieaxensystem zum Koordinatensystem X_0, Y_0, Z_0, so nimmt die Gleichung der Polarisationsfläche eine vereinfachte Gestalt an, die wir schreiben

$$38'') \qquad (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^j = a_1 x_0^2 + a_2 y_0^2 + a_3 z_0^2 .$$

Die allgemeinen Konstanten a_{hk} sind lineäre Funktionen der Hauptkonstanten a_1, a_2, a_3, und zwar gilt, wenn man die Lage des willkürlichen Systemes X, Y, Z gegen das Hauptaxensystem X_0, Y_0, Z_0 durch folgendes Schema festsetzt

38''')

	X	Y	Z
X_0	α_1	α_2	α_3
Y_0	β_1	β_2	β_3
Z_0	γ_1	γ_2	γ_3,

die folgende Reihe von Beziehungen

$$38'''') \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = a_1 \alpha_1^2 + a_2 \beta_1^2 + a_3 \gamma_1^2 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{23} = a_1 \alpha_2 \alpha_3 + a_2 \beta_2 \beta_3 + a_3 \gamma_2 \gamma_3 , \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

Die Hauptgleichungen für die Lichtschwingungen ergeben sich aus (3) unter Benutzung des Schemas (36') folgendermaßen[13])

$$39) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u'' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right), \quad v'' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right), \\ \qquad w'' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right), \end{array} \right.$$

während nach (37') und (37'''') bestehen bleibt:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad 39')$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \qquad 39'')$$

Wir bemerken, daß die Gleichungen (39), (39') mit den aus rein mechanischen Betrachtungen in Bd. I, S. 481 erhaltenen, bei Anwendung der letzteren auf nicht absorbierende Körper, vollständig gleichwertig sind.

Sie lassen sich auch zur formalen Übereinstimmung mit den auf Dielektrica mit verschwindender Magnetisirbarkeit angewandten elektromagnetischen Grundgleichungen (248) und (248') des vorigen Teiles bringen. Setzt man nämlich, wie Seite 555,

$$\frac{u'}{v} = a, \quad \frac{v'}{v} = b, \quad \frac{w'}{v} = c,$$

außerdem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = v^2 \xi', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = v^2 \eta', \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = v^2 \zeta',$$

wobei dann ξ', η', ζ' sich als lineäre Funktionen von ξ, η, ζ darstellen, so erhält man

$$a' = v\left(\frac{\partial \eta'}{\partial z} - \frac{\partial \zeta'}{\partial y}\right), \ldots$$

$$\xi' = v\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right), \ldots$$

und diese Gleichungen haben genau die Gestalt von (248) und (248'); a, b, c stehen an Stelle der Komponenten der hier mit der bez. Polarisation identischen magnetischen Kraft, ξ', η', ζ' repräsentieren die Komponenten der elektrischen Kraft, ξ, η, ζ diejenigen der elektrischen Polarisation. Indessen sind die elektromagnetischen Grundgleichungen spezieller, als die vorstehenden optischen, und im Widerspruch mit der Erfahrung, insofern sie nur Parameter enthalten, welche von der Periode τ unabhängig sind; diesen Unterschied zu beseitigen, muß man sie hypothetisch zu der obigen Gestalt verallgemeinern, wie dies schon auf S. 472 angekündigt ist. —

Die Grenzbedingungen für ein der XY-Ebene paralleles Element der Oberfläche (o_{hi}) zwischen zwei Medien (h) und (i) von der vorausgesetzten Natur lauten nach (37'')

$$\overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \quad \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \xi}\right)_h = \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \xi}\right)_i, \quad \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \eta}\right)_h = \left(\frac{\overline{\partial \varphi}}{\partial \eta}\right)_i; \qquad 39''')$$

ihnen ordnen sich, als davon nicht unabhängig, die Formeln zu

$$\overline{\zeta}_h = \overline{\zeta}_i, \quad \overline{w}_h = \overline{w}_i. \qquad 39'''')$$

Die erste von ihnen vermag bei der Anwendung eine der beiden ersten und die zweite eine der beiden letzten Gleichungen (39‴) zu ersetzen. —

Wir beginnen mit dem Falle eines homogenen isotropen Körpers, der charakterisiert wird durch die Beziehungen

$$40)\qquad a_1 = a_2 = a_3 = a,$$

in denen a eine neue Bezeichnung ist; hier wird somit nach (38‴)

$$40')\qquad a_{11} = a_{22} = a_{33} = a, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,$$

und unsere Hauptgleichungen (39) nehmen die Gestalt an

$$40'')\qquad u'' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right),\; v'' = a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right),\; w'' = a\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right),$$

die mit den für den leeren Raum geltenden Gleichungen (18) formal übereinstimmen. Die einzige Abweichung ist die, daß an Stelle der universellen Konstanten v^2 hier eine dem Medium individuelle Funktion von der Periode τ der Schwingungen und somit von der Farbe des fortgepflanzten Lichtes steht.

Hieraus folgt, daß in isotropen Medien zwar ebenso, wie im leeren Raum, alle in ebenen homogenen Wellen stattfindenden Schwingungen gleicher Periode sich mit der gleichen Geschwindigkeit $\omega = \sqrt{a}$ und unverändert fortpflanzen, daß dagegen die Bestandteile eines Gemisches von Schwingungen mit verschiedener Periode sich bei der Fortpflanzung räumlich sondern. Hierin liegt die fundamentale Verschiedenheit zwischen dem optischen Verhalten isotroper ponderabler Körper und des leeren Raumes. —

Nunmehr wenden wir uns der Untersuchung homogener krystallinischer Körper zu.

Handelt es sich nur um das Problem der Fortpflanzung homogener ebener Wellen in einem unbegrenzten Medium, bei welchem somit kein Koordinatensystem vor anderen durch Nebenbedingungen empfohlen wird, so kann man bei Wahl eines solchen die Ausgangsgleichungen (39) auf eine doppelte Weise vereinfachen. Beide Behandlungsarten bieten Vorteile und sollen daher befolgt werden, die eine hier, die andere im folgenden Paragraphen.

Die erste vereinfachende Verfügung geht dahin, eine Koordinatenaxe, etwa die Z-Axe, in die Richtung der Wellennormalen zu legen; dadurch reduziert sich das System (39) auf

$$41)\qquad u'' = a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\quad v'' = a_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\; w'' = 0.$$

Da nach (38⁗) die Konstanten a_{hk} Funktionen der Orientierung des Koordinatensystemes sind, und da über die Lage der X- und der Y-Axe

in der Wellenebene noch nicht verfügt ist, so kann man durch eine geeignete Wahl dieser Richtungen die Konstante a_{12} zum Verschwinden bringen und dadurch erhalten, indem man zugleich durch Einklammern der a_{hk} die Einführung jenes speziellen Koordinatensystemes andeutet,

$$u'' = (a_{22}) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad v'' = (a_{11}) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \qquad 41')$$

Die Komponenten u und v des Polarisationsvektors nach den durch die Bedingung

$$(a_{12}) = a_1 \alpha_1 \alpha_2 + a_2 \beta_1 \beta_2 + a_3 \gamma_1 \gamma_2 = 0 \qquad 41'')$$

definierten Koordinatenrichtungen X und Y sind sonach in homogenen ebenen Wellen von einander vollständig unabhängig; sie pflanzen sich fort mit Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2, welche gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= (a_{22}) = a_1 \alpha_2^2 + a_2 \beta_2^2 + a_3 \gamma_2^2, \\ \omega_2^2 &= (a_{11}) = a_1 \alpha_1^2 + a_2 \beta_1^2 + a_3 \gamma_1^2 \end{aligned} \right\} \qquad 41''')$$

und von der Schwingungsperiode τ abhängen, da gleiches von den a_h gilt. ω_1 und ω_2 sind im allgemeinen auch bei gleichem τ von einander verschieden; die Komponenten u und v einer beliebigen in einer Ebene erregten, einfarbigen Schwingung sondern sich somit beim Fortschreiten der Wellen räumlich und pflanzen sich als zwei selbständige Polarisationsvektoren p_1 und p_2 in zwei normal zu einander lineär polarisierten Wellen fort. Nach den in (41''') gegebenen Werten von (a_{22}) und (a_{11}) hängt dabei ω_1^2 nur von der Richtung des Polarisationsvektors p_2 oder v, ω_1^2 nur von der Richtung von p_1 oder u gegen die optischen Symmetrieaxen ab.

Diese Resultate stehen im nächsten Zusammenhang mit den Entwickelungen von S. 541 u. f.; um die vollständige Verbindung herzustellen, ist es aber noch nöthig, den Vorgang des Durchtrittes einer Welle durch die Begrenzung des Krystalles nach dem Luftraum hin zu erörtern, worauf wir weiter unten eingehen werden.

Da bei den gemachten Voraussetzungen die Komponenten des Hilfsvektors d nach den Koordinatenaxen

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = +\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = 0$$

sind, so folgt aus (41') auch

$$\xi'' = (a_{11}) \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}, \quad \eta'' = (a_{22}) \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}; \qquad 41'''')$$

die Komponenten von d pflanzen sich somit gleichfalls unabhängig von einander als zwei selbständige und zu einander normale Vek-

toren d_1 und d_2 fort, und ihre Geschwindigkeiten ω_ξ und ω_η sind resp. gleich ω_1 und ω_2. Hier hängt dann auch ω_ξ nur von der Richtung von d_1 oder ξ, ω_η nur von derjenigen von d_2 oder η gegen die Symmetrieaxen ab.

Die Geschwindigkeiten ω im Anschluß an die Formeln (41‴) durch die Richtung der Wellennormalen, also durch α_3, β_3, γ_3 auszudrücken, ist im allgemeinen sehr umständlich, läßt sich aber im Falle, daß die Wellennormale in einer optischen Symmetrieebene liegt, leicht bewerkstelligen. —

Um aus den vorstehenden Resultaten weitere Folgerungen zu ziehen, machen wir die Substitution

$$
42) \quad \left\{ \begin{aligned}
\alpha_1 &= - \cos\delta\cos\varphi\cos\chi - \sin\delta\sin\chi\,,\\
\beta_1 &= - \cos\delta\cos\varphi\sin\chi + \sin\delta\cos\chi\,,\\
\gamma_1 &= + \cos\delta\sin\varphi\,,\\
\alpha_2 &= - \sin\delta\cos\varphi\cos\chi + \cos\delta\sin\chi\,,\\
\beta_2 &= - \sin\delta\cos\varphi\sin\chi - \cos\delta\cos\chi\,,\\
\gamma_2 &= + \sin\delta\sin\varphi\\
\alpha_3 &= \sin\varphi\cos\chi\,,\ \beta_3 = \sin\varphi\sin\chi,\ \gamma_3 = \cos\varphi\,.
\end{aligned} \right.
$$

Dann ist φ der Winkel zwischen der Wellennormalen r oder Z und der optischen Symmetrieaxe Z_0, χ derjenigen zwischen den Ebenen Z_0X_0 und Z_0Z, δ der zwischen den Ebenen ZX und ZZ_0, beide in positivem Sinne von der ersten zur zweiten Ebene gerechnet; φ und χ bestimmen also die Richtung der Wellennormalen, δ und $\delta + \frac{1}{2}\pi$ die Richtungen der X- und der Y-Axe, d. h. der Vektoren p_1 und p_2.

Formen wir die Bedingung (41″) unter Benutzung der Beziehung

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

um in

$$42') \qquad \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\gamma_1\gamma_2}$$

und setzen die Werthe (42) ein, so erhalten wir

$$
42'') \left\{ \begin{aligned}
\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} &= \frac{(\cos\delta\cos\varphi\cos\chi + \sin\delta\sin\chi)(\sin\delta\cos\varphi\cos\chi - \cos\delta\sin\chi)}{\cos\delta\sin\delta\sin^2\varphi}\\
&= \frac{(\cos^2\varphi\cos^2\chi - \sin^2\chi) - 2\cos\varphi\cos\chi\sin\chi\operatorname{cotg}2\delta}{\sin^2\varphi}\,;
\end{aligned} \right.
$$

hierdurch ist für jedes φ und χ, d. h. für jede Richtung der Wellennormalen r, das zugehörige δ, sind also die zugehörigen Schwingungsrichtungen bestimmt.

Ausgenommen sind nur gewisse Richtungen von r, für welche

der Faktor von $\operatorname{cotg} 2\delta$ verschwindet. Derselbe wird auf drei Weisen gleich Null, da er mit $\cos\varphi$, mit $\cos\chi$ und mit $\sin\chi$ verschwindet.

Um die Bedeutung dieser Fälle zu übersehen, nehmen wir zwischen den Hauptkonstanten a_1, a_2, a_3 die Ungleichung

$$a_1 \gtreqless a_2 \gtreqless a_3 \tag{42'''}$$

an, die durch Verfügung über das Koordinatensystem $X_0 Y_0 Z_0$ stets erfüllt werden kann, wenn nicht aus krystallographischen Gründen bereits eine Festsetzung über dasselbe getroffen ist. Gilt die Bedingung (42'''), so ist der Ausdruck auf der linken Seite von (42'') stets positiv.

Läßt man nun zunächst $\cos\varphi$ unendlich klein werden, so legt man damit die Wellennormale in die $X_0 Y_0$-Ebene. Hier findet sich bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung

$$\sin 2\chi \operatorname{cotg} 2\delta = -\frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} + \sin^2\chi\right),$$

und da die Klammer rechts nie verschwindet, ergiebt sich hieraus beim Grenzübergang $\operatorname{cotg} 2\delta = \infty$, wodurch δ bestimmt ist.

Dieselbe Überlegung gilt für den Fall, daß $\cos\chi = 0$ ist, also die Wellennormale in die $Y_0 Z_0$-Ebene fällt.

Dagegen ergiebt das Unendlichkleinwerden von $\sin\chi$ oder die Lage der Wellennormalen in der $X_0 Z_0$-Ebene

$$2\cos\varphi \operatorname{ctg} 2\delta = -\frac{1}{\sin\chi}\left(\frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} - \operatorname{ctg}^2\varphi\right),$$

und hier kann die Klammer völlig unabhängig von dem Verschwinden von $\sin\chi$ selbst Null sein; für die Richtungen, welche durch

$$\chi = 0 \text{ und } \operatorname{tg}^2\varphi = \operatorname{tg}^2 o = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \tag{43}$$

gegeben sind, und nur für diese, werden also die Polarisationsrichtungen X und Y unbestimmt; in zu ihnen normalen Ebenen ist also eine lineäre Schwingung nach jeder Richtung gleich möglich.

Eine weitere Eigenschaft dieser Richtungen der Wellennormalen erkennen wir, wenn wir die ihnen entsprechenden Werte von ω_1 und ω_2 bestimmen. Aus (43) folgt nämlich

$$\sin^2 o = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad \cos^2 o = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \tag{43'}$$

und bei verschwindendem χ, sowie mit o vertauschtem φ wird

$$\alpha_1 = -\cos\delta\cos o, \quad \beta_1 = +\sin\delta, \quad \gamma_1 = +\cos\delta\sin o,$$
$$\alpha_2 = -\sin\delta\cos o, \quad \beta_2 = -\cos\delta, \quad \gamma_2 = +\sin\delta\sin o;$$

setzt man diese Werte in die Beziehungen (41''') ein, so erhält man

43'') $$\omega_1 = \omega_2 = a_2\,;$$

für die oben bestimmten Richtungen der Wellennormalen sind also die sonst verschiedenen beiden Geschwindigkeiten einander gleich.

Hieraus folgt, daß parallel den durch (43) definierten Richtungen ebene Wellen sich ebenso fortpflanzen, wie in einem isotropen Medium; denn die Schwingungskomponenten einer beliebigen transversalen, homogenen und einfarbigen Welle sondern sich nicht beim Fortschreiten räumlich. Es kann sich demnach in jenen Richtungen jede Art von Licht, so auch natürliches, unverändert fortpflanzen.

Die erhaltenen singulären Richtungen nennt man die optischen Axen des Krystalles; sie liegen nach dem Gesagten jederzeit in der Ebene der kleinsten und der größten Axe der Polarisationsfläche (38'), und ihre Winkel o gegen die Z_0-Axe sind durch die Formel (43) oder (43') bestimmt. Die beschriebenen Eigenschaften der optischen Axen gestatten, wie wir später sehen werden, sie relativ leicht durch die Beobachtung aufzufinden, und hierin liegt ihre praktische Wichtigkeit; außerdem bietet ihre Einführung an Stelle der optischen Symmetrieaxen zur Charakterisierung der Orientierung eines Krystalles gegen die Wellennormale, wie das sich im nächsten Paragraphen zeigen wird, auch große theoretische Vortheile.

Die Anzahl der optischen Axen ist im allgemeinen vier, da aber nach (43) ersichtlich je zwei von ihnen einander paarweise entgegengesetzt liegen, und da auch sonst hier entgegengesetzte Richtungen gleichwertig sind, so betrachtet man nur zwei von ihnen als verschieden und legt den Krystallen somit im allgemeinen zwei optische Axen O' und O'' bei, als deren Richtungen man von den obigen vier die der positiven Z_0-Axe beiderseitig zunächst liegenden wählt.

Wir knüpfen hieran eine Übersicht über das Verhalten der optischen Axen in den verschiedenen Krystallsystemen, das sich leicht bestimmen läßt, wenn man das S. 578 über die Lage der optischen Symmetrieaxen Gesagte mit den letzten Resultaten zusammenfaßt.

In triklinen Krystallen erfüllen die den verschiedenen Farben entsprechenden Axen O' und O'' Stücke zweier Kegelflächen, über deren Gestalt und Orientierung die krystallographischen Verhältnisse nichts bestimmen.

In monoklinen Krystallen können diese Axen auf zwei Kegelflächen liegen, die in Bezug auf die, wie S. 578 definierte, XY-Ebene sich nach Gestalt und Lage spiegelbildlich entsprechen; sie können

auch in der XY-Ebene selbst liegen. Ein spezieller Fall würde der sein, daß bei stetig wechselnder Farbe die Axen sich in stets symmetrischen Lagen beiderseitig der XY-Ebene nähern, für eine bestimmte Farbe dort zusammenfallen und im weiteren Verlauf in der XY-Ebene mehr und mehr, und zwar in unsymmetrischer Weise, divergieren. Ein solcher Krystall würde sich für eine bestimmte Farbe, wie man sagt, optisch einaxig verhalten.

In rhombischen Krystallen fallen die optischen Symmetrieaxen für alle Farben in dieselben, passend zu Koordinatenaxen zu wählenden Richtungen; die optischen Axen O' und O'' müssen also in den Koordinatenebenen, und zwar für jede Farbe symmetrisch zu den Koordinatenaxen liegen. Es liegt die Möglichkeit vor, daß sie z. B. mit stetig wechselnder Farbe in der YZ-Ebene nach der Z-Axe hin konvergieren, für eine bestimmte Farbe mit jener zusammenfallen und bei weiterem Verlauf in der XZ-Ebene divergieren. Auch hier kommt also in einem speziellen Fall optische Einaxigkeit vor.

Für die Krystalle des rhomboëdrischen, des hexagonalen und des quadratischen Systemes ist, wenn, wie früher, die Z-Axe zur ausgezeichneten Axe gewählt wird, $a_1 = a_2$, was bei verschiedenen a_1 und a_3 auf $o = 0$ führt. Hier fallen also für alle Farben die optischen Axen zusammen, und zwar in die Z-Axe.

Die Krystalle der drei erstgenannten Systeme sind also im allgemeinen, abgesehen von dem Verhalten für einzelne Farben, optisch zweiaxig, ihre optischen Axen sind mit Dispersion behaftet, d. h. für verschiedene Farben verschieden gerichtet; die der letzten drei Systeme sind optisch einaxig ohne Axendispersion. —

Wir schließen hieran noch eine Bemerkung über die Intensität einer homogenen ebenen Welle in einem krystallinischen durchsichtigen Medium. Auf S. 529 haben wir als das Maß dieser Intensität ein für alle Male die mittlere Energiedichte an der untersuchten Stelle bezeichnet; wir erhalten somit für die beiden getrennt fortschreitenden Wellen resp.

$$I_1 = \frac{1}{2\tau}\int_0^\tau \left(u'^2 + (a_{22})\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dt, \quad I_2 = \frac{1}{2\tau}\int_0^\tau \left(v'^2 + (a_{11})\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right)dt. \qquad 44)$$

Nun gilt aber

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_1}u', \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_2}v'$$

und $(a_{22}) = \omega_1^2$, $(a_{11}) = \omega_2^2$, und es ist somit hier ebenso, wie bei isotropen

Medien, die potentielle Energie jeder Welle ihrer kinetischen stets gleich; hieraus ergiebt sich

44′) $$I_1 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau u'^2 dt, \quad I_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v'^2 dt,$$

oder, wenn wir die Amplituden von u und v mit A und B bezeichnen,

44″) $$I_1 = \frac{2\pi^2}{\tau^2} A^2, \quad I_2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2} B^2.$$

§ 9. Die Geschwindigkeit ebener homogener Wellen in durchsichtigen inaktiven Krystallen als Funktion der Fortpflanzungsrichtung. Die Richtungen der Schwingungsvektoren.

Während bisher die Z-Axe des Koordinatensystemes in die Wellennormale, die X- und Y-Axe in die Polarisationsrichtungen einer homogenen ebenen Welle gelegt war, wollen wir weiterhin das Koordinatensystem mit dem System der einer bestimmten betrachteten Farbe entsprechenden Symmetrieaxen zusammenfallen lassen, aber der Einfachheit halber die hierfür charakteristischen Indices $_0$ fortlassen.

Dann nimmt nach (38″) die Funktion φ die Form

45) $$2\varphi = a_1 \xi^2 + a_2 \eta^2 + a_3 \zeta^2$$

an, und die Hauptgleichungen (39) und (39′) lauten für einen homogenen Krystall

45′) $$\begin{cases} u'' = a_2 \frac{\partial \eta}{\partial z} - a_3 \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad v'' = a_3 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - a_1 \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad w'' = a_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} - a_2 \frac{\partial \eta}{\partial x}; \\ \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Um diese Gleichungen für ebene homogene Wellen zu lösen, haben wir von den allgemeinen Ansätzen (19) auszugehen und darin wegen der angenommenen Durchsichtigkeit des Mediums $\varkappa = 0$ zu setzen; es wird dann $\mathfrak{T}$ reell gleich

$$T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r}{\omega}\right), \text{ worin } r = \alpha x + \beta y + \gamma z \text{ ist},$$

und da die Formeln (45′) nach dem Einsetzen dieser Werte homogen lineär in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ werden, auch nur reelle Koefficienten enthalten, so ergiebt sich $\mathfrak{F} : \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$ reell; die Schwingungen sind somit lineär, und wir können schreiben

45″) $$\begin{cases} u = fp, \quad v = gp, \quad w = hp \\ p = K \sin T, \end{cases}$$

wobei p den Polarisationsvektor und f, g, h seine Richtungskosinus bezeichnen, die nach der ersten Formel (39″) der Bedingung

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = 0 \qquad 45''')$$

genügen müssen.

Für die Komponenten des Hilfsvektors d folgt hieraus

$$\xi = -\frac{p'}{\omega}(h\beta - g\gamma), \quad \eta = -\frac{p'}{\omega}(f\gamma - h\alpha), \quad \zeta = -\frac{p'}{\omega}(g\alpha - f\beta), \qquad 46)$$

oder wenn man seinen Wert

$$-\frac{p'}{\omega} = d \qquad 46')$$

und seine Richtungskosinus

$$l = h\beta - g\gamma, \quad m = f\gamma - h\alpha, \quad n = g\alpha - f\beta \qquad 46'')$$

einführt, auch

$$\xi = l d, \quad \eta = m d, \quad \zeta = n d. \qquad 46''')$$

Da aus (46″) die Gleichungen

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0, \quad f l + g m + h n = 0 \qquad 46'''')$$

folgen, so bilden die Richtungen r, p, d ein orthogonales System.

Setzen wir die Ausdrücke (45″) und (46‴) in die Gleichungen (45′) ein, so ergeben dieselben

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 f &= a_2 m\gamma - a_3 n\beta, \\ \omega^2 g &= a_3 n\alpha - a_1 l\gamma, \\ \omega^2 h &= a_1 l\beta - a_2 m\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad 47)$$

aus diesen Formeln gewinnen wir, indem wir sie mit den Faktoren $0, -\gamma, \beta$; $\gamma, 0, -\alpha$; $-\beta, \alpha, 0$ zusammenfassen und die obigen Werte von l, m, n berücksichtigen,

$$(a_1 - \omega^2) l = \alpha\,\Omega, \quad (a_2 - \omega^2) m = \beta\,\Omega, \quad (a_3 - \omega^2) n = \gamma\,\Omega, \qquad 47')$$

wobei

$$a_1 \alpha l + a_2 \beta m + a_3 \gamma n = \Omega \qquad 47'')$$

gesetzt ist.

Einen zweiten wichtigen Wert von Ω erhält man aus den Formeln (47′) selbst, indem man die Beziehung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

benutzt; es ergiebt sich hierdurch nämlich

$$\frac{1}{\Omega^2} = \left(\frac{\alpha}{a_1 - \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{a_2 - \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{a_3 - \omega^2}\right)^2, \qquad 47''')$$

also ein Ausdruck, der von l, m, n frei ist. Indem man ihn einführt, erhält man durch die Gleichungen (47′) die Richtung des Vektors d, nämlich die Werte der l, m, n, durch die Richtung

und Größe der Geschwindigkeit ω in bemerkenswerter Weise ausgedrückt.

Faßt man weiter die Gleichungen (47′) mit den Faktoren f, g, h resp. l, m, n zusammen, so ergeben sie

48) $$0 = a_1 lf + a_2 mg + a_3 nh,$$

48′) $$\omega^2 = a_1 l^2 + a_2 m^2 + a_3 n^2;$$

diese Formeln sind mit den Beziehungen $0 = (a_{12})$ und $\omega_1^2 = (a_{22})$, $\omega_2^2 = (a_{11})$ von S. 581 wesentlich gleichwertig, denn l, m, n und f, g, h nehmen jetzt dieselbe Stelle ein, wie früher $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

Benutzt man dagegen das Faktorensystem $\alpha/(a_1 - \omega^2)$, $\beta/(a_2 - \omega^2)$, $\gamma/(a_3 - \omega^2)$, so ergiebt sich die Formel

48″) $$\frac{\alpha^2}{a_1 - \omega^2} + \frac{\beta^2}{a_2 - \omega^2} + \frac{\gamma^2}{a_3 - \omega^2} = 0,$$

welche das von Fresnel herrührende und nach ihm benannte Gesetz für die Abhängigkeit der Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer homogenen ebenen Welle von der Richtung ihrer Normalen ausspricht.[14]) Behandelt man ω als einen Vektor, so stellt die Gleichung eine Oberfläche sechsten Grades dar, die wir nach S. 522 die Normalenfläche oder kurz die Fläche N für den vorausgesetzten Krystall nennen.

Die Gleichung ist quadratisch in Bezug auf ω^2; sie ergiebt also für jede Richtung von r, d. h. für jedes System α, β, γ zwei Werte ω^2, oder zwei Wertpaare $\pm\omega$. Dies zeigt, daß die Fortpflanzung in zwei getrennten Wellen und nach entgegengesetzten Richtungen mit gleichen Geschwindigkeiten geschieht.

Unterscheiden wir die beiden Wurzeln für ω^2 und die ihnen entsprechenden Werte von Ω vorläufig durch die Indices 1 und 2, so ergeben die Formeln (47′) die Richtungskosinus für die den beiden Geschwindigkeiten zugehörigen Hilfsvektoren d wie folgt:

48‴) $$(a_1 - \omega_1^2) l_1 = \Omega_1 \alpha, \quad (a_1 - \omega_2^2) l_2 = \Omega_2 \alpha$$

. . . .

Aus diesen Ausdrücken kann man folgern, daß die beiden Vektoren d_1 und d_2, und somit auch die zu ihnen normalen p_1 und p_2, senkrecht zu einander stehen, daß nämlich gilt

48⁗) $$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2 = 0; \end{cases}$$

indessen brauchen wir diese Behauptung nicht nochmals zu beweisen, da ihre Richtigkeit schon aus dem auf S. 581 Gesagten erhellt.

Die erhaltenen Gesetze gestatten eine eigentümliche geometrische Deutung durch Heranziehung des schon S. 577 erwähnten Polarisationsovaloides, dessen Gleichung wir durch Einführung des Radiusvektors ϱ und seiner Richtungskosinus a, b, c und unter Benutzung des hier überhaupt vorausgesetzten Hauptaxensystemes schreiben

$$\varrho^2 = a_1 a^2 + a_2 b^2 + a_3 c^2.$$

Legt man durch diese Oberfläche einen Centralschnitt parallel der betrachteten Wellenebene, so besitzt das Schnittoval in paarweise entgegengesetzten Richtungen zwei größte und zwei kleinste Radienvektoren, die wir seine Halbaxen nennen wollen. Die Richtungen dieser Halbaxen sind identisch mit den durch (47′) gegebenen der Vektoren d_1 und d_2, ihre Größen sind identisch mit den Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung (48″), welche der gegebenen Wellenebene entsprechen; trägt man also auf der Wellennormalen vom Centrum des Ovaloids aus zwei Strecken von der Länge der beiden Halbaxen auf, so geben deren Enden zwei Punkte der Oberfläche N.[15])

In der That gelten für die Richtungskosinus a, b, c die Bedingungen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

die Aufgabe, für den Ovaloidschnitt Größe und Richtung der Halbaxen zu bestimmen, kommt also hinaus auf die Ableitung der Bedingungen des Maximums oder des Minimums der Funktion

$$\varrho^2 - \Lambda(a^2 + b^2 + c^2 - 1) - 2M(a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

worin Λ und M unbekannte Faktoren bezeichnen. Nach bekannten Regeln erhält man für diese Bedingungen

$$(a_1 - \Lambda)a - M\alpha = 0,$$
$$(a_2 - \Lambda)b - M\beta = 0,$$
$$(a_3 - \Lambda)c - M\gamma = 0;$$

bei Zusammenfassung mit den Faktoren a, b, c liefern sie $\Lambda = \overline{\varrho}^2$, wobei $\overline{\varrho}$ einen der extremen Werte von ϱ bezeichnet; setzt man dies ein und schreibt

$$(a_1 - \overline{\varrho}^2)a = M\alpha, \quad (a_2 - \overline{\varrho}^2)b = M\beta, \quad (a_3 - \overline{\varrho}^2)c = M\gamma,$$

so erkennt man bei Vergleichung des Resultates mit den Formeln (47′) sogleich die Richtigkeit der angegebenen Konstruktion; man erkennt auch, daß jede der Halbaxen des Schnittovales durch ihre Größe die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, durch ihre Lage die Richtung des Vektors d für dieselbe Welle angiebt.

Berücksichtigt man, daß die Polarisationsvektoren p senkrecht zu den bezüglichen d und zur Wellennormale r stehen, und daß nach (48'''') auch die beiden Vektoren d_1 und d_2 normal zu einander sind, so erkennt man weiter, daß die Axen des Ovalschnittes auch die Richtungen von p_1 und p_2 angeben, und daß jede Halbaxe zugleich durch ihre Größe die Geschwindigkeit der einen und durch ihre Richtung die Polarisationsrichtung der andern Welle angiebt. —

Die durch (48'') angegebene Abhängigkeit der Geschwindigkeit ω von der Fortpflanzungsrichtung ist im allgemeinen eine sehr komplizierte; sie vereinfacht sich aber erheblich für die der betreffenden Farbe entsprechenden Symmetrieebenen. Hier sondern sich ohne weiteres die beiden Wurzeln für ω^2, und man erhält

$$49)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{in der } YZ\text{-Ebene } \omega_1^2 = a_1,\ \ \omega_2^2 = a_2\gamma^2 + a_3\beta^2, \\ \text{in der } ZX\text{-Ebene } \omega_1^2 = a_2,\ \ \omega_2^2 = a_3\alpha^2 + a_1\gamma^2, \\ \text{in der } XY\text{-Ebene } \omega_1^2 = a_3,\ \ \omega_2^2 = a_1\beta^2 + a_2\alpha^2. \end{array}\right.$$

Diese Formeln zeigen, daß die Schnittkurven der Oberfläche N mit den Symmetrieebenen je durch einen Kreis und ein Oval gebildet werden, die zusammen nur drei verschiedene Parameter — die Quadrate der dreimal zwei den Symmetrieaxen entsprechenden Geschwindigkeiten — besitzen. Wegen des letzteren Umstandes müssen sich die beiden Teile der Schnittkurve notwendig in einer der Symmetrieebenen schneiden; wenn wir die schon S. 583 eingeführte Ungleichung

$$a_1 \gtreqless a_2 \gtreqless a_3$$

wiederum voraussetzen, so findet dies in der XZ-Ebene statt, und zwar unter Winkeln o gegen die Z-Axe, die durch die Formeln (43') gegeben sind. Wir gelangen so, ausgehend von dem Gesetz für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Fortpflanzungsrichtung, zu den optischen Axen zurück als den Richtungen, für welche die beiden sonst verschiedenen Wurzeln der Gleichung (48'') für ω^2 einander gleich sind. Daß für sie die Polarisationsrichtungen p unbestimmt werden, ergiebt das System (48'''); Gleiches folgt aus der Konstruktion mit Hilfe des Polarisationsovaloides, dessen Schnitte normal zu den optischen Axen Kreisform besitzen. Für die übrigen in den Symmetrieebenen liegenden Richtungen von r liefern beide Wege Polarisationen normal und parallel zu den Symmetrieebenen. —

Die allgemeine Formel (48'') vereinfacht sich ferner für optisch einaxige Krystalle, die wir nach S. 585 aus den zweiaxigen

durch Einführung der Beziehung $a_1 = a_2$ erhalten; ihre linke Seite zerfällt hier in zwei Faktoren, deren gesondertes Verschwinden die beiden Wurzeln für ω^2 bestimmt; die eine von beiden findet sich konstant, verhält sich also wie die Geschwindigkeit in einem isotropen Medium, und die Welle, der sie zugehört, wird daher als die ordinäre (o) von der anderen, extraordinären (e) unterschieden, deren Geschwindigkeit mit der Richtung der Fortpflanzung variiert. Die Gleichungen für beide schreiben wir

$$\omega_o^2 = a_1, \quad \omega_e^2 = a_3(\alpha^2 + \beta^2) + a_1\gamma^2, \tag{49'}$$

oder bei Einführung des Winkels U der Wellennormale gegen die Z-Axe auch

$$\omega_o^2 = a_1, \quad \omega_e^2 = a_3 \sin^2 U + a_1 \cos^2 U; \tag{49''}$$

sie ergeben, daß für optisch einaxige Krystalle die Oberfläche N in eine Kugel und ein Rotationsovaloid zerfällt, die sich in der Rotations- oder Z-Axe berühren. Je nachdem $a_3 \gtreqless a_1$ ist, wird das Ovaloid die Kugel umschließen, oder wird das Umgekehrte stattfinden; im ersten Falle wird der Krystall als negativ, im zweiten als positiv bezeichnet.

Um die Gesetze für die Schwingungsrichtungen zu bilden, greift man hier passend auf die Formeln (47) zurück; denn von den bei zweiaxigen Krystallen sehr brauchbaren (48''') werden hier, wenigstens für die ordinäre Welle, einige dadurch unbequem, daß sie die Form $0 = 0$ annehmen und somit einen Grenzübergang erfordern. Berücksichtigt man die Beziehungen (46''), so erhält man aus der ersten oder der zweiten Formel (47) für die ordinäre Welle

$$n_o = 0,$$

und somit wegen $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ auch

$$l_o = \frac{\pm\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad m_o = \frac{\mp\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{49'''}$$

Da der Vektor p_e mit d_o zusammenfällt, so ist ferner

$$h_e = 0$$

und wegen der letzten Gleichung (47) $l_e\beta = m_e\alpha$; somit folgt leicht

$$l_e = \frac{\pm\alpha\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad m_e = \frac{\pm\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad n_e = \mp\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\;. \tag{49''''}$$

Hieraus folgt, daß der Vektor d_o normal zu der Meridianebene resp. dem sogenannten Hauptschnitt steht, d_e also in demselben liegt. Die Vektoren p_o und p_e verhalten sich umgekehrt, und da man die Richtung von p als die Polarisationsrichtung der lineär polarisierten Welle bezeichnet, so erhält man das Resultat,

daß in einaxigen Krystallen die ordinäre Welle im Hauptschnitt, die extraordinäre normal dazu polarisiert ist. —

Diesen bei einaxigen Krystallen so einfachen Gesetzen lassen sich die komplizierteren für zweiaxige Krystalle nahe konform gestalten, wenn man die Richtungen der Vektoren r, p, d nicht auf die optischen Symmetrieaxen, sondern auf die optischen Axen O' und O'' bezieht.[16])

Hierzu ist es, wie schon S. 584 erwähnt, nützlich, die eine Seite der optischen Axen als die positive hervorzuheben; wir wählen für die Axe $+O'$ die Richtung zwischen der $+X$- und der $+Z$-Axe, setzen also für sie

50) $$\alpha' = +\sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = +\sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}},$$

für die Axe $+O''$ die Richtung zwischen der $+Z$- und der $-X$-Axe, setzen also

50′) $$\alpha'' = -\sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = +\sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}}.$$

Bezeichnen wir dann die Winkel zwischen der Wellennormalen r und den so festgesetzten Richtungen $+O'$ und $+O''$ durch U' und U'', so wird

50″) $$\cos U' = \alpha\alpha' + \gamma\gamma', \quad \cos U'' = \alpha\alpha'' + \gamma\gamma'' = -\alpha\alpha' + \gamma\gamma',$$

also

50‴) $$\begin{cases} \alpha\alpha' = \frac{1}{2}(\cos U' - \cos U'') = \sin\frac{1}{2}(U'' - U')\sin\frac{1}{2}(U'' + U'), \\ \gamma\gamma' = \frac{1}{2}(\cos U' + \cos U'') = \cos\frac{1}{2}(U'' - U')\cos\frac{1}{2}(U'' + U'). \end{cases}$$

Schreibt man die Gleichung (48″) unter Berücksichtigung der Beziehung $\beta^2 = 1 - \alpha^2 - \gamma^2$ in der Form

$$\frac{\alpha^2(a_2 - a_1)}{a_1 - \omega^2} + \frac{\gamma^2(a_2 - a_3)}{a_3 - \omega^2} + 1 = 0$$

und setzt die Werte für α und γ aus (50‴) unter Berücksichtigung der Bedeutung von α' und γ' ein, so erhält man

$$\frac{a_3 - a_1}{a_1 - \omega^2}\sin^2\tfrac{1}{2}(U'' - U')\sin^2\tfrac{1}{2}(U'' + U')$$

$$- \frac{a_3 - a_1}{a_3 - \omega^2}\cos^2\tfrac{1}{2}(U'' - U')\cos^2\tfrac{1}{2}(U'' + U') + 1 = 0;$$

diese Formel läßt sich aber leicht in zwei Faktoren zerlegen, deren Verschwinden die beiden Wurzeln für ω^2 bestimmt. Bezeichnet man die Wurzeln mit ω_o^2 und ω_e^2, so erhält man direkt

51) $$\begin{cases} \omega_o^2 = a_1 - (a_1 - a_3)\sin^2\frac{1}{2}(U'' - U'), \\ \omega_e^2 = a_1 - (a_1 - a_3)\sin^2\frac{1}{2}(U'' + U'); \end{cases}$$

die Welle (o) wird also zur ordinären, wenn der Krystall sich dadurch zum einaxigen umwandelt, daß die beiden Axen O' und O'' mit der Z-Axe zusammenfallen, also $U' = U''$ wird.

Andere Ausdrücke für ω_o^2 und ω_e^2 sind die folgenden

$$\left.\begin{aligned} \omega_o^2 &= a_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}(U'' - U') + a_3 \sin^2 \tfrac{1}{2}(U'' - U') \\ &= \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U'' - U'), \\ \omega_e^2 &= a_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}(U'' + U') + a_3 \sin^2 \tfrac{1}{2}(U'' + U') \\ &= \tfrac{1}{2}(a_1 + a_3) + \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U'' + U'). \end{aligned}\right\} \qquad 51')$$

Der erste von ihnen nimmt für $U' = U''$, d. h., wenn die beiden optischen Axen in die Z-Richtung fallen, die Gestalt des Systemes (49'') an, wodurch der Zusammenhang der Resultate für einaxige und für zweiaxige Krystalle klar gestellt ist.

Übrigens ist zu bemerken, daß bei zweiaxigen Krystallen keineswegs die Welle, die in einer Hauptebene eine konstante Geschwindigkeit besitzt, stets die ordinäre ist. Discutiert man die obigen Ausdrücke für ω_o^2 und ω_e^2, so erkennt man, daß allerdings in der YZ-Ebene, wo $U' = U''$ ist, $\omega_o^2 = a_1$, $\omega_e^2 = a_1 \cos^2 U' + a_3 \sin^2 U'$ wird, daß aber in der XY-Ebene, wo $U' + U'' = \pi$ ist, $\omega_e^2 = a_3$, $\omega_o^2 = a_1 \sin^2 U' + a_3 \cos^2 U'$ gilt, und daß die XZ-Ebene gar in Bereiche verschiedener Natur zerfällt. In dem Winkel zwischen den optischen Axen, welcher die $+Z$-Axe enthält, ist nämlich $U' + U'' = 2o$, also $\omega_e^2 = a_2$, dagegen in dem Winkel, welcher die $+X$-Axe enthält, ist $U'' - U' = 2o$, also $\omega_o^2 = a_2$; gleiches gilt für die diametral gegenüberliegenden Bereiche. —

Um auch die Richtungen der Schwingungsvektoren mit Hilfe der optischen Axen analytisch auszudrücken, schreiben wir unter Benutzung der Beziehung $fl + gm + hn = 0$ die Gleichung (48) in der Form

$$(a_1 - a_2) f l + (a_3 - a_2) h n = 0,$$

oder nach (50) auch

$$\alpha'^2 f l = \gamma'^2 h n. \qquad 52)$$

Führen wir ferner die Winkel v', v'' und w', w'' eines Vektorpaares p, d gegen die optischen Axen O' und O'' ein, so gilt analog zu (50''')

$$\left.\begin{aligned} \alpha' f &= \tfrac{1}{2}(\cos v' - \cos v''), \quad \gamma' h = \tfrac{1}{2}(\cos v' + \cos v''), \\ \alpha' l &= \tfrac{1}{2}(\cos w' - \cos w''), \quad \gamma' n = \tfrac{1}{2}(\cos w' + \cos w''), \end{aligned}\right\} \qquad 52')$$

und die Bedingung (52) wird zu

$$\cos v' \cos w'' + \cos w' \cos v'' = 0. \qquad 52'')$$

Werden endlich die in gleichem Sinne positiv gerechneten Winkel i' und i'' zwischen den Ebenen (r, d) und (r, O') einerseits, (r, O'') andererseits eingeführt, so gilt

$$52''')\quad \begin{cases} \cos v' = \sin U' \cos i', & \cos v'' = \sin U'' \cos i'', \\ \cos w' = \sin U' \cos (i' + \tfrac{1}{2}\pi), & \cos w'' = \sin U'' \cos (i'' + \tfrac{1}{2}\pi) \\ \quad = -\sin U' \sin i', & \quad = -\sin U'' \sin i''. \end{cases}$$

Somit ergiebt die erhaltene Bedingung (52'')

$$\cos i' \sin i'' + \cos i'' \sin i' = 0,$$

d. h.,

$$\sin (i' + i'') = 0,$$

und dies führt, da man durch Wahl der positiven Richtung von p und d stets bewirken kann, daß $i' + i''$ zwischen Null und 2π liegt, auf die beiden Lösungen

$$i' + i'' = 0, \quad i' + i'' = \pi.$$

Bedenken wir, daß bei dem früher benutzten Übergang zu einaxigen Krystallen für die ordinäre Welle $i' = i'' = 0$ wird, so ergiebt sich, daß die erste dieser Formeln der ordinären, die zweite der extraordinären Welle entspricht, daß wir also schreiben können

$$52'''')\qquad i_o' + i_o'' = 0, \quad i_e' + i_e'' = \pi.$$

Dies Resultat enthält den wichtigen Satz, daß, wenn wir den Winkel zwischen den Ebenen (r, O') und (r, O''), welcher die Z-Axe enthält, mit J bezeichnen, die Polarisationsrichtung p_o der ordinären Welle in der Ebene liegt, welche den Winkel J, die p_e der extraordinären Welle in der Ebene liegt, welche den Nebenwinkel von J halbiert.

Man kann dies leicht auf geometrischem Wege verificieren, wenn man nur berücksichtigt, daß der durch die Wellenebene bestimmte Ovaloidschnitt die mit den Polarisationsrichtungen zusammenfallenden Hauptaxen zu Symmetrielinien hat. Wenn man also in der Wellenebene die Richtungen zweier gleicher Durchmesser des Schnittovales angeben kann, so sind die Halbierungslinien der beiden Winkel, die jene einschließen, die gesuchten Hauptaxen.

Solche gleiche Durchmesser werden aber einerseits durch die Geraden geliefert, in denen die Kreisschnitte des Ovaloides die Wellenebene schneiden, andererseits durch die Geraden, in welchen die Ebenen durch die Wellennormale r und die optischen Axen O' und O'' die Wellenebene durchsetzen; denn letztere beiden Geraden stehen ersichtlich normal zu ersteren.

Hiermit ist das oben auf analytischem Wege gefundene Resultat auch geometrisch abgeleitet.

Für spätere Folgerungen bemerken wir uns, daß, wenn die X-Axe des auf S. 581 u. f. benutzten Koordinatensystemes in die Halbierungs-

ebene des Winkels J gelegt wird, die dort erhaltene Geschwindigkeit $\omega_1 = \sqrt{(a_{22})}$ mit ω_o, $\omega_2 = \sqrt{(a_{11})}$ mit ω_e identisch ist. —

Wir wollen schließlich zum Zwecke gewisser Anwendungen auch die Größe Ω, die nach (47‴) bloß von der Richtung von r und der Größe von ω abhängt, durch U' und U'' ausdrücken, gehen dazu aber vorteilhaft von dem Ausdruck (47″) aus, der sich unter Rücksicht auf die Beziehung $\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$ schreiben läßt

$$\Omega = (a_1 - a_2)\alpha l + (a_3 - a_2)\gamma n,$$

oder bei Benutzung von (50) auch

$$\Omega = (a_1 - a_3)(\alpha'^2 \alpha l - \gamma'^2 \gamma n). \tag{53}$$

Nun ist $\alpha'\alpha$ und $\gamma'\gamma$ durch (50‴) gegeben, $\alpha' l$ und $\gamma' n$ durch (52′); dabei sind die Werte (52‴) von $\cos w'$ und $\cos w''$ zu berücksichtigen und für die ordinäre Welle

$$i' = -\tfrac{1}{2}J, \quad i'' = +\tfrac{1}{2}J,$$

für die extraordinäre Welle

$$i' = \tfrac{1}{2}(\pi - J), \quad i'' = \tfrac{1}{2}(\pi + J)$$

zu setzen. Man erhält dann leicht

$$\left.\begin{aligned} \Omega_o &= \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\sin(U'' - U')\sin\tfrac{1}{2}J, \\ \Omega_e &= \tfrac{1}{2}(a_1 - a_3)\sin(U'' + U')\cos\tfrac{1}{2}J. \end{aligned}\right\} \tag{53′}$$

Hierin drückt sich J in bekannter Weise durch die Winkel U', U'' und den Winkel $2o = O$ der optischen Axen aus; es gilt nämlich

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\tfrac{1}{2}J &= \frac{\sin\frac{1}{2}(U'' - U' + O)\sin\frac{1}{2}(U' - U'' + O)}{\sin U' \sin U''}, \\ \cos^2\tfrac{1}{2}J &= \frac{\sin\frac{1}{2}(U' + U'' - O)\sin\frac{1}{2}(U' + U'' + O)}{\sin U' \sin U''}. \end{aligned}\right\} \tag{53″}$$

§ 10. Die Gesetze der Fortpflanzung von Strahlen in durchsichtigen Krystallen. Gegenseitige Lage der Wellennormale, des Strahles und der Schwingungsvektoren. Singuläre Fälle.

Die ebenen Wellen, die wir bisher betrachtet haben, können nach S. 521 u. f. erhalten gedacht werden als Stücke von Wellenflächen um eine punktförmige Lichtquelle, die klein sind gegen die Dimensionen der Wellenflächen. Die normale Entfernung dr zweier solcher paralleler Stücke, welche dem Fortschreiten der Wellenfläche während des Zeitintervalles dt entspricht, bestimmte durch die Beziehung $dr/dt = \omega$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellennormalen. Da die Radienvektoren s der Wellenfläche als die vom

Lichtpunkt ausgehenden Strahlen bezeichnet waren, so wurde durch die Länge des Abschnittes ds, den die beiden betrachteten Stücke auf dem Radiusvektor abgrenzen, ein Verhältnis

$$\frac{ds}{dt} = \sigma$$

bestimmt, das wir als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles s bezeichneten, der zu der Normalen r gehört.

Wir gehen jetzt dazu über, für durchsichtige Krystalle Richtung und Größe der Vektoren σ zu bestimmen, welche einer gegebenen Wellennormale, und somit einem Wertpaar ω zugehören.

Dies gelingt ohne weiteres mit Hilfe der Bemerkung von S. 522, daß die Normalenfläche N die der Strahlen- oder Wellenfläche S zugeordnete Fußpunktsfläche ist. Konstruieren wir nämlich im Endpunkt eines Vektors ω und zweier ihm unendlich benachbarter die normalen Ebenen, so ist hiernach ihr Schnittpunkt ein Punkt der Fläche S, und der Vektor nach demselben hin das zu ω gehörige σ.[17])

Die drei Ebenen seien gegeben durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \omega,$$

$$(\alpha + \delta\alpha)x + \beta y + \left(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\delta\alpha\right)z = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

$$\alpha x + (\beta + \delta\beta)y + \left(\gamma + \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}\delta\beta\right)z = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial\beta}\delta\beta,$$

wobei wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ gilt

54) $$\alpha + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = 0,\quad \beta + \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = 0;$$

wir können daher die definierenden Formeln auch schreiben, indem wir zugleich durch den Index s andeuten, daß die Koordinaten sich auf einen Punkt des Strahles s, genauer auf den Endpunkt des Vektors σ beziehen,

54') $$\alpha x_s + \beta y_s + \gamma z_s = \omega,$$

$$x_s - \frac{\alpha}{\gamma}z_s = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha},\quad y_s - \frac{\beta}{\gamma}z_s = \frac{\partial\omega}{\partial\beta}.$$

Für $\partial\omega/\partial\alpha$ und $\partial\omega/\partial\beta$ folgt aus (48'') unter Rücksicht auf (47''') und (54)

54'') $$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{1}{a_1 - \omega^2} - \dfrac{1}{a_3 - \omega^2}\right) + \dfrac{\omega}{\Omega^2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0, \\ \beta\left(\dfrac{1}{a_2 - \omega^2} - \dfrac{1}{a_3 - \omega^2}\right) + \dfrac{\omega}{\Omega^2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

und man erhält so

$$\left.\begin{aligned} x_s - \frac{\alpha}{\gamma} z_s &= \alpha \left(\frac{1}{a_3 - \omega^2} - \frac{1}{a_1 - \omega^2} \right) \frac{\Omega^2}{\omega}, \\ y_s - \frac{\beta}{\gamma} z_s &= \beta \left(\frac{1}{a_3 - \omega^2} - \frac{1}{a_2 - \omega^2} \right) \frac{\Omega^2}{\omega}, \\ z_s - \frac{\gamma}{\gamma} z_s &= \gamma \left(\frac{1}{a_3 - \omega^2} - \frac{1}{a_3 - \omega^2} \right) \frac{\Omega^2}{\omega}, \end{aligned}\right\} \qquad 54''')$$

wobei die letzte, identische Formel der Symmetrie halber zugefügt ist. Die Zusammenfassung dieses Systemes mit den Faktoren α, β, γ liefert

$$\omega - \frac{z_s}{\gamma} = \frac{\Omega^2}{\omega (a_3 - \omega^2)},$$

und bei Verwendung des hieraus folgenden Ausdruckes für z_s ergiebt sich das Wertsystem

$$\left.\begin{aligned} x_s &= \alpha\,\omega \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 (a_1 - \omega^2)} \right) = \alpha_s \sigma, \\ y_s &= \beta\,\omega \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 (a_2 - \omega^2)} \right) = \beta_s \sigma, \\ z_s &= \gamma\,\omega \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 (a_3 - \omega^2)} \right) = \gamma_s \sigma, \end{aligned}\right\} \qquad 55)$$

wobei $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$ die Richtungskosinus des Vektors σ darstellen.

Durch Quadrieren und Addieren erhält man hieraus

$$\sigma^2 = \omega^2 + \frac{\Omega^2}{\omega^2}. \qquad 55')$$

Bedenkt man, daß ω die Normale auf der am Ende von σ an die Fläche S gelegten Tangentenebene ist, so ergiebt diese Formel sogleich

$$\operatorname{tg}(\sigma, \omega) = \frac{\Omega}{\omega^2}, \qquad 55'')$$

wodurch die Größe Ω/ω einfach geometrisch gedeutet ist.

Aus (55′) folgt weiter

$$(a_1 - \sigma^2) = (a_1 - \omega^2) - \frac{\Omega^2}{\omega^2}, \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und beim Einsetzen dieser Werte in (55), wegen $x = \alpha\,\omega$, $y = \beta\,\omega$, $z = \gamma\,\omega$,

$$\frac{x_s}{a_1 - \sigma^2} = \frac{x}{a_1 - \omega^2}, \quad \frac{y_s}{a_2 - \sigma^2} = \frac{y}{a_2 - \omega^2}, \quad \frac{z_s}{a_3 - \sigma^2} = \frac{z}{a_3 - \omega^2}. \qquad 56)$$

Multipliziert man diese Formeln je mit den entsprechenden aus (55) und addiert, so erhält man bei Rücksicht auf (47‴) und (48″) folgende Gleichung vierten Grades in den Koordinaten x_s, y_s, z_s

$$56') \qquad \frac{x_s^2}{a_1-\sigma^2}+\frac{y_s^2}{a_2-\sigma^2}+\frac{z_s^2}{a_3-\sigma^2}+1=0,$$

die nach Multiplikation mit σ^2 leicht auf die Form

$$56'') \qquad \frac{\alpha_s^2}{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\sigma^2}}+\frac{\beta_s^2}{\frac{1}{a_2}-\frac{1}{\sigma^2}}+\frac{\gamma_s^2}{\frac{1}{a_3}-\frac{1}{\sigma^2}}=0$$

gebracht werden kann.

Die so erhaltene Beziehung zwischen σ und seinen Richtungskosinus ist die Gleichung der Strahlen- oder Wellenfläche S[18]); sie unterscheidet sich von der Formel (48'') für die Normalenfläche N wesentlich nur dadurch, daß die Größen a_1, a_2, a_3, ω^2 mit $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, $1/\sigma^2$ vertauscht sind.

Demgemäß erhält man die Schnittkurven der Oberfläche S mit den optischen Symmetrieebenen sogleich aus (49) folgendermaßen; es gilt

$$56''') \qquad \begin{cases} \text{in der } YZ\text{-Ebene } \sigma_1^2=a_1, & \frac{1}{\sigma_2^2}=\frac{\gamma_s^2}{a_2}+\frac{\beta_s^2}{a_3}, \\ \text{in der } ZX\text{-Ebene } \sigma_1^2=a_2, & \frac{1}{\sigma_2^2}=\frac{\alpha_s^2}{a_3}+\frac{\gamma_s^2}{a_1}, \\ \text{in der } XY\text{-Ebene } \sigma_1^2=a_3, & \frac{1}{\sigma_2^2}=\frac{\beta_s^2}{a_1}+\frac{\alpha_s^2}{a_2}. \end{cases}$$

Die Schnittkurven sind sonach in jeder Ebene durch einen Kreis und eine Ellipse gebildet; dieselben haben zusammen nur drei verschiedene Parameter, welche die Quadrate der dreimal zwei Strahlengeschwindigkeiten längs der Symmetrieaxen darstellen. Sie schneiden sich demgemäß in einer der drei Ebenen, worauf wir unten zurückkommen werden.

Läßt man, wie früher, den Krystall dadurch optisch-einaxig werden, daß man $a_1=a_2$ setzt, so zerfällt die Gleichung (56'') in die beiden

$$56'''') \qquad \sigma_o^2=a_1, \quad \frac{1}{\sigma_e^2}=\frac{\alpha_s^2+\beta_s^2}{a_3}+\frac{\gamma_s^2}{a_1},$$

welche eine Kugel und ein Rotationsellipsoid darstellen, die sich in den Endpunkten der Rotationsaxe berühren. Da die konstante Wurzel für σ hier offenbar der ordinären Welle entspricht, sind die Indices 1 und 2 mit o und e vertauscht worden. —

Es lassen sich leicht noch andere Analogien auffinden, welche sich den oben hervorgehobenen zuordnen.

Indem wir das System (56) schreiben

$$57) \qquad \frac{\alpha\,\omega}{a_1-\omega^2}=\frac{\alpha_s\,\sigma}{a_1-\sigma^2}, \quad \frac{\beta\,\omega}{a_2-\omega^2}=\frac{\beta_s\,\sigma}{a_2-\sigma^2}, \quad \frac{\gamma\,\omega}{a_3-\omega^2}=\frac{\gamma_s\,\sigma}{a_3-\sigma^2},$$

können wir (47') auf die Form bringen

$$(a_1 - \sigma^2)\, l = \frac{\Omega\,\sigma}{\omega}\,\alpha_s,\ (a_2 - \sigma^2)\, m = \frac{\Omega\,\sigma}{\omega}\,\beta_s,\ (a_3 - \sigma^2)\, n = \frac{\Omega\,\sigma}{\omega}\,\gamma_s; \quad 57')$$

aus diesem System ergiebt sich bei Zusammenfassung mit den Faktoren f, g, h und bei Berücksichtigung der Beziehungen (46'''') und (48)

$$\alpha_s f + \beta_s g + \gamma_s h = 0, \qquad 57'')$$

der Schwingungsvektor p steht also sowohl senkrecht zur Wellennormale r, als zum Strahl s.

Wir führen nun einen neuen Vektor d_s ein durch die Werte seiner Komponenten

$$\xi_s = a_1\,\xi, \quad \eta_s = a_2\,\eta, \quad \zeta_s = a_3\,\zeta; \qquad 58)$$

seine Richtungskosinus $l_s,\ m_s,\ n_s$ sind dann gegeben durch

$$k\,l_s = a_1\,l, \quad k\,m_s = a_2\,m, \quad k\,n_s = a_3\,n, \qquad 58')$$

wobei

$$k^2 = a_1^2\,l^2 + a_2^2\,m^2 + a_3^2\,n^2 \qquad 58'')$$

ist.

Nach dieser Definition ergiebt sich unter Rücksicht auf (48)

$$f\,l_s + g\,m_s + h\,n_s = 0, \qquad 58''')$$

der Vektor d_s steht also normal zur Polarisationsrichtung p, und liegt somit in der Ebene durch s und r, resp. σ und ω. Ferner folgt aus (57')

$$k\,l_s = \frac{a_1\,\alpha_s}{a_1 - \sigma^2}\,\frac{\Omega\,\sigma}{\omega},\ k\,m_s = \frac{a_2\,\beta_s}{a_2 - \sigma^2}\,\frac{\Omega\,\sigma}{\omega},\ k\,n_s = \frac{a_3\,\gamma_s}{a_3 - \sigma^2}\,\frac{\Omega\,\sigma}{\omega}, \qquad 59)$$

und hieraus bei Zusammenfassung mit den Faktoren $\alpha_s,\ \beta_s,\ \gamma_s$ und Berücksichtigung von (56'')

$$\alpha_s\,l_s + \beta_s\,m_s + \gamma_s\,n_s = 0; \qquad 59')$$

d_s steht also auch senkrecht auf σ und schließt demgemäß mit d denselben Winkel ein, wie σ mit ω.

Für diesen Winkel erhalten wir aus (58') unter Rücksicht auf (48')

$$k\,(l\,l_s + m\,m_s + n\,n_s) = k\cos(d, d_s) = a_1\,l^2 + a_2\,m^2 + a_3\,n^2 = \omega^2, \quad 59'')$$

zugleich folgt aus (55'')

$$\cos(d, d_s) = \cos(\sigma, \omega) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4 + \Omega^2}}, \qquad 59''')$$

und durch Kombination dieser Resultate

$$k = \sqrt{\omega^4 + \Omega^2} = \omega\,\sigma. \qquad 59'''')$$

Hierdurch ist ein einfacher Wert für k erhalten, dessen Einführung bei Benutzung der Abkürzung

60) $$\frac{\Omega}{\omega^2 \sigma^2} = \Sigma$$

gestattet, die Gleichungen (57′) auf folgende Gestalt zu bringen:

60′) $$\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_1}\right) l_s = \alpha_s \Sigma, \quad \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_2}\right) m_s = \beta_s \Sigma, \quad \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_3}\right) n_s = \gamma_s \Sigma.$$

Aus ihnen folgt bei Anwendung der Faktorensysteme l_s, m_s, n_s und f, g, h

60″) $$0 = \frac{l_s f}{a_1} + \frac{m_s g}{a_2} + \frac{n_s h}{a_3},$$

60‴) $$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{l_s^2}{a_1} + \frac{m_s^2}{a_2} + \frac{n_s^2}{a_3},$$

zwei Beziehungen, die genau den Formeln (48) und (48′) entsprechen. Weiter findet man einen (47‴) analogen Ausdruck für Σ, der nur von α_s, β_s, γ_s und σ abhängt, durch die Gleichung

60⁗) $$\frac{1}{\Sigma^2} = \left(\frac{\alpha_s}{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_1}}\right)^2 + \left(\frac{\beta_s}{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_2}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_s}{\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{a_3}}\right)^2.$$

Die erhaltenen Gleichungen (60′), verglichen mit (47′), ergeben für die Geschwindigkeiten σ und die Polarisationsrichtungen p der beiden Strahlen, die sich in gegebener Richtung fortpflanzen, folgende Konstruktion, die der auf S. 589 besprochenen parallel geht.[19])

Man bilde das Ellipsoid, dessen Gleichung in Polarkoordinaten lautet

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{a^2}{a_1} + \frac{b^2}{a_2} + \frac{c^2}{a_3},$$

und lege durch seinen Mittelpunkt eine Ebene normal zu dem gegebenen Strahl; dann geben die Halbaxen der Schnittellipse durch ihre Größen die gesuchten Werte der Geschwindigkeiten σ, durch ihre Richtungen die Lagen der Polarisationsvektoren p; und zwar bestimmt je dieselbe Halbaxe die Geschwindigkeit des **einen**, den Polarisationsvektor des **anderen** Strahles.

Zugleich geben die Halbaxen auch die Richtungen der oben eingeführten Hilfsvektoren d_s, die ja zu p und zu s normal sind; diese haben in der mechanischen Lichttheorie keine unmittelbare physikalische Bedeutung, in der elektromagnetischen fallen sie mit den elektrischen Kräften zusammen, wie dies sich aus dem S. 579 Gesagten leicht nachweisen läßt.

Wegen des einfachen Zusammenhanges zwischen den für die Wellennormalen und den für die Strahlen gültigen Formeln erhält

man durch unmittelbare Übertragung einiger der letzteren ohne alle Rechnung auch noch die folgenden Resultate.

Die beiden Geschwindigkeiten σ, welche derselben Strahlrichtung s zukommen, werden einander gleich allein für zwei Paar entgegengesetzter Richtungen, die sogenannten Strahlenaxen, die in einer optischen Symmetrieebene und symmetrisch zu einer optischen Symmetrieaxe liegen. Gilt die Ungleichung

$$a_1 \gtreqless a_2 \gtreqless a_3 ,$$

so befinden sie sich in der XZ-Ebene und schließen mit der Z-Axe Winkel s ein, gegeben durch die zu (43') analogen Formeln

$$\sin^2 s = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}, \quad \cos^2 s = \frac{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}; \tag{61)}$$

die Vergleichung mit den Werten (43') ergiebt zwischen der Lage der optischen und der Strahlenaxen die Beziehungen

$$\sin^2 s = \frac{a_3}{a_2} \sin^2 o, \quad \cos^2 s = \frac{a_1}{a_2} \cos^2 o . \tag{61')}$$

Die Strahlenaxen sind die Normalen auf den Kreisschnitten des zur Konstruktion benutzten Ellipsoides, wie die optischen Axen diejenigen auf den Kreisschnitten des Polarisationsovaloides.

Für die Anwendungen ist es vorteilhaft, von den entgegengesetzt liegenden Richtungen je eine als positiv zu führen; wir wählen, wie bei den optischen Axen, hierfür diejenigen beiden, welche der $+Z$-Axe beiderseitig am nächsten liegen, und bezeichnen mit S' diejenige, für welche

$$\alpha_s' = + \sqrt{\frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}}, \quad \beta_s' = 0, \quad \gamma_s' = + \sqrt{\frac{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}} \tag{61'')}$$

ist, mit S'' diejenige, für welche gilt

$$\alpha_s'' = - \sqrt{\frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}}, \quad \beta_s'' = 0, \quad \gamma_s'' = + \sqrt{\frac{\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}}{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}}. \tag{61''')}$$

Charakterisieren wir dann die Richtung eines Strahles durch die Winkel V' und V'', die derselbe mit S' und S'' einschließt, so folgt für die Werte der beiden Geschwindigkeiten, die derselbe je nach seiner Schwingungsart besitzen kann, durch einfache Übertragung der Resultate (51) resp. (51')

$$62)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_o^2} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_3}\right)\cos(V'' - V'), \\ \dfrac{1}{\sigma_e^2} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_3}\right) + \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_3}\right)\cos(V'' + V'). \end{cases}$$

Die Indices sind wiederum so gewählt, daß σ_o konstant wird, wenn die Axen S' und S'' beide in die Z-Axe rücken.

Welcher von den beiden Strahlen (o) und (e) in den optischen Symmetrieebenen eine konstante Geschwindigkeit besitzt, ergiebt sich sogleich durch Übertragung der Resultate von S. 593.

Für die einer gegebenen Strahlenrichtung s zugehörigen Polarisationsrichtungen p_o und p_e folgt nach S. 594, daß, wenn man den Winkel zwischen den Ebenen (s, S') und (s, S''), innerhalb dessen die Z-Axe liegt, mit I bezeichnet, die Halbierungsebene von I den Vektor p_o, die seines Nebenwinkels den Vektor p_e enthält.

Dieselben Ebenen enthalten auch die Vektoren d_e und d_o; letztere stehen aber nicht normal zum Strahl und sind daher durch Angabe der Ebene in ihrer Lage noch nicht definiert.

Die Übertragung der Werte (53′) liefert im Hinblick auf die Definitionen (47‴) und (60⁗) von Ω und Σ auch

$$62')\quad \begin{cases} \Sigma_o = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_3}\right)\sin(V'' - V')\sin\frac{1}{2}I, \\ \Sigma_e = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_3}\right)\sin(V'' + V')\cos\frac{1}{2}I, \end{cases}$$

wobei unter Einführung des Winkels $S = 2s$ der Strahlenaxen gilt

$$62'')\quad \begin{cases} \sin^2\frac{1}{2}I = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(V' - V'' + S)\sin\frac{1}{2}(V'' - V' + S)}{\sin V'\sin V''}, \\ \cos^2\frac{1}{2}I = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(V' + V'' - S)\sin\frac{1}{2}(V'' + V' + S)}{\sin V'\sin V''}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Resultate gewinnen ein hervorragendes praktisches Interesse durch die schon auf S. 521 erwähnte Thatsache, daß, wenn man einen Teil einer ebenen Welle durch einen Schirm aussondert, derselbe bei seiner Fortpflanzung angenähert durch eine aus Strahlen gebildete Cylinderfläche begrenzt ist. Diese Thatsache ist bisher als bloßes Resultat der Beobachtung aufgefaßt; sie läßt sich aber theoretisch begründen und erscheint dadurch in einem neuen Lichte.

Um diese Begründung zu liefern, knüpfen wir an die Ausgangsgleichungen (45′) an, fassen dieselben mit den Faktoren $u'dk$, $v'dk$, $w'dk$ zusammen und integrieren das Resultat über ein beliebiges Bereich k des homogenen Krystalles.

Unter Benutzung der Werte

$$2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2,$$
$$2\varphi = a_1\xi^2 + a_2\eta^2 + a_3\zeta^2$$

erhalten wir nach einmaliger teilweiser Integration

$$\int(\varphi' + \psi')\,dk = \int\Big[\big(a_2\overline{\eta}\,\overline{w'} - a_3\overline{\zeta}\,\overline{v'}\big)\cos(n,x) + \big(a_3\overline{\zeta}\,\overline{u'} - a_1\overline{\xi}\,\overline{w'}\big)\cos(n,y)$$
$$+ \big(a_1\overline{\xi}\,\overline{v'} - a_2\overline{\eta}\,\overline{u'}\big)\cos(n,z)\Big]\,do,$$

wobei do das Element der Oberfläche o von k und n die innere Normale auf do ist. Diese Formel ergiebt die Änderung der Energie $E = \int(\varphi + \psi)\,dk$ des Raumes k als Resultat einer durch die Oberfläche eintretenden Energieströmung, deren Komponenten nach den Koordinatenaxen lauten

$$\mathfrak{f} = a_2\eta w' - a_3\zeta v', \quad \mathfrak{g} = a_3\zeta u' - a_1\xi w', \quad \mathfrak{h} = a_1\xi v' - a_2\eta u',$$

— Formeln, die leicht mit den auf S. 424 erhaltenen Gleichungen (252) in Beziehung zu setzen sind.

Führen wir nach (58) die Komponenten ξ_s, η_s, ζ_s des Vektors d_s ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{f} = \eta_s w' - \zeta_s v', \quad \mathfrak{g} = \zeta_s u' - \xi_s w', \quad \mathfrak{h} = \xi_s v' - \eta_s u',$$

und diese Werte zeigen, daß der Energiestrom senkrecht zu den Vektoren p und d_s, also nach S. 599 parallel mit der Richtung des Strahles s stattfindet.

Begrenzt man also einen Teil eines ebenen Wellenzuges durch eine aus Strahlen gebildete Cylinderfläche, so tritt durch diese Fläche Energie nicht hindurch; es erscheint also plausibel, daß man die Bewegung auf der einen Seite der Cylinderfläche ganz beseitigen kann, ohne die auf der anderen Seite befindliche zu ändern.

Indessen ist dieser Schluß keineswegs streng; vielmehr zeigt die genauere Analyse, auf welche wir später eingehen werden, daß bei Strahlenbündeln, deren Querdimensionen die Wellenlänge des Lichtes sehr viele Male übertreffen, die Bewegung in einer relativ dünnen oberflächlichen Schicht, bei dünneren Bündeln aber die Bewegung aller Teile geändert wird, wenn eine Begrenzung in der obigen Weise an irgend einer Stelle des fortschreitenden Wellenzuges vorgenommen wird, und daß sich die Bewegung auch über die Cylinderfläche hinaus in den äußeren Raum verbreitet. —

Um in jedem einzelnen Falle zu einer gegebenen Wellennormalen die zugehörigen Strahlen nach Richtung und Geschwindigkeit, und umgekehrt zu einem gegebenen Strahl Richtung und Geschwindigkeit der zugehörigen Wellennormale zu finden, dienen außer dem

S. 599 abgeleiteten Satz, daß der Strahl und die Wellennormale senkrecht zum Polarisationsvektor p stehen, dessen Richtung hinwieder auf S. 587 und S. 594 angegeben ist, die Formeln (55') und (55''), die wir unter Benutzung der durch (60) eingeführten Hilfsgröße Σ folgendermaßen schreiben können

$$63) \qquad \sigma^2 = \omega^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega^4}\right), \quad \omega^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^4 \Sigma^2}$$

$$63') \qquad \operatorname{tg}(\sigma, \omega) = \frac{\Omega}{\omega^2} = \sigma^2 \Sigma.$$

In der letzten Formel betrachtet man am besten Ω und Σ als absolute Größen und bestimmt den Sinn, in dem σ von ω abweicht, rein geometrisch, am einfachsten, indem man die gegebene Richtung σ oder ω in die optischen Symmetrieebenen rückt, wo an der Hand der Schnittkurven der Oberfläche N oder S die unmittelbare Anschauung die gegenseitige Lage dieser beiden Vektoren ergiebt.

Diese Symmetrieebenen enthalten nämlich gleichzeitig die einander entsprechenden Wellennormalen und Strahlen; für die in (49) und (56''') mit (1) bezeichneten Wellen von konstanter Geschwindigkeit fällt Strahl und Normale zusammen; für die mit (2) bezeichneten von variabler Geschwindigkeit liegt jederzeit der Strahl nach der Richtung der benachbarten größeren, die Normale nach derjenigen der benachbarten kleineren Halbaxe der Schnittellipse hin, welche die Oberfläche S in der betreffenden Symmetrieebene liefert. Da der Sinn der Abweichung zwischen r und s sich stetig ändert, so ist derselbe hierdurch auch für die Octanten zwischen den Symmetrieebenen festgestellt. —

Von hervorragendem Interesse sind diejenigen speziellen Richtungen der Wellennormalen r und des Strahles s, für welche der Winkel (σ, ω) nach den in (63') gegebenen Ausdrücken unbestimmt wird.[20]

Um die bezüglichen Richtungen der Wellennormalen r zu betrachten, knüpfen wir an den Ausdruck $\operatorname{tg}(\sigma, \omega) = \Omega / \omega^2$ an, dessen Nenner in allen Richtungen vollständig bestimmt ist, dessen Zähler Ω nach den Werten (53') aber unbestimmt wird, wenn die Wellennormale in eine optische Axe fällt, da in diesem Falle der Winkel J alle möglichen Werte annehmen kann.

Um dies näher zu verfolgen, lassen wir r mit O' zusammenfallen und bemerken, daß in diesem Falle $\omega_o^2 = \omega_e^2 = a_2$ ist; wir führen weiter den Winkel φ zwischen der Ebene (ω, σ_e), resp. (O', σ_e),

und (O', O''), resp. (X, Z), ein, so gerechnet, daß $\frac{1}{2} J = \varphi$ wird, und erhalten, da $U' = 0$, $U'' = 2o = O$ ist, sogleich

$$\operatorname{tg}(\sigma_o, \omega) = \frac{a_1 - a_3}{2 a_2} \sin O \sin \varphi, \quad \operatorname{tg}(\sigma_e, \omega) = \frac{a_1 - a_3}{2 a_2} \sin O \cos \varphi. \quad 64)$$

Da φ alle Werte zwischen 0 und 2π annimmt, und da der Strahl s_e in der Halbierungsebene des Winkels J, der Strahl s_o in der dazu normalen liegt, so sind die beiden Formeln äquivalent; sie sagen aus, daß die Strahlen, welche zu der parallel O' liegenden Wellennormalen gehören, einen Kegel erfüllen, dessen Gleichung lautet

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{a_1 - a_3}{2 a_2} \sin O \cos \varphi, \qquad 64')$$

wobei χ den Winkel zwischen der Kante im Azimut φ und der Axe O' bezeichnet, und wobei, wenn $a_1 > a_3$ ist, der Wert $\varphi = 0$ der Richtung von O' nach der Z-Axe hin entspricht. Die Schnittkurve des Kegels mit der Wellenebene im Endpunkt von ω, d. h. im Abstand $\sqrt{a_2}$ von der Spitze, ist, falls man den Radiusvektor $\sqrt{a_2} \operatorname{tg} \chi = \varrho$ setzt, gegeben durch

$$\varrho = \frac{a_1 - a_3}{2 \sqrt{a_2}} \sin O \cos \varphi; \qquad 64'')$$

sie ist also ein Kreis vom Durchmesser

$$\delta = \frac{a_1 - a_3}{2 \sqrt{a_2}} \sin O, \qquad 64''')$$

der durch die Axe O' geht.

Nach dem früher erörterten Zusammenhang zwischen Wellennormale und Strahl folgt hieraus, daß die Wellenebene, die normal zu einer optischen Axe im Abstand $\sqrt{a_2}$ vom Mittelpunkt konstruiert wird, die Fläche S in dem Kreise berührt, dessen Gleichung in (64'') enthalten ist.

Über die in dem Strahlenkegel stattfindende Polarisationsrichtung p giebt die Regel Aufschluß, daß p normal steht zu Wellennormale und Strahl; da die Wellennormale hier in die optische Axe O' fällt, so ist für jede Kante des Kegels die Polarisationsrichtung normal zu der Ebene durch diese Kante und durch O'. —

Um die singulären Richtungen der Strahlen s zu finden, gehen wir aus von dem Ausdruck $\operatorname{tg}(\sigma, \omega) = \sigma^2 \Sigma$, dessen erster Faktor jederzeit bestimmt ist, dessen zweiter nach (62') aber unbestimmt wird, wenn s in eine Strahlenaxe S' oder S'' fällt, da dann der Winkel I alle möglichen Werte annehmen kann.

Um dies genauer zu verfolgen, lassen wir s in die Axe S' fallen, wodurch $\sigma^2 = a_2$ wird; wir führen den Winkel ψ zwischen den Ebenen (σ, ω_e), resp. (S', ω_e), und (S', S''), resp. (X, Z), ein, sodaß $\frac{1}{2} I = \psi$ wird, und erhalten sogleich, da $V' = O$, $V'' = 2s = S$ ist,

$$65)\quad \operatorname{tg}(\sigma, \omega_o) = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}{\frac{2}{a_2}} \sin S \sin \psi, \quad \operatorname{tg}(\sigma, \omega_e) = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}{\frac{2}{a_2}} \sin S \cos \psi.$$

Diese Formeln gehen den in (64) enthaltenen durchaus parallel; sie sprechen aus, daß die Wellennormalen, welche dem zu S' parallel liegenden Strahl zugehören, einen Kegel erfüllen, dessen Gleichung lautet

$$65')\qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}{\frac{2}{a_2}} \sin S \cos \psi,$$

wobei χ den Winkel zwischen der Kante im Azimut ψ und der Axe S' bezeichnet, und wobei, wenn $a_1 > a_3$ ist, der Wert $\psi = 0$ der Richtung von S' nach der X-Axe hin entspricht.

Legt man eine Ebene im Abstand $\sqrt{a_2}$ von der Spitze des Kegels normal zur Axe S', so schneidet der Kegel sie in der Kurve

$$65'')\qquad \varrho = \sqrt{a_2}\, \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}{\frac{2}{a_2}} \sin S \cos \psi,$$

wobei $\varrho = \sqrt{a_2} \operatorname{tg}\chi$ den Radiusvektor von der Axe S' aus bezeichnet; die Kurve ist ein Kreis vom Durchmesser

$$65''')\qquad \delta = \sqrt{a_2}\, \frac{\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3}}{\frac{2}{a_2}} \sin S,$$

der die Axe S' schneidet.

Über die Polarisationsrichtung p an den verschiedenen Stellen des Normalenkegels giebt der oben zu gleichem Zwecke bei dem Strahlenkegel benutzte Satz Aufschluß.

Nach dem früher erörterten Zusammenhang zwischen Strahl und Wellennormale ist der soeben bestimmte Kegel identisch mit dem, der von den Normalen auf der Oberfläche S in deren konischen Doppelpunkten, d. h. in den Enden der Strahlenaxen, gebildet wird.

§ 11. Die geometrischen Gesetze der gewöhnlichen Reflexion und Brechung homogener ebener Wellen an durchsichtigen inaktiven Krystallen. Konische Refraktion. Die Grenzwinkel streifender Reflexion und Brechung. Bestimmungsmethoden optischer Konstanten.

Die geometrischen Gesetze der Reflexion und der Brechung ebener homogener Wellen an der ebenen Zwischengrenze durchsichtiger krystallinischer Medien lassen sich vollständig ableiten auf der alleinigen Grundlage der Thatsache, daß die Bedingungen des Überganges lineäre Beziehungen zwischen den Komponenten der in beiden angrenzenden Medien stattfindenden Schwingungsvektoren darstellen. Denn berücksichtigt man, daß nach Symmetrie eine einfallende homogene ebene Welle nur ebensolche reflektierte und gebrochene Wellen hervorrufen kann, so ergiebt sich, daß diese Komponenten sämtlich die Variabeln nur in Kombinationen von der Form

$$T_h = \frac{2\pi}{\tau_h}\left(t - \frac{\alpha_h x + \beta_h y + \gamma_h z}{\omega_h}\right)$$

enthalten, und daß diese Funktionen T_h für die verschiedenen Wellen in der Zwischengrenze sämtlich den gleichen Wert annehmen müssen. Hieraus folgt zunächst ganz allgemein, daß die Perioden τ_h für alle aus einer einfallenden entstehenden Wellen gleich sein müssen, daß also einfarbiges Licht durch Reflexion oder Brechung seine Farbe nicht ändern kann.

Wählen wir ferner speziell die Zwischengrenze zur XY-Ebene, so müssen auch die Aggregate α_h/ω_h und β_h/ω_h für alle so verbundenen Wellen die gleichen sein; legen wir noch spezieller die XZ-Ebene durch die Wellennormale der einen, etwa der einfallenden Welle, machen sie also zur Einfallsebene, so ergiebt sich, daß, wie für die einfallende, so für alle Wellen $\beta_h = 0$ sein und für alle α_h/ω_h den gleichen Wert besitzen muß. Hierdurch ist bereits das Grundgesetz der Reflexion und der Brechung ebener homogener Wellen ausgesprochen; dasselbe lautet dahin, daß die reflektierten und die gebrochenen Wellennormalen in der Einfallsebene liegen, und daß die Sinus ihrer Winkel gegen das Einfallslot $\alpha_h = \sin\varphi_h$ sich wie ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_h verhalten.[21])

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Funktionen der Farbe sind, die mit der Richtung variieren, so werden auch die Winkel φ_h von der Farbe abhängig sein; bei nicht einfarbigem einfallenden Lichte tritt daher an der Grenze zwischen zwei Krystallen sowohl für die reflektierten, als für die gebrochenen Wellen Dispersion ein.

Nimmt man die im vorigen Paragraphen für den Zusammenhang zwischen Strahlen und Wellennormalen erhaltenen Resultate zu Hilfe, so erkennt man, daß die Strahlen im allgemeinen keines der obigen beiden Gesetze befolgen. —

Um den Zusammenhang zwischen einfallenden, reflektierten und gebrochenen Wellennormalen zu veranschaulichen, unterscheiden wir die in der Zwischengrenze zusammenhängenden Medien als die Körper (0) und (1), führen aber die auf das erste bezüglichen Größen ohne Index, die auf das zweite mit dem Index ,. Wir konstruieren um einen beliebigen Punkt der Grenze, der als Koordinatenanfang gewählt werden möge, in den S. 522 festgesetzten Dimensionen zwei Strahlenflächen S und $S_{,}$, wie sie den Medien (0) und (1) entsprechen.

Ist dann im Medium (0) eine gegen die Grenze hinlaufende, also einfallende Wellenebene entweder direkt, oder durch ihren Strahl gegeben, so legen wir ihr parallel Tangentenebenen an die Fläche S, sodaß ihre Berührungspunkte im Medium (1) liegen; da die Fläche S zwei Hüllen besitzt, so giebt es deren im allgemeinen auch zwei, und von ihnen wird die eine nur dann auszuschließen sein, wenn die Schwingungsart der einfallenden Welle speziell so vorgeschrieben ist, wie sie allein in der anderen Welle stattfinden kann. Wir denken zur Vereinfachung zunächst eine solche beschränkende Verfügung getroffen, also nur eine dieser Tangentenebenen konstruiert, — werden es aber später zeitweilig passender finden, beide nebeneinander zu benutzen —, und bezeichnen die Gerade, in der sie die XY-Ebene, d. h. die Zwischengrenze, schneidet, als die Gerade Γ.

Durch die Gerade Γ sind dann im allgemeinen noch weitere drei Tangentenebenen an die Fläche S, außerdem aber vier Tangentenebenen an die Fläche $S_{,}$ zu legen möglich, und alle diese acht Ebenen stehen, als Wellenebenen aufgefaßt, ersichtlich in der Beziehung, daß für sie α/ω den gleichen, nämlich den für die einfallende Wellenebene vorgeschriebenen Wert besitzt.

Da in jeder Strahlenfläche der Radiusvektor vom Centrum nach der Berührungsstelle einer Ebene die Natur des Strahles hat, welcher jener Ebene als einer längs der Normalen sich fortpflanzenden Wellenebene zugehört, so ist der Charakter der verschiedenen, durch die obige Konstruktion gegebenen Wellenebenen aus der Lage und der Richtung der zugehörigen Strahlen zu beurteilen.

Wellen, deren Strahlen nach dem Medium (1) hin liegen, haben daher in unserem Falle, je nachdem sie mit Hilfe der Fläche S oder $S_{,}$ erhalten sind, den Charakter in (0) einfallender, wie dies

oben schon benutzt ist, oder nach (1) gebrochener Wellen; solche, deren Strahlen nach (0) hinweisen, sind reflektierte, wenn sie Tangentenebenen der Fläche S sind.

Welche von diesen Wellen je bei dem speziellen vorliegenden Problem eine Bedeutung haben, würde sich ohne Zuhilfenahme der Erfahrung mit aller Strenge ergeben, wenn das Problem durch Nebenbedingungen eindeutig bestimmt wäre; solche Bedingungen könnte etwa die Festsetzung liefern, daß im Unendlichen nur im ersten Medium eine, und zwar nur eine, nach der Grenze hinlaufende Welle vorhanden wäre. Dadurch wäre man gezwungen, sich, neben der einfallenden, auf Wellen zu beschränken, die von der Grenze hinweglaufen, und die vorstehende Überlegung ergiebt, daß deren zwei im ersten und zwei im zweiten Medium vorhanden sind. In der Regel begnügt man sich mit dem Schluß, daß die vier auf S. 579 abgeleiteten Grenzbedingungen auch nur vier Wellen aus einer einfallenden zu bestimmen gestatten, und wählt für diese der Erfahrung nach jene vier, von denen zwei als reflektierte, zwei als gebrochene zu bezeichnen sind.

Die erörterte Konstruktion zeigt übrigens, daß es zu jeder einfallenden Welle mindestens eine zugehörige reflektierte, daß es aber nicht zu jeder einfallenden Welle zugehörige gebrochene giebt. In der That: da die einfallende Welle eine im Medium (0) mögliche Bewegung enthalten soll, so muß die Gerade Γ nach ihrer Konstruktion stets ganz außerhalb wenigstens der einen Hülle der Fläche S liegen, und sonach muß, außer der einen Tangentenebene an S, welche die einfallende Wellenebene repräsentiert, stets mindestens noch eine zu legen möglich sein, die S innerhalb des Mediums (0) berührt und also eine reflektierte Wellenebene darstellt. Dagegen kann die Gerade Γ, wenn das Medium (1) geeignet gewählt ist, beide Hüllen der Oberfläche S_1 schneiden, und dann ist es überhaupt nicht möglich, durch Γ Tangentenebenen an S_1 zu legen; dann entspricht also der einfallenden gar keine gebrochene Welle.

Man kann allgemein sagen: bei wachsendem Einfallswinkel verschwindet eine reflektierte Welle in dem Moment, wo die Gerade Γ die eine Hülle von S berührt; es verschwindet jedesmal eine gebrochene, wenn die Gerade Γ eine Hülle von S_1 berührt. Bedenkt man, daß in diesen Grenzfällen die Berührungsstelle je einer durch Γ gelegten Tangentenebene in die Grenzfläche XY rückt, und erinnert sich, daß der Radiusvektor nach der Berührungsstelle der jener Wellenebene zugehörige Strahl ist, so erkennt man, daß der

Moment des Verschwindens einer Welle immer an den streifenden Verlauf des zugehörigen Strahles gebunden ist. Demgemäß könnte man jene singulären Einfallswinkel auch als diejenigen charakterisieren, für welche entweder der eine reflektierte oder der eine gebrochene Strahl streifend verläuft.

Die letzten beiden Winkel nennt man, da sie je das Verschwinden einer gebrochenen Welle bezeichnen, daneben auch die Grenzwinkel der totalen Reflexion. Sie haben eine besondere Bedeutung, da sie auch in dem praktisch wichtigsten Falle vorkommen, wo das erste Medium isotrop ist, wo also, weil S nur eine Hülle besitzt, der Grenzwinkel streifender Reflexion in Wegfall kommt. —

Von eigenartigem Interesse ist bei zweiaxigen Krystallen noch je eine spezielle Lage der Wellennormale oder des Strahles.

Fällt die gebrochene Wellennormale in eine optische Axe des zweiten Mediums, so entsprechen ihr nach S. 605 unendlich viele gebrochene Strahlen, die den Mantel eines gewissen schiefen Kreiskegels erfüllen. Grenzt man also im ersten Medium, das am besten als unkrystallinisch — etwa als der Luftraum — gewählt wird, ein feines Strahlenbündel ab, so pflanzt sich in diesem Falle ein Strahlenkegel im zweiten Medium fort, und wenn letzteres durch eine zweite parallele Fläche gegen den Luftraum begrenzt ist, tritt aus derselben ein von den Strahlen erfüllter Cylindermantel aus.

Diese Erscheinung nennt man die innere konische Refraktion.

Liegt der auf die Zwischengrenze treffende Strahl in einer Strahlenaxe, so entsprechen ihm nach S. 605 unendlich viele Wellennormalen, die einen gewissen schiefen Kreiskegel erfüllen, und jeder von ihnen gehört eine andere gebrochene Wellennormale zu. Ist das zweite Medium unkrystallinisch, — etwa der Luftraum — so fallen in ihm Strahlen und Normalen zusammen, und aus einem Strahlenbündel im Innern des Krystalles entsteht sonach im äußeren Raum ein von Strahlen erfüllter Kegelmantel.

Diese Erscheinung nennt man die äußere konische Refraktion.

Beide sind zunächst aus der Theorie erschlossen und dann erst beobachtet worden; sie liefern somit eine besonders frappierende Bestätigung der abgeleiteten Gesetze der Doppelbrechung.[22]) —

Um diese geometrischen Überlegungen analytisch zu fassen und dadurch ihre Resultate für die Anwendung geeigneter zu machen, betrachten wir eine homogene ebene Welle, deren Normale in der — übrigens beliebig orientierten — XZ-Ebene liegt. Es ist dann

u, v, w von y unabhängig, und die Hauptgleichungen nehmen die Form an

$$\left.\begin{aligned} u'' &= \frac{\partial}{\partial z}(a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta), \\ v'' &= \frac{\partial}{\partial x}(a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta) - \frac{\partial}{\partial z}(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta), \\ w'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial x}(a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

wobei

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{66'}$$

ist. Die letzte der Gleichungen (66) kann auch durch die Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{66''}$$

ersetzt werden, die sie mit der ersten verbindet.

Wir behalten die Ansätze (45'') bei, haben aber speziell $\beta = 0$, also $\alpha = \sin\varphi$, $\gamma = \cos\varphi$ und

$$r = \alpha x + \gamma z. \tag{66'''}$$

Die Gleichung (66'') ergiebt

$$f\alpha + h\gamma = 0, \tag{67}$$

und mit ihrer Hilfe erhält man aus den ersten beiden Gleichungen (66)

$$\left.\begin{aligned} f(\omega^2 - a_{22}) &= g\gamma(a_{23}\alpha - a_{12}\gamma), \\ g\gamma(\omega^2 - a_{11}\gamma^2 - a_{33}\alpha^2 + 2a_{31}\alpha\gamma) &= f(a_{23}\alpha - a_{12}\gamma). \end{aligned}\right\} \tag{67'}$$

Durch Elimination von f und g folgt hieraus

$$(\omega^2 - a_{22})(\omega^2 - a_{11}\gamma^2 - a_{33}\alpha^2 + 2a_{31}\alpha\gamma) = (a_{23}\alpha - a_{12}\gamma)^2, \tag{67''}$$

eine Gleichung, die bei gegebener Richtung von r, und somit gegebenen α und γ, die zwei ihr zugehörigen Werte ω^2 bestimmt. Setzt man letztere in eine der Formeln (67') ein, so erhält man f/g, und hieraus mit Hilfe der Beziehungen

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \text{ und } f\alpha + h\gamma = 0$$

auch f, g, h, d. h. die Richtung des Polarisationsvektors p. Um das Resultat anschaulich zu gestalten, führen wir den Winkel ϑ zwischen den Ebenen (r, p) und (X, Z) ein, setzen also

$$f = -\gamma\cos\vartheta, \quad g = \sin\vartheta, \quad h = \alpha\cos\vartheta; \tag{67'''}$$

dann giebt die erste Gleichung (67') sehr einfach

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\omega^2 - a_{22}}{a_{12}\gamma - a_{23}\alpha}. — \tag{67''''}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die XY-Ebene die Grenze zwischen zwei beliebig orientierten durchsichtigen Krystallen ist, und daß die betrachteten homogenen ebenen Wellen einer gegebenen einfallenden als reflektierte und gebrochene entsprechen. Dann ist für sie nach dem oben Gesagten das Verhältnis α/ω, das wir mit $1/k$ bezeichnen wollen, von vorgeschriebener Größe. Setzen wir demgemäß in der Gleichung (67″) für ω seinen Wert αk ein, dividieren durch α^4 und kürzen ab

$$68)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \operatorname{ctg}\varphi = e,$$

so erhalten wir

$$68')\quad (a_{11}e^2 - 2a_{13}e + a_{33} - k^2)(a_{22}e^2 + a_{22} - k^2) = (a_{12}e - a_{23})^2(1+e^2),$$

außerdem aus (67″″)

$$68'')\qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{k^2 - a_{22} - a_{22}e^2}{(a_{12}e - a_{23})\sqrt{1+e^2}}.$$

Beide Formeln sind sowohl für das Medium (0), als für (1) zu bilden.

Die erste bestimmt die gegebenem Einfallswinkel, und somit gegebenem k zugehörigen Werte e, und hierdurch die Reflexions- und Brechungswinkel φ. Sie ist vom vierten Grade und wird bei allen Anwendungen durch eine Näherung zu behandeln sein, die benutzt, daß die Hauptkonstanten a_1, a_2, a_3 sich nur wenig von einander unterscheiden. Welche von den vier Wurzeln in jedem Falle reflektierte, und welche gebrochene Wellen charakterisieren, läßt sich, wie S. 608 gezeigt, nach der Lage des ihnen entsprechenden Strahles beurteilen, die mit Hilfe der Gesetze von S. 599 u. f. immer, wenn auch mitunter nur umständlich, bestimmbar ist.

Um aus erhaltenem e die Reflexions- und die Brechungswinkel selbst zu erhalten, ist zu bedenken, daß α durch das Brechungsgesetz für alle Wellen von demselben Vorzeichen, wie in der einfallenden Welle, vorgeschrieben wird. Liegt die einfallende Normale, wie wir annehmen wollen, im ersten Quadranten $(+X, +Z)$, so können also die reflektierten und die gebrochenen immer nur im ersten oder im vierten, d. h. auf der Seite der $+X$-Axe liegen; das Vorzeichen von e ergiebt dann das Vorzeichen von γ, und damit die eindeutige Bestimmung der entsprechenden Winkel. —

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, das betrachtete Medium wäre so orientiert, daß eine optische Symmetrieaxe in die Y-Axe fällt. Dann wird $a_{23} = a_{12} = 0$, und die Gleichung (68′) zerfällt in

$$a_{22}\, e_1^2 + a_{22} - k^2 = 0,$$

$$a_{11}\, e_2^2 - 2\, a_{13}\, e_2 + a_{33} - k^2 = 0,$$

woraus folgt

$$e_1 = \pm \sqrt{\frac{k^2 - a_{22}}{a_{22}}}, \quad e_2 = \frac{a_{13}}{a_{11}} \pm \sqrt{\frac{k^2 - a_{33}}{a_{11}} + \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2}.$$

Nehmen wir an, daß ebene homogene Wellen in dem Medium möglich sind, so müssen beide Wurzelgrößen reell sein; wir schreiben daher abgekürzt

$$e_1 = \pm R_1, \quad e_2 = P_2 \pm R_2 .$$

Für die Welle (1) fällt Strahl und Normale zusammen; es entspricht sonach einer gebrochenen Welle die positive, der reflektierten die negative Wurzel für e_1.

Für die Welle (2) ist der Winkel zwischen Strahl und Normale nach (55″) gegeben durch

$$\operatorname{tg}(r_2, s_2) = \frac{\Omega_2}{\omega_2^2};$$

dabei kann man Ω unter der Annahme $\beta = 0$, $g = 1$ und $\alpha l + \gamma n = 0$ aus (47″) entnehmen, ω_2^2 aus der zweiten Formel (49); indem man die gegen die optischen Symmetrieaxen gerechneten Richtungskosinus mit α_0, γ_0 bezeichnet, erhält man direkt

$$\operatorname{tg}(r_2, s_2) = \pm \frac{(a_3 - a_1)\, \alpha_0\, \gamma_0}{a_3\, \alpha_0^2 + a_1\, \gamma_0^2},$$

wobei der absolute Wert des Ausdruckes rechts zu nehmen ist. Bei Einführung des oben vorausgesetzten Koordinatensystemes ergiebt dies unter Rücksicht auf (38″″)

$$\operatorname{tg}(r_2, s_2) = \pm \frac{(a_{33} - a_{11})\, \alpha \gamma + a_{13}(\gamma^2 - \alpha^2)}{a_{11}\, \gamma^2 + a_{33}\, \alpha^2 - 2\, a_{13}\, \alpha \gamma}.$$

Uber den Sinn der Abweichung von Strahl und Normale gilt nach S. 604 die Regel, daß in jedem Quadranten der Schnittellipse der Fläche S mit der XZ-Ebene die Normale nach der kleineren, der Strahl nach der größeren Halbaxe hin liegt.

Solange also ihr Winkel gegen die X-Axe größer ist, als der oben bestimmte Winkel (r_2, s_2), hat jede Normale im ersten Quadranten (X, Z) den Charakter einer gebrochenen, im vierten $(X, -Z)$ den Charakter einer reflektierten; ist er kleiner, so entscheidet darüber die Seite, nach welcher hin der Strahl liegt. —

Zur Aufsuchung der Grenzwinkel, für welche ein reflektierter oder ein gebrochener Strahl streifend verläuft, braucht man dagegen nicht auf die Gesetze für die Strahlen zurückzugreifen. Da

nämlich diese Grenzwinkel dadurch charakterisiert sind, daß die Gerade Γ, durch welche sämtliche der einfallenden Welle entsprechenden Tangentenebenen gehen, zur Tangente an einer Hülle einer der Strahlenflächen S oder S_1 wird, so fallen für diese Grenzwinkel die beiden durch Γ gehenden Tangentenebenen an jener Hülle zusammen, es werden dafür also zwei Wurzeln einer der Gleichungen (68') für das Medium (0) oder (1) gleich. Somit bestimmt derjenige Wert von k, für welchen die Diskriminante der für das Medium (0) gebildeten Formel (68') verschwindet, einen Grenzwinkel streifender Reflexion, ebenso derjenige, für welchen gleiches in Bezug auf das Medium (1) gilt, einen Grenzwinkel streifender Brechung oder sogenannter totaler Reflexion.[23])

Schreibt man die Gleichung (68') in der Form

69) $$A_0 + 4A_1 e + 6A_2 e^2 + 4A_3 e^3 + A_4 e^4 = 0,$$

so hat die Diskriminante D die Gestalt

69') $$D = D_1^3 - 6D_2^2,$$

wobei

69'') $$\begin{cases} D_1 = 2(A_0 A_4 - 4A_1 A_3 + 3A_2^2), \\ D_2 = 6\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} \end{cases}$$

ist, und die A_h folgende Bedeutung besitzen,

69''') $$\begin{cases} A_0 = (a_{22} - k^2)(a_{33} - k^2) - a_{23}^2, \\ 4A_1 = 2\left(a_{12}a_{23} - a_{13}(a_{22} - k^2)\right), \\ 6A_2 = a_{11}(a_{22} - k^2) + a_{22}(a_{33} - k^2) - a_{23}^2 - a_{12}^2, \\ 4A_3 = 2(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}), \quad A_4 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \end{cases}$$

Ist die Z-Axe, d. h. das Einfallslot, eine optische Symmetrieaxe, so wird $a_{13} = a_{23} = 0$, somit $A_1 = A_3 = 0$; die Gleichung (69) wird biquadratisch, giebt also für e Wurzeln, die paarweise entgegengesetzt gleich sind. In diesem höchst speziellen Fall braucht man, um die Grenzwinkel der totalen Reflexion zu finden, nicht auf den Wert von D zurückzugreifen, sondern gelangt kürzer durch die folgende Überlegung zum Ziel.

Wegen der erwähnten Natur der Gleichung (69) können zwei der paarweise entgegengesetzten Wurzeln für e nur gleich werden, wenn sie zugleich entweder unendlich oder Null sind. Ersteres entspricht dem senkrechten Einfall, kann also nicht streifenden Verlauf der Strahlen ergeben; es kommt also nur verschwindendes e in

Betracht. Damit die Gleichung (69) aber mit diesem Werte verträglich sei, muß A_0 verschwinden, d. h., es muß gelten

$$(a_{22} - \bar{k}^2)(a_{33} - \bar{k}^2) = 0,$$

wobei die Grenzwerte von k durch einen Strich ausgezeichnet sind; dies ergiebt die beiden Wurzeln

$$\bar{k}_1^2 = a_{22}, \quad \bar{k}_2^2 = a_{33}. \tag{70}$$

Wir wollen diese Betrachtung auf die Aufgabe anwenden, innerhalb eines isotropen Mediums den Grenzwinkel der totalen Reflexion an einem Krystall zu bestimmen, der, wie oben vorausgesetzt, so orientiert ist, daß das Einfallslot Z in eine optische Symmetrieaxe Z_0 fällt.

Setzen wir für das isotrope Medium

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,$$

für das krystallinische, indem wir die Hauptkonstanten a_1, a_2, a_3 und den Winkel Θ zwischen der Einfallsebene (X, Z) und der optischen Symmetrieebene (X_0, Z_0) einführen,

$$a_{22} = a_1 \sin^2 \Theta + a_2 \cos^2 \Theta, \quad a_{33} = a_3,$$

und berücksichtigen, daß jetzt $k^2 = a/\sin^2 \varphi$ wird, so erhalten wir für die beiden Grenzwinkel $\bar{\varphi}_1$ und $\bar{\varphi}_2$

$$\frac{a}{\sin^2 \bar{\varphi}_1} = a_1 \sin^2 \Theta + a_2 \cos^2 \Theta, \quad \frac{a}{\sin^2 \bar{\varphi}_2} = a_3. \tag{70'}$$

Dies Resultat kann man leicht auf geometrischem Wege verifizieren. Bei der vorausgesetzten Orientierung des zweiten, krystallinischen Mediums entspricht nämlich einem streifenden gebrochenen Strahl auch eine streifende gebrochene Wellennormale; es ist somit für diese, die durch den unteren Index , charakterisiert werden möge, $\varphi_{,} = \frac{1}{2}\pi$; somit lautet das Brechungsgesetz

$$\frac{a}{\sin^2 \bar{\varphi}} = \omega_{,}^2,$$

und in der Symmetrieebene (X_0, Y_0) ist $\omega_{,}^2$ nach (49) gegeben durch die Formel

$$\omega_{,}^2 = a_1 \sin^2 \Theta + a_2 \cos^2 \Theta. —$$

Die geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung an der Grenze eines isotropen und eines krystallinischen durchsichtigen Mediums bilden die theoretische Grundlage für die wichtigsten Methoden zur Bestimmung der optischen Konstanten a_1, a_2, a_3 des Krystalles für die verschiedenen Farben. Die Beobachtungen be-

nutzen entweder die Messung der Ablenkung einer ebenen Welle durch ein aus dem Krystall hergestelltes Prisma, oder diejenige der Grenzwinkel der totalen Reflexion in einem isotropen Medium an der ebenen Grenze nach einem Krystall. Für beide Methoden sind die Formeln dann relativ einfach und streng abzuleiten, wenn die Begrenzungen des Krystalles geeignet gegen seine optischen Symmetrieaxen liegen; im allgemeinen Falle müssen sie durch Annäherung gewonnen werden. Außer der Konstantenbestimmung liefern die genannten Methoden auch Prüfungen für das Fresnel'sche Gesetz (48″) der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen; dieselben sind mit einer in wenig anderen Gebieten der Physik erreichbaren Genauigkeit ausführbar und haben stets zu einer vollständigen Bestätigung der Theorie geführt.[24])

Für isotrope Medien vereinfachen sich alle Verhältnisse außerordentlich, weil hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω nur von der Farbe, aber nicht von der Richtung der Wellennormalen abhängen. Das Reflexions- und Brechungsgesetz lautet hier in sofort verständlicher Bezeichnung

71) $$\frac{\sin\varphi}{\omega} = \frac{\sin\varphi_r}{\omega} = \frac{\sin\varphi_,}{\omega_,},$$

ergiebt also

71′) $$\varphi_r = \pi - \varphi, \quad \sin\varphi : \sin\varphi_, = \omega : \omega_, = \sqrt{a} : \sqrt{a_,},$$

wobei

71″) $$\omega : \omega_, = n_{10}$$

eine der Kombination der Medien (0) und (1) und der Farbe des benutzten Lichtes individuelle Größe ist, welche als das **Brechungsverhältnis** von (1) gegen (0) bezeichnet wird.[25]) Ist das Medium (0) der leere Raum, so nennt man $n_{10} = n$, den **Brechungsindex** des Medium (1). Für zwei Medien (h) und (k) besteht offenbar die Beziehung

71‴) $$\frac{n_h}{n_k} = n_{kh}.$$

Der Grenzwinkel $\bar{\varphi}$ der totalen Reflexion entspricht hier streifendem Verlauf der gebrochenen Wellennormale, die ja in einem isotropen Medium mit dem gebrochenen Strahl zusammenfällt; indem man demgemäß $\varphi_, = \frac{1}{2}\pi$ setzt, erhält man aus (71′)

71⁗) $$\sin\bar{\varphi} = n_{10}.$$

§ 12. Die Gesetze für die Amplituden bei der partiellen Reflexion und Brechung ebener homogener Wellen an der ebenen Grenze zwischen zwei durchsichtigen Krystallen. Das erste Medium ist isotrop. Der Polarisationswinkel. Einfallendes natürliches Licht. Beide Medien sind isotrop.

Die Bedingungen für den Übergang einer Lichtbewegung durch eine zur XY-Ebene parallele Grenze zwischen zwei Medien (0) und (1) sind auf S. 579 allgemein aufgestellt. Unter Berücksichtigung des Ausdruckes (38) für die potentielle Energie φ und bei Voraussetzung ebener Wellen, deren Phase und Amplitude parallel zur Y-Axe konstant ist, nehmen sie die spezielle Gestalt an[26])

$$\left.\begin{aligned} &\overline{u}=\overline{u}_{,}\,,\quad \overline{v}=\overline{v}_{,}\,,\quad \overline{w}=\overline{w}_{,}\,,\\ &\left[a_{11}\frac{\overline{\partial v}}{\partial z}+a_{12}\left(\frac{\overline{\partial w}}{\partial x}-\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}\right)-a_{13}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x}\right]\\ =&\left[a_{11}\frac{\overline{\partial v}}{\partial z}+a_{12}\left(\frac{\overline{\partial w}}{\partial x}-\frac{\overline{\partial u}}{\partial z}\right)-a_{13}\frac{\overline{\partial v}}{\partial x}\right]_{,}. \end{aligned}\right\} \qquad 72)$$

Nun wollen wir aber noch spezieller annehmen, daß die einfallende ebene Welle homogen sei, und daß die Gesetze der Reflexion und Brechung für beide reflektierte und für beide gebrochene Wellen reelle Winkel φ der Wellennormalen gegen das Einfallslot liefern, daß die Reflexion also, wie wir sagen, eine partielle sei. Bezeichnen wir dann wieder die Amplituden der lineären Schwingungen der Polarisationsvektoren p mit K, ihre Richtungskosinus mit f, g, h, so können wir den Bedingungen (72) genügen, indem wir für jede Welle einen Ansatz von der Form machen

$$u_h = f_h p_h, \quad v_h = g_h p_h, \quad w_h = h_h p_h, \qquad 72')$$

wobei

$$f_h^2 + g_h^2 + h_h^2 = 1, \quad p_h = K_h \sin T_h, \quad T_h = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_h x + \gamma_h z}{\omega_h}\right)$$

ist, und die α_h/ω_h für alle Wellen denselben Wert besitzen. Da somit auch die Funktionen T_h an jeder Stelle der Grenze für alle durch sie hindurchgehenden Wellen den gleichen Wert haben, so haben die reflektierten und gebrochenen Wellen in dem Punkte der Grenzfläche, wo sie sich aus einer einfallenden ablösen, keine Phasendifferenz gegen jene; dieses Resultat ist für die partielle Reflexion an durchsichtigen inaktiven Medien charakteristisch und besitzt eine große Wichtigkeit.

Durch Einführung der gemachten Ansätze nehmen dann die Gleichungen (72) die Form an

$$72'')\quad \begin{cases} \sum(Kf)=\sum(Kf)_{\prime}, \quad \sum(Kg)=\sum(Kg)_{\prime}, \quad \sum(Kh)=\sum(Kh)_{\prime}, \\ \sum\left[\frac{K}{\omega}\left(g\,(a_{11}\gamma-a_{13}\alpha)-a_{12}\,(f\gamma-h\,\alpha)\right)\right] \\ =\sum\left[\frac{K}{\omega}\left(g\,(a_{11}\gamma-a_{13}\alpha)-a_{12}\,(f\gamma-h\,\alpha)\right)\right]_{\prime}, \end{cases}$$

wobei die Summen $\sum$ je über alle im Medium (0), resp. alle im Medium (1) fortschreitenden Wellen zu erstrecken sind.

Führt man hierin durch die Beziehungen (67''') die Winkel ϑ_h ein und benutzt die Proportionalität zwischen ω_h und α_h, so erhält man

$$72''')\quad \begin{cases} \sum(K\gamma\cos\vartheta)=\sum(K\gamma\cos\vartheta)_{\prime}, \\ \sum(K\sin\vartheta)\quad=\sum(K\sin\vartheta)_{\prime}, \\ \sum(K\alpha\cos\vartheta)=\sum(K\alpha\cos\vartheta)_{\prime}, \\ \sum\left[\frac{K}{\alpha}\left(\sin\vartheta\,(a_{11}\gamma-a_{13}\alpha)+a_{12}\cos\vartheta\right)\right] \\ =\sum\left[\frac{K}{\alpha}\left(\sin\vartheta\,(a_{11}\gamma-a_{13}\alpha)+a_{12}\cos\vartheta\right)\right]_{\prime}; \end{cases}$$

diese Gleichungen reichen aus zur Bestimmung der vier Amplituden der zwei reflektierten und der zwei gebrochenen Wellen, wenn man zuvor nach dem im vorigen Paragraphen Gesagten die Winkel φ_h — also α_h und γ_h — und ϑ_h für jede einzelne bestimmt hat. —

Der in Praxi bei weitem am meisten in Betracht kommende Fall ist der, daß das Medium (0) isotrop, etwa der leere oder der Luftraum ist. Indem wir uns jetzt diesem Fall zuwenden, behalten wir, wie auf S. 615, die Bezeichnungen a_{hk} ohne Index , für das zweite Medium bei und setzen für das erste

$$73)\qquad a_{11}=a_{22}=a_{33}=a\,,\quad a_{23}=a_{31}=a_{12}=0\,,\quad \omega_o=\omega_e=\omega\,.$$

Da in isotropen Medien die Geschwindigkeit ω von der Richtung unabhängig ist, so muß $\alpha=\sin\varphi$ für alle im Medium (0) verlaufenden Wellen den gleichen Wert haben, also für die reflektierten $\varphi_r=\pi-\varphi$ sein; es gilt somit, wenn wir die auf die einfallende Welle bezüglichen Richtungskosinus ohne Index führen, $\alpha_r=\alpha$, $\gamma_r=-\gamma$.

Ferner ist in isotropen Medien jede Art der Polarisation in der Wellenebene möglich, und hiermit scheint sich eine prinzipielle Verschiedenheit zwischen dem Fall isotroper und dem krystallinischer Medien anzudeuten.

Indessen können wir jede transversale Schwingung durch zwei zu einander normale lineäre Komponenten ersetzen, und wenn wir dies für die einfallende Welle thun, so läßt sich jede Komponente unabhängig von der andern als eine einfallende lineärpolarisierte Welle

im Sinne der obigen Entwicklungen behandeln. Die Polarisationsrichtungen sind willkürlich; die Symmetrie gebietet aber, für sie die beiden senkrecht und parallel zur Einfallsebene liegenden Richtungen zu wählen. Wir wollen die ihnen parallel gerechneten Amplituden mit E_s und E_p bezeichnen.

Durch diese Verfügungen wird ein isotropes Medium aufgefaßt als der Grenzfall eines optisch einaxigen Krystalles mit in das Einfallslot fallender optischer Axe bei verschwindender Differenz der Parameter $a_1 = a_2$ und a_3.

Da die reflektierte Welle gleichfalls in dem isotropen Medium verläuft, so werden wir auch ihre Schwingungen durch deren Komponenten normal und parallel zur Einfallsebene ausdrücken; die Amplituden derselben mögen mit R_s und R_p bezeichnet sein.

Für die Amplituden der beiden gebrochenen Wellen, deren Schwingungsrichtungen durch die krystallinische Natur des Medium (1) gegeben sind, führen wir die Bezeichnungen D_o und D_e ein.

Ist das einfallende Licht lineär polarisiert, so haben die beiden Komponenten q und v des Polarisationsvektors p die gleiche Phase, können also in der Form

$$q = E_p \sin T, \quad v = E_s \sin T \tag{73'}$$

geschrieben werden. In diesem Falle ist es vorteilhaft, wie bereits S. 608 angedeutet, sie auch gleichzeitig in Rechnung zu ziehen, also gewissermaßen zwei parallel einfallende Wellen vorauszusetzen.

Auf diesen speziellen Fall läßt sich der allgemeinste zurückführen, denn setzt man

$$\left.\begin{aligned} q &= E_p \sin(T-a) = E_p' \sin T + E_p'' \cos T, \\ v &= E_s \sin(T-b) = E_s' \sin T + E_s'' \cos T, \end{aligned}\right\} \tag{73''}$$

so zerlegt man dadurch die beliebige einfallende Bewegung in zwei lineäre Schwingungen von verschiedenem Azimut und verschiedener Phase; analog kann man die reflektierten und die gebrochenen Bewegungen behandeln, wobei die bezüglichen Amplituden mit R_p', R_p'', R_s', R_s'', D_o', D_o'', D_e', D_e'' bezeichnet werden mögen. Die Partialwellen (') und ('') lassen sich dann vollkommen getrennt behandeln und die für die reflektierten und für die gebrochenen Bewegungen abgeleiteten Ausdrücke schließlich zu Resultierenden zusammenzusetzen. Dabei kommt in Betracht, daß, wie

$$\left.\begin{aligned} E_p^2 &= E_p'^2 + E_p''^2, \quad \operatorname{tg} a = - E_p'' / E_p', \\ E_s^2 &= E_s'^2 + E_s''^2, \quad \operatorname{tg} b = - E_s'' / E_s', \end{aligned}\right\} \tag{73'''}$$

auch gilt

$$73'''') \quad \begin{cases} R_p^2 = R_p'^2 + R_p''^2, \ \operatorname{tg} a_r = - R_p'' / R_p', \\ R_s^2 = R_s'^2 + R_s''^2, \ \operatorname{tg} b_r = - R_s'' / R_s' \text{ u. s. f.} \end{cases}$$

Schreiben wir also die Grenzbedingungen (72''') in geänderter Reihenfolge

$$74) \quad \begin{cases} (E_p - R_p)\gamma = D_o \gamma_o \cos\vartheta_o + D_e \gamma_e \cos\vartheta_e, \\ (E_p + R_p)\alpha = D_o \alpha_o \cos\vartheta_o + D_e \alpha_e \cos\vartheta_e, \\ (E_s + R_s) \quad = D_o \sin\vartheta_o + D_e \sin\vartheta_e, \\ a(E_s - R_s)\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{D_o}{\alpha_o}\left[(a_{11}\gamma_o - a_{13}\alpha_o)\sin\vartheta_o + a_{12}\cos\vartheta_o\right] \\ \qquad + \frac{D_e}{\alpha_e}\left[(a_{11}\gamma_e - a_{13}\alpha_e)\sin\vartheta_e + a_{12}\cos\vartheta_e\right], \end{cases}$$

so gelten dieselben auch für die Amplituden E_p', E_s', ... und E_p'', E_s'' ...

Dasselbe Ziel lässt sich auch erreichen, wenn man statt der trigonometrischen Funktionen von T Exponentialgrößen mit komplexen Koeffizienten einführt und erst am Schluß der Berechnung die imaginären Teile von den Resultaten nimmt. Doch ist hier, wo in der Grenze keine Verzögerung stattfindet, der oben angegebene Weg der einfachere. —

Für die weitere Entwickelung ist es vorteilhaft, die speziellen Fälle vorauszuschicken, wo entweder

$$D_o = 1 \text{ und } D_e = 0, \text{ oder } D_e = 1 \text{ und } D_o = 0$$

ist; im ersteren Falle möge

$$74') \qquad E_s = E_s^o, \ E_p = E_p^o, \ R_s = R_s^o, \ R_p = R_p^o,$$

im letzteren

$$74'') \qquad E_s = E_s^e, \ E_p = E_p^e, \ R_s = R_s^e, \ R_p = R_p^e$$

sein, und wir können diese acht Werte als aus den letzten Formeln berechnet denken.

Diese beiden speziellen Fälle sind praktisch herstellbar und der Beobachtung zugänglich, denn das Verhältnis der Komponente normal zur Einfallsebene zu der mit jener parallelen giebt bei lineär polarisiertem Lichte die trigonometrische Tangente des Azimutes ϑ gegen die Einfallsebene.

Hieraus folgt, daß E_s^o / E_p^o resp. E_s^e / E_p^e die sogenannten uniradialen Azimute bestimmen, die dem einfallenden Lichte gegeben werden müssen, damit die Welle (e), resp. die Welle (o), im Krystall verschwindet, und daß R_s^o / R_p^o resp. R_s^e / R_p^e die gleichzeitig stattfindenden Azimute der reflektierten Welle sind; beide können mit Leichtigkeit experimentell bestimmt werden.[27])

Sind D_o und D_e nicht gleich Null oder gleich Eins, sondern von beliebiger Größe, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} E_s = E_s^o D_o + E_s^e D_e\,,\; E_p = E_p^o D_o + E_p^e D_e\,, \\ R_s = R_s^o D_o + R_s^e D_e\,,\; R_p = R_p^o D_o + R_p^e D_e\,, \end{array}\right\} \qquad 74''')$$

und man kann, wenn, wie gewöhnlich, E_s und E_p vorgeschrieben sind, D_o, D_e, R_s, R_p hieraus leicht berechnen.

Man erhält zunächst

$$D_o = \frac{E_s E_p^e - E_p E_s^e}{E_s^o E_p^e - E_p^o E_s^e}\,,\quad D_e = \frac{E_p E_s^o - E_s E_p^o}{E_s^o E_p^e - E_p^o E_s^e}\,, \qquad 75)$$

und mit Hilfe dieser Ausdrücke sogleich auch R_s und R_p; wir schreiben dafür

$$R_s = E_s \varrho_s + E_p \varrho_s'\,,\quad R_p = E_s \varrho_p' + E_p \varrho_p\,,$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} N\varrho_s = R_s^o E_p^e - R_s^e E_p^o\,,\quad N\varrho_s' = R_s^e E_s^o - R_s^o E_s^e\,, \\ N\varrho_p' = R_p^o E_p^e - R_p^e E_p^o\,,\quad N\varrho_p = R_p^e E_s^o - R_p^o E_s^e\,, \\ N = E_s^o E_p^e - E_p^o E_s^e\,. \end{array}\right\} \qquad 75')$$

Nachdem wir auf S. 529 die Intensität einer Lichtbewegung an jeder Stelle durch den Mittelwert der Energiedichte definiert haben, ergiebt sich die Intensität der einfallenden Welle

$$I = \frac{2\pi^2}{\tau^2}(E_p^2 + E_s^2)\,, \qquad 75'')$$

die der reflektierten

$$I_r = \frac{2\pi^2}{\tau^2}(R_p^2 + R_s^2) \qquad 75''')$$

und die jeder der beiden gebrochenen

$$I_o = \frac{2\pi^2}{\tau^2} D_o^2\,,\quad I_e = \frac{2\pi^2}{\tau^2} D_e^2\,. \qquad 75'''')$$

Es ist zu betonen, daß bei der von uns eingeführten Definition die Summe der reflektierten und der gebrochenen Intensitäten nicht gleich der einfallenden ist, wiewohl die nach der Grenze strömende Energie sich vollständig in den von ihr fortgehenden wiederfindet.

Die Azimute ϑ und ϑ_r der einfallenden und der reflektierten Welle sind bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{E_s^o D_o + E_s^e D_e}{E_p^o D_o + E_p^e D_e}\,,\quad \operatorname{tg}\vartheta_r = \frac{R_s^o D_o + R_s^e D_e}{R_p^o D_o + R_p^e D}\,. \qquad 76)$$

ϑ_r folgt aus ϑ, indem man aus der ersten Gleichung den Wert

von D_o/D_e bestimmt und in die zweite einsetzt. Damit ϑ_r von ϑ unabhängig sei, muß

$$R_s^o / R_p^o = R_s^e / R_p^e, \tag{76'}$$

oder, was damit äquivalent ist,

$$\varrho_s / \varrho_p' = \varrho_s' / \varrho_p \tag{76''}$$

sein; diese Bedingung bestimmt einen speziellen Werth φ' des Einfallswinkels, den man den Polarisationswinkel des Krystalles gegen das erste isotrope Medium nennt, weil natürliches Licht, unter diesem Winkel auffallend, lineär polarisiert reflektiert wird.[28]) In der That ist nach S. 547 natürliches Licht als die Superposition von zwei normal zu einander lineär polarisierten Wellen aufzufassen, deren Phasen und Amplituden sehr häufig wechseln, und da nach dem Vorstehenden jede lineär polarisierte Welle beim Auffallen unter dem Polarisationswinkel das gleiche Azimut der reflektierten lineär polarisierten liefert, so giebt die einfallende natürliche Welle reflektiertes Licht, das lineär polarisiert nach dem gleichen Azimut ϑ_r' ist, dessen Wert bestimmt wird durch

$$\operatorname{tg} \vartheta_r' = \frac{R_s^o}{R_p^o} = \frac{R_s^e}{R_p^e}. \tag{76'''}$$

Fällt natürliches Licht unter einem anderen Winkel als φ' ein, so ist das reflektierte Licht ein Gemisch von lineär polarisiertem und natürlichem. Um dies zu zeigen, stellen wir, wie S. 548, einfallendes natürliches Licht dar durch die Ansätze

$$q = F' \sin T + F'' \cos T, \quad v = G' \sin T + G'' \cos T \tag{77}$$

für die parallel und die normal zur Einfallsebene polarisierte Komponente, wobei F', F'' die Stelle von E_p' und E_p'', G' und G'' die von E_s' und E_s'' in (73''') einnehmen, dabei aber sämtlich willkürliche Funktionen der Zeit sind, die nur den Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}(F'^2 + F''^2) - \mathfrak{S}(G'^2 + G''^2) = 0, \\ &\mathfrak{S}(F'G' + F''G'') = 0, \\ &\mathfrak{S}(F'G'' - F''G') = 0, \\ &\mathfrak{S}F' = \mathfrak{S}G' = \mathfrak{S}F'' = \mathfrak{S}G'' = 0 \end{aligned}\right. \tag{77'}$$

genügen müssen. Hierin bezeichnen die $\mathfrak{S}$ die über eine gegen die Periode τ sehr lange Zeit genommenen Mittelwerte.

Die Intensität der einfallenden Welle ist dann

$$I = \mathfrak{S}(F'^2 + F''^2 + G'^2 + G''^2) = 2\,\mathfrak{S}(F'^2 + F''^2) = 2\,\mathfrak{S}F^2. \tag{77''}$$

Für die reflektierte Welle gilt

$$q_r = F_r' \sin T + F_r'' \cos T, \; v_r = G_r' \sin T + G_r'' \cos T; \qquad 77''')$$

F_r' und F_r'' stehen an der Stelle von R_p' und R_p'', G_r' und G_r'' an der Stelle von R_s' und R_s''. Demgemäß folgen aus (75') die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} F_r' = F' \varrho_p + G' \varrho_p', \quad G_r' = F' \varrho_s' + G' \varrho_s, \\ F_r'' = F'' \varrho_p + G'' \varrho_p', \quad G_r'' = F'' \varrho_s' + G'' \varrho_s. \end{array}\right\} \qquad 77'''')$$

Bildet man nun aus den F_r und G_r die für den Zustand der reflektierten Welle nach S. 550 charakteristischen Größen A, B, Γ, so erhält man unter Rücksicht auf (77')

$$\left.\begin{array}{l} A = [(\varrho_p^2 - \varrho_s'^2) + (\varrho_p'^2 - \varrho_s^2)] \mathfrak{S} F^2 \\ B = (\varrho_p \varrho_s' + \varrho_p' \varrho_s) \mathfrak{S} F^2, \quad \Gamma = 0. \end{array}\right\} \qquad 78)$$

Das Verschwinden von Γ zeigt an, daß das reflektierte Licht als ein Gemisch aus natürlichem und lineärpolarisiertem anzusehen ist.

Das Azimut Θ des beigemengten lineären Anteiles ist nach (13'') bestimmt durch

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2(\varrho_s' \varrho_p + \varrho_s \varrho_p')}{(\varrho_p^2 - \varrho_s'^2) + (\varrho_p'^2 - \varrho_s^2)}. \qquad 78')$$

Setzt man

$$\varrho_s = S \sin s, \; \varrho_p' = S \cos s, \; \varrho_s' = P \sin p, \; \varrho_p = P \cos p,$$

so bezeichnet S und P die reflektierte Gesamtamplitude, wenn die einfallende Welle die Amplitude Eins hat und resp. senkrecht oder parallel der Einfallsebene polarisiert war, s und p in beiden Fällen das Azimut der reflektierten Polarisationsebene. Mit Hilfe dieser Größen drückt sich einfacher aus

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{P^2 \sin 2p + S^2 \sin 2s}{P^2 \cos 2p + S^2 \cos 2s}; \qquad 78'')$$

für den Fall, daß der Einfallswinkel mit dem Polarisationswinkel übereinstimmt, ist nach (76'') $p = s = \Theta$.

Die Intensität I_r des ganzen reflektierten Lichtes bei einfallendem natürlichen findet sich zu

$$I_r = \tfrac{1}{2} I (\varrho_p^2 + \varrho_s'^2 + \varrho_p'^2 + \varrho_s^2), \qquad 79)$$

die Intensität $I_r^{(p)}$ der polarisierten Beimengung ist nach (13') gegeben durch

$$I_r^{(p)} = \tfrac{1}{2} I \sqrt{(\varrho_p^2 + \varrho_s'^2 + \varrho_p'^2 + \varrho_s^2)^2 - 4(\varrho_s' \varrho_p' - \varrho_p \varrho_s)^2}. \qquad 79')$$

Die Intensität der beiden gebrochenen Wellen (o) und (e), die aus einfallendem natürlichen Licht von der Intensität I entstehen,

erhält man aus den Formeln (75''''), indem man in dieselben die Ausdrücke (75) für D_o und D_e einsetzt, in diesen die Konstanten E_p und E_s einmal mit den zeitlich variierenden F', G', sodann mit den F'', G'' vertauscht, beide Resultate addiert und von der Summe den Mittelwert $\mathfrak{S}$ bildet. Man erhält so

$$79'')\quad \begin{cases} I_o = \dfrac{I}{2}\,\dfrac{E_p^{e2} + E_s^{e2}}{(E_s^o E_p^e - E_p^o E_s^e)^2}, \\[2ex] I_e = \dfrac{I}{2}\,\dfrac{E_p^{o2} + E_s^{o2}}{(E_s^o E_p^e - E_p^o E_s^e)^2}. \end{cases}$$

Für die wirkliche Anwendung dieser Resultate fehlen noch die Werte der E_p^o, E_p^e, E_s^o, E_s^e, R_p^o, R_p^e, R_s^o, R_s^e. Wir bemerken, daß dieselben nach S. 620 definiert sind durch die aus (74) folgenden zweimal vier Formeln

$$79''')\quad \begin{cases} (E_p^o - R_p^o)\,\gamma = \gamma_o \cos\vartheta_o, \\ (E_p^o + R_p^o)\,\alpha = \alpha_o \cos\vartheta_o, \\ E_s^o + R_s^o \quad = \sin\vartheta_o, \\ a\,(E_s^o - R_s^o)\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha_o}\,[(a_{11}\gamma_o - a_{13}\alpha_o)\sin\vartheta_o + a_{12}\cos\vartheta_o]; \end{cases}$$

$$79'''')\quad \begin{cases} (E_p^e - R_p^e)\,\gamma = \gamma_e \cos\vartheta_e, \\ (E_p^e + R_p^e)\,\alpha = \alpha_e \cos\vartheta_e, \\ E_s^e + R_s^e \quad = \sin\vartheta_e, \\ a\,(E_s^e - R_s^e)\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha_e}\,[(a_{11}\gamma_e - a_{13}\alpha_e)\sin\vartheta_e + a_{12}\cos\vartheta_e]; \end{cases}$$

dagegen werden wir die allgemeine Berechnung nicht vornehmen, da die Resultate infolge der komplizierten Ausdrücke für die a_{hk}, und besonders für die trigonometrischen Funktionen der Winkel φ_o, φ_e, ϑ_o, ϑ_e äußerst unübersichtlich werden und ein nur spezielles Interesse besitzen. —

Dagegen wollen wir uns noch kurz mit dem speziellsten, aber besonders wichtigen Fall beschäftigen, daß, ebenso wie das erste, auch das zweite Medium isotrop ist. Hier setzen wir für das zweite Medium

$$80)\quad \begin{cases} a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{,}, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \\ \alpha_o = \alpha_e = \alpha_{,}, \quad \gamma_o = \gamma_e = \gamma_{,}, \quad \omega_o = \omega_e = \omega_{,}, \end{cases}$$

und können die zu einander normalen Polarisationsrichtungen der

gebrochenen Wellen (*o*) und (*e*) parallel und normal zur Einfallsebene legen, also $\vartheta_o = 0$, $\vartheta_e = \frac{1}{2}\pi$ wählen, und demgemäß

$$D_o = D_p, \quad D_e = D_s \tag{80'}$$

schreiben.

Berücksichtigen wir noch die Beziehung

$$a : a_, = \omega^2 : \omega_,^2 = \alpha^2 : \alpha_,^2, \tag{80''}$$

so nehmen die Bedingungen (74) die Form an

$$\left.\begin{array}{ll} (E_p - R_p)\gamma = D_p \gamma_,, & (E_p + R_p)\alpha \;\; = D_p \alpha_,, \\ E_s + R_s \quad = D_s, & (E_s - R_s)\alpha\gamma = D_s \alpha_, \gamma_, \end{array}\right\} \tag{81}$$

und führen auf

$$\left.\begin{array}{ll} R_p = E_p \dfrac{\alpha_,\gamma - \alpha\gamma_,}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, & R_s = E_s \dfrac{\alpha\gamma - \alpha_,\gamma_,}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}, \\ D_p = E_p \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, & D_s = E_s \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}. \end{array}\right\} \tag{81'}$$

Diese Formeln enthalten die Lösung des gestellten Problemes, da aus gegebenem Einfallswinkel, und somit gegebenem α und γ, der Brechungswinkel, und somit $\alpha_,$ und $\gamma_,$, nach dem Brechungsgesetz (80'') bestimmbar ist.

Die S. 621 eingeführten Schwächungsverhältnisse der reflektierten Wellen sind hiernach gegeben durch

$$\varrho_p = \frac{\alpha_,\gamma - \alpha\gamma_,}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, \quad \varrho_s = \frac{\alpha\gamma - \alpha_,\gamma_,}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}; \tag{81''}$$

diesen Werten können wir, als auf die gebrochenen Wellen bezüglich, anschließen

$$\delta_p = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, \quad \delta_s = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}. \tag{81'''}$$

Bei Sätzen, die für beide Komponenten Geltung haben, sollen weiterhin diese Größen stets kurz durch ϱ und δ ohne Index bezeichnet werden.

Führen wir durch die Formeln

$$\alpha = \sin\varphi, \quad \gamma = \cos\varphi, \quad \alpha_, = \sin\varphi_,, \quad \gamma_, = \cos\varphi_,$$

den Einfallswinkel φ und den Brechungswinkel $\varphi_,$ ein, so nehmen die Resultate (81') die Form an[29])

$$\left.\begin{array}{ll} R_p = -\, E_p \dfrac{\sin(\varphi - \varphi_,)}{\sin(\varphi + \varphi_,)}, & R_s = +\, E_s \dfrac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_,)}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_,)}, \\ D_p = E_p \dfrac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_,)}, & D_s = E_s \dfrac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_,)\cos(\varphi - \varphi_,)}. \end{array}\right\} \tag{82}$$

Wir bemerken beiläufig, daß, wenn der Übergang, statt von (0)

nach (1), von (1) nach (0), und zwar unter dem Einfallswinkel $\varphi_{,}$ stattfindet, die Ausdrücke für die reflektierten Wellen nur ihr Vorzeichen wechseln, was wir durch die Formel

82′) $$\varrho' = -\varrho$$

ausdrücken wollen. Dagegen erleiden die durchgehenden Wellen quantitativ abweichende Schwächungen, gegeben durch

82″) $$\left\{\begin{aligned} \delta_p' &= \frac{2\alpha_{,}\gamma_{,}}{\alpha\gamma_{,}+\alpha\gamma_{,}} = \frac{\sin 2\varphi_{,}}{\sin(\varphi+\varphi_{,})}, \\ \delta_s' &= \frac{2\alpha_{,}\gamma_{,}}{\alpha\gamma+\alpha_{,}\gamma_{,}} = \frac{\sin 2\varphi_{,}}{\sin(\varphi+\varphi_{,})\cos(\varphi-\varphi_{,})}; \end{aligned}\right.$$

es gilt somit für beide Wellen

82‴) $$1-\varrho^2 = 1-\varrho'^2 = \delta\,\delta'.$$

Was die Intensitäten der einzelnen Wellen angeht, so können dieselben für jede Komponente für sich gebildet werden und sind nach S. 586 das $2\pi^2/\tau^2$-fache der Amplitudenquadrate. —

Die erhaltenen Formeln (81) sondern die Komponenten parallel der Einfallsebene vollständig von denen normal dazu, beide sind also, wie dies schon die Symmetrieverhältnisse erkennen lassen, von einander ganz unabhängig. Es kann demnach jetzt auch die Bewegung in der einfallenden Welle ganz beliebig vorgeschrieben, ihren Schwingungskomponenten also eine beliebige Phasendifferenz erteilt werden. Da bei der partiellen Reflexion und Brechung nach S. 617 eine Phasenänderung nicht stattfindet, so besitzen die beiden reflektierten Komponenten einerseits, die beiden gebrochenen andererseits dieselbe Phasendifferenz, wie die beiden einfallenden.

Der wichtigste Fall ist der, daß diese Phasendifferenz **verschwindet**, daß also die einfallende, und somit auch die reflektierte und die gebrochene Welle lineär polarisiert ist.

Definiert man die Azimute ϑ, ϑ_r, ϑ_d ihrer Polarisationsrichtungen durch die Formeln

83) $$\frac{E_s}{E_p} = \operatorname{tg}\vartheta,\quad \frac{R_s}{R_p} = \operatorname{tg}\vartheta_r,\quad \frac{D_s}{D_p} = \operatorname{tg}\vartheta_d,$$

so folgt

83′) $$\operatorname{tg}\vartheta_r = -\frac{\cos(\varphi+\varphi_{,})}{\cos(\varphi-\varphi_{,})}\operatorname{tg}\vartheta,\quad \operatorname{tg}\vartheta_d = \frac{1}{\cos(\varphi-\varphi_{,})}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Die zweite Formel ergiebt, daß bei einer **Brechung** die Drehung der Polarisationsrichtung stets nach der Normalen auf der Einfallsebene hin geschieht, diese extreme Lage, für welche also $\vartheta_d = \frac{1}{2}\pi$ sein müßte, aber bei einmaliger Brechung nicht erreicht wird.

Die erste Formel zeigt, daß durch eine Reflexion die wie oben definierte Polarisationsrichtung stets nach der Einfallsebene hin gedreht wird, und zwar beim Einfallswinkel $\varphi = 0$ über dieselbe hinaus in die symmetrische Position $\vartheta_r = -\vartheta$, bei dem Einfallswinkel $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \varphi_,$ in die Einfallsebene selbst, da hier $\vartheta_r = 0$ wird; bei streifendem Einfall $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ verschwindet die Drehung, es ergiebt sich $\vartheta_r = \vartheta$.

Um diese Resultate richtig aufzufassen, hat man zu bedenken, daß durch die Verfügungen, die durch (67‴) über den Winkel ϑ getroffen sind, die Amplituden in allen drei Wellen in demselben Sinne positiv gezählt werden, nämlich so, daß die mit p bezeichnete (z. B. E_p) zu der mit s bezeichneten (z. B. E_s) zu der bezüglichen Wellennormale r ebenso liegt, wie X zu Y zu Z. Hieraus folgt auch der Sinn, in welchem die Azimute ϑ, ϑ_r, ϑ_d positiv gerechnet sind, und man erkennt leicht, daß ϑ und ϑ_r bei streifendem Einfall gegen das feste Koordinatensystem in gleicher, bei normalem aber in entgegengesetzter Richtung positiv gezählt werden. Beachtet man dies, so zeigt die erste Formel (83′), daß bei normalem und bei streifendem Einfall eine Reflexion die Polarisationsebene des Lichtes, absolut betrachtet, nicht dreht.

Bei dem speziellen Einfallswinkel φ', der durch die Beziehung

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi'_, \tag{83''}$$

charakerisiert ist, bei dem also der gebrochene Strahl normal zum reflektierten steht, fand sich $\vartheta_r = 0$, die Drehung der Polarisationsrichtung also immer bis in die Einfallsebene geschehend, unabhängig von dem Azimut der einfallenden Polarisationsrichtung. Da die erste Beziehung (83′) zeigt, daß dieser Winkel der einzige ist, der jene Eigenschaft hat, so werden wir ihn in Übereinstimmung mit der Festsetzung auf S. 622 als den Polarisationswinkel des isotropen Medium (0) gegen (1) bezeichnen. Berücksichtigen wir die Beziehung

$$\omega : \omega_, = \sin\varphi : \sin\varphi_, = n_{10}\,,$$

so erhalten wir

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\omega}{\omega_,} = n_{10}, \quad \operatorname{tg}\varphi'_, = \frac{\omega_,}{\omega} = n_{01}\,, \tag{83'''}$$

woraus sich ergiebt, daß der φ' zugehörige Brechungswinkel $\varphi'_,$ zugleich den Polarisationswinkel des Medium (1) gegen (0) darstellt.[30]) —

Fällt natürliches Licht unter dem Polarisationswinkel auf die Grenze (0, 1) auf, so ist das reflektierte stets lineär polarisiert, in unserem Falle zweier isotroper Medien speziell nach der Einfallsebene. Ist der Einfallswinkel nicht der Polarisationswinkel, so ist

das reflektierte Licht als ein Gemisch von natürlichem und linear polarisiertem aufzufassen. Das Azimut Θ des linearen Anteiles folgt aus (78') stets gleich Null, seine Intensität findet sich nach (79')

84) $$I_r^{(p)} = \tfrac{1}{2} I(\varrho_p^2 - \varrho_s^2),$$

während für die ganze reflektierte Intensität gilt

84') $$I_r = \tfrac{1}{2} I(\varrho_p^2 + \varrho_s^2);$$

das Verhältnis beider ist somit

$$\frac{I_r^{(p)}}{I_r} = \frac{\varrho_p^2 - \varrho_s^2}{\varrho_p^2 + \varrho_s^2}.$$

Da bei isotropen Medien die gebrochene Welle sich ebenso behandeln läßt, wie die reflektierte, so können wir ohne weiteres folgern, daß sie bei einfallendem natürlichen Licht ein Gemisch von natürlichem und senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem enthalten wird, und daß die Intensität des linearen Anteiles gegeben ist durch

84'') $$I_d^{(s)} = \tfrac{1}{2} I(\delta_s^2 - \delta_p^2),$$

während für die ganze gebrochene Intensität gilt

84''') $$I_d = \tfrac{1}{2} I(\delta_s^2 + \delta_p^2),$$

also für das Verhältnis

$$\frac{I_d^{(s)}}{I_d} = \frac{\delta_s^2 - \delta_p^2}{\delta_s^2 + \delta_p^2}. —$$

Wenn die Reflexion an der Grenze derselben beiden Medien unter immer dem gleichen Einfallswinkel mehrfach wiederholt wird, so werden die Komponenten parallel und normal zur Einfallsebene jedes Mal in denselben Verhältnissen $\varrho_p : 1$ und $\varrho_s : 1$ geschwächt; man erhält also bei m-facher Reflexion

$$(R_p)_m = E_p \varrho_p^m, \quad (R_s)_m = E_s \varrho_s^m.$$

Die Brechung kann naturgemäß nicht zweimal in gleicher Weise wiederholt werden, sondern auf den Übergang in der Richtung (0) → (1) kann zunächst nur der in der Richtung (1) → (0) folgen. Geschieht derselbe so, daß im zweiten Falle φ_1 der Einfallswinkel ist, so gilt für die resultierenden Amplituden

$$(D_p)_2 = E_p \delta_p \delta_p', \quad (D_s)_2 = E_s \delta_s \delta_s',$$

und bei m-facher Wiederholung dieses Vorganges erhält man

$$(D_p)_{2m} = E_p \delta_p^m \delta_p'^m, \quad (D_s)_{2m} = E_s \delta_s^m \delta_s'^m.$$

Wiederholte Brechungen der vorausgesetzten Art treten stets an den Begrenzungen planparalleler Platten ein, auch an denen von Prismen, wenn die Wellennormale im Innern die gleichen Winkel mit den Loten auf den Grenzflächen einschließt, also die austretende — wie leicht zu zeigen — den kleinstmöglichen Winkel mit der einfallenden einschließt.

Die Drehung der Polarisationsebene einfallenden lineär-polarisierten Lichtes durch wiederholte Reflexion und Brechung läßt sich nach diesen Formeln in der oben angegebenen Weise leicht bestimmen; gleiches gilt von der polarisierenden Wirkung, die wiederholte Reflexion oder Brechung auf einfallendes natürliches Licht ausübt. Von den auf die letztere bezüglichen Resultaten sei nur das eine hervorgehoben, daß ein System paralleler planer Platten aus isotroper durchsichtiger Substanz natürliches, unter dem Polarisationswinkel auffallendes Licht nahe zur Hälfte als nach der Einfallsebene polarisiert reflektiert, zur Hälfte als normal dazu polarisiert durchläßt, und dies um so genauer, je größer die Zahl der Platten des Systemes ist. Hierauf beruht die Anwendung der Plattensätze zur Herstellung von polarisiertem Licht aus natürlichem, und ihr Vorzug vor der einfachen Reflexion unter dem Polarisationswinkel, welche zu gleichem Zwecke brauchbar ist, aber nur einen kleinen Bruchteil des einfallenden Lichtes in polarisiertes verwandelt.

§ 13. Die Fortpflanzung ebener inhomogener Wellen in durchsichtigen Krystallen. Die geometrischen Gesetze der totalen Reflexion an der Grenze zweier isotroper Medien.

Die partikulären Lösungen für die Komponenten der Schwingungsvektoren, welche inhomogenen ebenen Wellen entsprechen, haben nach S. 557 die Form des reellen oder des imaginären Theiles von

$$\mathfrak{P}\, e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right)},$$

worin $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}y + \mathfrak{c}z$ ist, und alle durch deutsche Lettern ausgedrückten Größen komplex sind. Wegen der lineären Form aller Gleichungen kann man aber direkt mit den komplexen Funktionen rechnen.

Setzt man wie a. a. O.

$$\mathfrak{r} = r - i\varkappa r',$$

wobei

$$r = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad r' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$

und

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

ist, so haben r und r' die Bedeutung der Normalen auf den Ebenen konstanter Phase und konstanter Amplitude.

Wir wollen nun wiederum mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ komplexe Größen bezeichnen, deren reelle oder imaginäre Teile Lösungen für die Komponenten u, v, w und ξ, η, ζ der Schwingungsvektoren p und d geben, und können dann die in § 9 bis 12 aufgestellten Hauptgleichungen und Grenzbedingungen durch bloße Vertauschung der Bezeichnungen u, v, w, ξ, η, ζ mit $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ für diese komplexen Lösungen bilden.

Speciell erhalten wir statt der Gleichungen (45') als Ausgangspunkt für das Folgende

$$85)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}'' = a_2 \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - a_3 \dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\,, \ \mathfrak{v}'' = a_3 \dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - a_1 \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}\,, \ \mathfrak{w}'' = a_1 \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - a_2 \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\,, \\ \mathfrak{x} = \dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}\,, \ \mathfrak{y} = \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}\,, \ \mathfrak{z} = \dfrac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}\,, \end{cases}$$

aus denen wegen der Voraussetzung periodischer Schwingungen folgt

$$85')\qquad \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0\,.$$

Zur Integration setzen wir

$$85'')\qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{p},\quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{p},\quad \mathfrak{w} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{p},$$

wobei

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 = 1\,,\quad \mathfrak{p} = \mathfrak{K}\, e^{i\mathfrak{T}},\quad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right);$$

$\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sind dann die Richtungskosinus des komplexen Vektors $\mathfrak{p}$, der im allgemeinen elliptische und nicht transversale Schwingungen ausführt.

Für die nächsten Zwecke schreiben wir aber besser

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{o}}\right),$$

worin

$$85''')\quad \begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z,\quad \mathfrak{o}^2 = \dfrac{\omega^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}\,, \\ \mathfrak{A}^2 = \dfrac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}\,,\ \mathfrak{B}^2 = \dfrac{\mathfrak{b}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}\,,\ \mathfrak{C}^2 = \dfrac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2} \end{cases}$$

ist; es gilt also

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = 1,$$

und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind die Richtungskosinus des komplexen Vektors $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{o}$ kann dabei als eine komplexe Fortpflanzungsgeschwindigkeit aufgefaßt werden.

Es wird dann weiter

86) $\mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}(\mathfrak{H}\mathfrak{B} - \mathfrak{G}\mathfrak{C}),\ \mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}(\mathfrak{F}\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\mathfrak{A}),\ \mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}}(\mathfrak{G}\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\mathfrak{B}),$

und es stellt

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}\mathfrak{B} - \mathfrak{G}\mathfrak{C},\ \mathfrak{M} = \mathfrak{F}\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\mathfrak{A},\ \mathfrak{N} = \mathfrak{G}\mathfrak{A} - \mathfrak{F}\mathfrak{B} \tag{86'}$$

das System der Richtungscosinus des komplexen Vektors

$$\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{o}} \tag{86''}$$

dar; denn da aus der ersten Gleichung (85') folgt:

$$\mathfrak{F}\mathfrak{A} + \mathfrak{G}\mathfrak{L} + \mathfrak{H}\mathfrak{C} = 0, \tag{86'''}$$

so gilt auch $\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 1$.

Ferner hat man nach (86') die Beziehungen

$$\mathfrak{A}\mathfrak{L} + \mathfrak{B}\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\mathfrak{N} = 0,\quad \mathfrak{F}\mathfrak{L} + \mathfrak{G}\mathfrak{M} + \mathfrak{H}\mathfrak{N} = 0; \tag{86''''}$$

die komplexen Vektoren $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d}$ bilden somit ein orthogonales System.

Die Benutzung dieser Resultate ergiebt nun aus (85) sofort

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{o}^2\mathfrak{F} &= a_2\,\mathfrak{M}\mathfrak{C} - a_3\,\mathfrak{N}\mathfrak{B},\\ \mathfrak{o}^2\mathfrak{G} &= a_3\,\mathfrak{N}\mathfrak{A} - a_1\,\mathfrak{L}\mathfrak{C},\\ \mathfrak{o}^2\mathfrak{H} &= a_1\,\mathfrak{L}\mathfrak{B} - a_2\,\mathfrak{M}\mathfrak{A}; \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

bei Zusammenfassung mit den Faktoren $0, -\mathfrak{C}, \mathfrak{B}$; $\mathfrak{C}, 0, -\mathfrak{A}$; $-\mathfrak{B}, \mathfrak{A}, 0$ folgt hieraus

$$(a_1 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{L} = \mathfrak{D}\mathfrak{A},\ (a_2 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\mathfrak{B},\ (a_3 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{N} = \mathfrak{D}\mathfrak{C}, \tag{87'}$$

wobei kurz

$$a_1\,\mathfrak{A}\mathfrak{L} + a_2\,\mathfrak{B}\mathfrak{M} + a_3\,\mathfrak{C}\mathfrak{N} = \mathfrak{D} \tag{87''}$$

gesetzt ist.

Endlich liefern die Formeln (87') mit den Faktoren $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$; $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$; $\mathfrak{A}/(a_1 - \mathfrak{o}^2)$, $\mathfrak{B}/(a_2 - \mathfrak{o}^2)$, $\mathfrak{C}/(a_3 - \mathfrak{o}^2)$ zusammengefaßt die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= a_1\,\mathfrak{L}\mathfrak{F} + a_2\,\mathfrak{M}\mathfrak{G} + a_3\,\mathfrak{N}\mathfrak{H},\\ \mathfrak{o}^2 &= a_1\,\mathfrak{L}^2 + a_2\,\mathfrak{M}^2 + a_3\,\mathfrak{N}^2,\\ 0 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{a_1 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\mathfrak{B}^2}{a_2 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\mathfrak{C}^2}{a_3 - \mathfrak{o}^2}; \end{aligned}\right\} \tag{87'''}$$

von ihnen spricht die erste einen Satz über die Richtungskosinus der komplexen Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d}$ aus; die zweite bestimmt die Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$ durch die Richtung des Vektors $\mathfrak{d}$, die dritte durch diejenige des Vektors $\mathfrak{R}$, dem $\mathfrak{o}$ parallel gedacht werden kann.

Alle diese Formeln entsprechen genau den im Anfang von § 9 für homogene ebene Wellen abgeleiteten und gestatten dieselbe weitere analytische Behandlung, wobei allerdings die erhaltenen Resultate ihrer durchweg komplexen Natur wegen nicht derartig

einfach geometrisch interpretiert werden können, wie das bei den früheren der Fall war; doch ist in betreff der Deutung der komplexen Richtungscosinus von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{d}$ auf das S. 559 Gesagte zu verweisen.

Wegen des immerhin geringeren Interesses dieser Resultate genüge hier eine an die letzte Formel (87‴) angeknüpfte Bemerkung.

Schreibt man eine Richtung $\mathfrak{R}$, also ein System $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vor, so ergiebt diese Gleichung zwei zugehörige Werte von $\mathfrak{o}^2$, die man je nach ihrem Verhalten bei verschwindender Inhomogenität als $\mathfrak{o}_o^2$ und $\mathfrak{o}_e^2$ bezeichnen kann; da nun nach den betr. Definitionen gilt

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{o}} = \frac{\mathfrak{a}}{\omega} = \frac{\alpha - i\varkappa\alpha'}{\omega}, \ldots\ldots$$

so ist bei gegebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{o}$ auch

$$\frac{\alpha}{\omega},\ \frac{\beta}{\omega},\ \frac{\gamma}{\omega},\ \frac{\varkappa\alpha'}{\omega},\ \frac{\varkappa\beta'}{\omega},\ \frac{\varkappa\gamma'}{\omega}$$

bestimmt. Wegen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,,\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$$

ergeben dann die letzteren Werte auch $1/\omega$, $\varkappa/\omega$ und die α, β, γ, α', β', γ' selbst. Außerdem erhält man direkt durch

$$\frac{1}{\mathfrak{o}^2} = \frac{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2}{\omega^2} = \frac{1 - \varkappa^2}{\omega^2} - \frac{2i\varkappa}{\omega^2}(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')$$

die Werte der Kombinationen $(1 - \varkappa^2)/\omega^2$ und $2\varkappa\cos(r, r')/\omega^2$. —

Für isotrope Medien vereinfachen sich die Resultate außerordentlich.

Setzen wir wieder $a_1 = a_2 = a_3 = a$, so findet sich

88) $$\mathfrak{o}^2 = a,$$

also

88′) $$\frac{1 - \varkappa^2}{\omega^2} = \frac{1}{a},\ \frac{2\varkappa}{\omega^2}\cos(r, r') = 0\,,$$

wobei, da $\varkappa$ als von Null verschieden angenommen ist, die zweite Gleichung auf

88″) $$\cos(r, r') = 0$$

führt. Hier müssen also ebenso, wie S. 560 für den leeren Raum gefunden ist, die beiden Normalen r und r' senkrecht zu einander stehen; $\varkappa$ bleibt willkürlich und bestimmt die Geschwindigkeit ω durch

88‴) $$\omega^2 = a(1 - \varkappa^2)$$

als von derjenigen homogener Wellen verschieden. Daß $\varkappa$ nicht größer als Eins werden darf, ohne den Charakter des Vorgangs wesentlich zu ändern, ist S. 560 auseinandergesetzt. —

Um zu Beziehungen zu gelangen, welche die Grundlage für die Theorie der Reflexion und der Brechung inhomogener ebener Wellen bilden können, betrachten wir nunmehr speziell eine Welle, deren beide Normalen r und r' in der, übrigens beliebigen, XZ-Ebene liegen. Dann ist $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ von y unabhängig, und die Hauptgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}'' &= \frac{\partial}{\partial z}(a_{21}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} + a_{23}\mathfrak{z}), \\ \mathfrak{v}'' &= \frac{\partial}{\partial x}(a_{31}\mathfrak{x} + a_{32}\mathfrak{y} + a_{33}\mathfrak{z}) - \frac{\partial}{\partial z}(a_{11}\mathfrak{x} + a_{12}\mathfrak{y} + a_{13}\mathfrak{z}), \\ \mathfrak{w}'' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - \frac{\partial}{\partial x}(a_{21}\mathfrak{x} + a_{22}\mathfrak{y} + a_{23}\mathfrak{z}), \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

wobei

$$\mathfrak{x} = -\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} \tag{89'}$$

ist. Die letzte der Gleichungen (89) kann dabei auch durch

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0 \tag{89''}$$

ersetzt werden.

Wir behalten die Ansätze (85'') bei, haben aber speziell $\mathfrak{b} = 0$, also $\mathfrak{B} = 0$ und $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}x + \mathfrak{C}z$, wobei $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 = 1$ ist.

Die Gleichung (89'') wird sonach zu

$$\mathfrak{F}\mathfrak{A} + \mathfrak{H}\mathfrak{C} = 0, \tag{90}$$

und bei ihrer Benutzung liefern die beiden ersten Gleichungen (89)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{F}(\mathfrak{o}^2 - a_{22}) &= \mathfrak{G}\mathfrak{C}(a_{23}\mathfrak{A} - a_{12}\mathfrak{C}), \\ \mathfrak{G}\mathfrak{C}(\mathfrak{o}^2 - a_{11}\mathfrak{C}^2 - a_{33}\mathfrak{A}^2 + 2a_{31}\mathfrak{A}\mathfrak{C}) &= \mathfrak{F}(a_{23}\mathfrak{A} - a_{12}\mathfrak{C}). \end{aligned}\right\} \tag{90'}$$

Hieraus können wir $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ eliminieren und gelangen dadurch zu der Gleichung

$$(\mathfrak{o}^2 - a_{22})(\mathfrak{o}^2 - a_{11}\mathfrak{C}^2 - a_{33}\mathfrak{A}^2 + 2a_{31}\mathfrak{A}\mathfrak{C}) = (a_{23}\mathfrak{A} - a_{12}\mathfrak{C})^2, \tag{90''}$$

die bei gegebener Richtung $\mathfrak{R}$, und somit gegebenem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ die zwei ihr zugehörigen Werte von $\mathfrak{o}^2$ bestimmt. Setzt man sie in eine der Formeln (90') ein, so erhält man die ihnen entsprechenden Werte $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$, und hieraus mit Hilfe der Beziehungen

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}\mathfrak{A} + \mathfrak{H}\mathfrak{C} = 0$$

auch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ selbst, d. h. die Richtung des komplexen Vektors $\mathfrak{p}$.

Um eine kurze Darstellung zu erhalten, führen wir einen komplexen Winkel $\mathfrak{d}$ ein und setzen

$$\mathfrak{F} = -\mathfrak{C}\cos\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{G} = \sin\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{A}\cos\mathfrak{d}; \tag{90'''}$$

dann giebt die erste Gleichung (90')

$$\operatorname{tg}\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}^2 - a_{22}}{a_{12}\mathfrak{C} - a_{23}\mathfrak{A}}. \tag{90''''}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die *XY*-Ebene wieder die Grenze zwischen dem betrachteten Krystall (1) und einem beliebigen anderen Medium (0) ist, und daß im Krystall inhomogene Wellen, deren Amplituden längs der *Y*-Axe konstant sind, durch eine inhomogene im Medium (0) erregt werden. Es verlangen dann die Grenzbedingungen, daß für $z = 0$ die von x und t abhängigen Faktoren in den Komponenten des Polarisationsvektors gleich werden; dies hat zur Folge, daß die $\mathfrak{a}/\omega$ resp. $\mathfrak{A}/\mathfrak{o}$ in allen Wellen den gleichen, als gegeben zu betrachtenden Wert annehmen, eine Beziehung, die wir wieder kurz als das Grundgesetz der Reflexion und der Brechung ebener inhomogener Wellen bezeichnen wollen.

Dividieren wir nun die Gleichung (90'') durch $\mathfrak{A}^4$, setzen wir $\mathfrak{C}/\mathfrak{A} = \mathfrak{c}$ und den vorgeschriebenen Wert $\mathfrak{a}/\omega = \mathfrak{A}/\mathfrak{o} = 1/\mathfrak{k}$, so ergiebt sie

$$91)\quad (a_{11}\mathfrak{c}^2 - 2\,a_{13}\mathfrak{c} + a_{33} - \mathfrak{k}^2)(a_{22}\mathfrak{c}^2 + a_{22} - \mathfrak{k}^2) = (a_{12}\mathfrak{c} - a_{23})^2(1 + \mathfrak{c}^2),$$

während die Gleichung (90'''') liefert

$$91')\qquad \operatorname{tg}\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{k}^2 - a_{22} - a_{22}\mathfrak{c}^2}{(a_{12}\mathfrak{c} - a_{23})\sqrt{1 + \mathfrak{c}^2}}.$$

Bildet man diese Formeln für das erste und das zweite Medium, so geben sie durch $\mathfrak{c}$ die Richtung der reflektierten und der gebrochenen komplexen Wellennormalen $\mathfrak{N}$, durch $\mathfrak{d}$ die Richtung des komplexen Polarisationsvektors $\mathfrak{p}$. Die erste von ihnen ist vierten Grades, würde also bei Anwendungen stets durch Annäherung zu lösen sein; die Auswahl der für das Problem bedeutungsvollen Wurzeln hat dabei nach ähnlichen Gesichtspunkten zu geschehen, wie S. 608 u. f. im analogen Falle. Allerdings verliert bei inhomogenen Wellen der Strahl seine geometrische Bedeutung, wie denn bei einem von mehr Argumenten, als der Richtung der Normalen r abhängenden Vorgang weder eine Normalen-, noch eine Strahlenfläche existiert; aber die Richtung der sie begleitenden Energieströmung wird jederzeit den Charakter einer Welle unzweideutig ausdrücken, selbst wenn, wie in unserem Falle, diese Richtung keine zeitlich konstante ist, sondern nur um eine solche oscilliert. Übrigens kann man häufig auch ohne Zuhilfenahme dieses umständlichen Kriteriums die Art der verschiedenen Wellen feststellen. —

Praktisches Interesse bietet vor allem der Fall, wo die einfallende ebene Welle homogen, aber der Einfallswinkel φ so groß ist, und die Konstanten beider Medien in solchen Verhältnissen stehen, daß nach dem Brechungsgesetz homogene Wellen im zweiten Medium nicht entstehen können. Diese Fälle nennt man aus später zu erörternden Gründen die Fälle totaler Reflexion.

Hier ist für die einfallende Welle $\varkappa = 0$, also wie für sie, so für alle aus ihr entstehenden Wellen $\mathfrak{a}/\omega = \mathfrak{A}/\mathfrak{o} = 1/\mathfrak{k}$ reell; demgemäß verlangt das Brechungsgesetz für das zweite Medium, da dort $\varkappa$ nicht verschwinden kann, weil sonst homogene Wellen einträten, $\alpha' = 0$, $\gamma' = \pm 1$; in Bezug auf γ' kann man sich dabei auf das obere Vorzeichen beschränken, wenn man zugleich festsetzt, daß für $\varkappa$ nur positive Wurzeln gewählt werden sollen, denn es ist von vornherein, ohne auf die Untersuchung des Energiestromes einzugehen, einleuchtend, daß in dem vorliegenden Falle die im zweiten Medium erregte Bewegung nicht mit wachsendem Abstand von der Grenzfläche unendlich zunehmen darf.

Sonach ergeben sich aus dem vorgeschriebenen $\mathfrak{k}$ für das zweite Medium mit Hilfe von (91) die Wurzeln für $\mathfrak{e} = (\gamma_, - i\varkappa_,)/\alpha_,$, und aus ihnen folgen dann die $\gamma_,/\alpha_,$ und $\varkappa_,/\alpha_,$ selbst, wobei zu beachten, daß wegen des Brechungsgesetzes für alle Wellen $\alpha_, > 0$ sein muß, wenn gleiches für die einfallende Welle gilt. Hierdurch ist dann die Entscheidung über die als gebrochene Wellen anzusehenden auf einfache Weise getroffen.

Liegt zum Beispiel die Y-Axe in einer Symmetrieaxe des Medium (1), und ist demgemäß für dasselbe $a_{23} = a_{12} = 0$, so liefert die Gleichung (91) die beiden Wurzeln für $\mathfrak{e}$ gesondert, denn sie zerfällt in

$$\left.\begin{array}{l} a_{22}\,\mathfrak{e}_1^2 + a_{22} - \mathfrak{k}^2 = 0, \\ a_{11}\,\mathfrak{e}_2^2 - 2\,a_{13}\,\mathfrak{e}_2 + a_{33} - \mathfrak{k}^2 = 0\,; \end{array}\right\} \qquad 91'')$$

es gilt somit

$$\mathfrak{e}_1 = \pm\sqrt{\frac{\mathfrak{k}^2 - a_{22}}{a_{22}}}, \quad \mathfrak{e}_2 = \frac{a_{13}}{a_{11}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{k}^2 - a_{33}}{a_{11}} + \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2}. \qquad 91''')$$

Für die vorausgesetzte totale Reflexion müssen die Wurzelgrößen imaginär sein, wir schreiben somit kurz

$$\mathfrak{e}_1 = \pm i R_1, \quad \mathfrak{e}_2 = P_2 \pm i R_2,$$

und, indem wir die Vorzeichen nach dem eben Gesagten auswählen,

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = 0, \quad \frac{\varkappa_1}{\alpha_1} = R_1, \quad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = P_2, \quad \frac{\varkappa_2}{\alpha_2} = R_2. - \qquad 91'''')$$

Wenden wir uns speziell zu dem Falle zweier isotroper Medien, so tritt nach S. 616 die hier vorausgesetzte totale Reflexion dann ein, wenn die Gleichung $\alpha^2/a = \alpha_,^2/a_,$ ein $\alpha_, > 1$, also einen komplexen Brechungswinkel ergeben würde. Es gewinnt dann das Brechungsgesetz die neue Form

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{\mathfrak{A}_,^2}{\mathfrak{o}_,^2} = \frac{\mathfrak{a}_,^2}{\omega_,^2} = \frac{\alpha_,^2}{a_,(1 - \varkappa_,^2)}\,;$$

da aber nach (88″)

$$\alpha_{,}\alpha'_{,} + \gamma_{,}\gamma'_{,} = 0$$

sein muß, und $\alpha'_{,} = 0$, $\gamma'_{,} = 1$ ist, so ergiebt sich $\gamma_{,} = 0$, $\alpha_{,} = 1$, somit

92) $$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{1}{a_{,}(1-\varkappa_{,}^2)}, \quad \varkappa_{,} = \sqrt{1 - \frac{a}{a_{,}\alpha^2}}$$

und

92′) $$\mathfrak{A}_{,} = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa_{,}^2}} = \sqrt{\frac{a_{,}\alpha^2}{a}}, \quad \mathfrak{C}_{,} = -\frac{i\varkappa_{,}}{\sqrt{1-\varkappa_{,}^2}} = -i\sqrt{\frac{a_{,}\alpha^2}{a} - 1}\,.$$

Hiernach erhält der Polarisationsvektor im zweiten Medium die Form

92″) $$\mathfrak{p}_{,} = \mathfrak{K}_{,}e^{i\mathfrak{T}_{,}}, \quad \mathfrak{T}_{,} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x - i\varkappa_{,}z}{\omega_{,}}\right),$$

wobei $\omega_{,}^2 = a_{,}(1-\varkappa_{,}^2)$; es ist also nicht nur, wie in allen Fällen totaler Reflexion, die Normale r' senkrecht zur Grenze, sondern außerdem auch, was bei krystallinischen Medien im allgemeinen nicht stattfindet, speziell die Normale r parallel der Grenze gelegen.

Geht man von der komplexen zu der reellen Form über, so erhält man für den Polarisationsvektor in verständlicher Bezeichnung

$$p = Pe^{\frac{-2\pi\varkappa_{,}z}{\tau\omega_{,}}} \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{\omega_{,}} + t_0\right);$$

für die Abnahme der Amplitude in der Richtung normal zur Grenze ist der Exponent

$$\frac{2\pi\varkappa_{,}z}{\tau\omega_{,}} = \frac{2\pi\varkappa_{,}z}{\tau\sqrt{a_{,}(1-\varkappa_{,}^2)}} = \frac{2\pi z}{\tau\sqrt{a_{,}}}\sqrt{\frac{a_{,}\alpha^2}{a} - 1}$$

maßgebend, in dem $\tau\sqrt{a_{,}} = \lambda$ die Wellenlänge bezeichnet, die im zweiten Medium ebenen homogenen Wellen entspricht. Die Wurzelgröße verschwindet für den Grenzwinkel, wo nach S. 616 $\alpha^2 = \bar{\alpha}^2 = a/a_{,}$ ist, und nimmt ihren größten Wert bei streifendem Einfall an, wo $\alpha = 1$. Schon bei Werten α, die $\bar{\alpha}$ nur wenig übertreffen, ist die Abnahme der Amplituden mit wachsendem Abstand von der Grenze außerordentlich stark, und demgemäß die in das zweite Medium eingedrungene Bewegung in bequem der Beobachtung zugänglichen Entfernungen unmerklich.[31]) —

Ein zweiter sehr interessanter Fall ist der, daß aus einer einfallenden inhomogenen Welle eine gebrochene homogene entsteht. Derselbe tritt an einer Zwischengrenze (1, 2) immer dann ein, wenn die dort einfallende inhomogene Welle ihrerseits durch Brechung an einer zur Grenze (1, 2) parallelen Fläche (0, 1) aus einer einfallenden homogenen entstanden ist, vorausgesetzt

daß die Medien (0) und (2) identisch sind, daß also das Medium (1) eine planparallele dünne Platte bildet, die auf beiden Seiten an dasselbe Medium grenzt. Wir gehen auf diesen merkwürdigen Fall in einem der nächsten Paragraphen ein und bemerken hier nur, daß die Grundformeln für eine solche Erregung einer homogenen durch eine inhomogene Welle bereits im vorstehenden gegeben sind, da nichts hindert, die dort als gebrochene geführte inhomogene Welle als einfallende, die einfallende homogene Welle als gebrochene aufzufassen.

§ 14. Die Gesetze für die Amplituden bei der Reflexion und Brechung inhomogener ebener Wellen. Totalreflexion an der Grenze zweier isotroper Medien und die hierbei stattfindende Energieströmung.

Gehen wir nun über zu der Bestimmung der bei der Reflexion und der Brechung inhomogener Wellen geltenden Gesetze für die Amplituden der bezüglichen Polarisationsvektoren, so bilden den Ausgangspunkt nach S. 617 die Grenzbedingungen

$$\left.\begin{array}{c}\overline{\mathfrak{u}} = \overline{\mathfrak{u}}_{,}, \quad \overline{\mathfrak{v}} = \overline{\mathfrak{v}}_{,}, \quad \overline{\mathfrak{w}} = \overline{\mathfrak{w}}_{,}, \\ \left[a_{11}\frac{\overline{\partial \mathfrak{v}}}{\partial z} + a_{12}\left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{w}}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial \mathfrak{u}}}{\partial z}\right) - a_{13}\frac{\overline{\partial \mathfrak{v}}}{\partial x}\right] \\ = \left[a_{11}\frac{\overline{\partial \mathfrak{v}}}{\partial z} + a_{12}\left(\frac{\overline{\partial \mathfrak{w}}}{\partial x} - \frac{\overline{\partial \mathfrak{u}}}{\partial z}\right) - a_{13}\frac{\overline{\partial \mathfrak{v}}}{\partial x}\right]_{,}.\end{array}\right\} \qquad 93)$$

Hier ist für jede Welle ein Ansatz von der Form (85″) zu bilden, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{c}\sum(\mathfrak{K}\mathfrak{F}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{F})_{,}, \quad \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{G}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{G})_{,}, \quad \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{H}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{H})_{,} \\ \sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{o}}\left(\mathfrak{G}(a_{11}\mathfrak{C} - a_{13}\mathfrak{A}) - a_{12}(\mathfrak{F}\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\mathfrak{A})\right)\right] \\ = \sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{o}}\left(\mathfrak{G}(a_{11}\mathfrak{C} - a_{13}\mathfrak{A}) - a_{12}(\mathfrak{F}\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\mathfrak{A})\right)\right]_{,}.\end{array}\right\} \qquad 93')$$

Diese Gleichungen bestimmen, wenn mit Hilfe der oben angegebenen Mittel für jede Welle $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ gefunden ist, die Werte $\mathfrak{K}$ für die zwei reflektierten und die zwei gebrochenen Wellen.

Ist die einfallende Welle homogen, so gilt gleiches von den reflektierten; es können dann für alle im ersten Medium verlaufenden Wellen die komplexen Richtungskosinus $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ mit den reellen f, g, h vertauscht werden. Ist noch spezieller das erste Medium isotrop, so schreiben wir für dasselbe, wie in (73),

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a\,, \; a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0\,, \; \omega_o = \omega_e = \omega \qquad 94)$$

und behalten die früheren Bezeichnungen a_{hk} etc. ohne Index, für das zweite Medium bei. Lassen wir ferner die auf die einfallende Welle bezüglichen Richtungskosinus ohne Index, so gilt für die reflektierte Welle

94′) $$\alpha_r = \alpha\,,\ \gamma_r = -\gamma\,.$$

Einfallende und reflektierte Welle können wir wieder durch ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene ausdrücken, deren Amplituden jetzt komplex einzuführen sind und demgemäß mit $\mathfrak{E}_p$, $\mathfrak{E}_s$, $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_s$ bezeichnet werden mögen; die Amplituden der gebrochenen Wellen setzen wir gleich $\mathfrak{D}_o$ und $\mathfrak{D}_e$.

Lassen wir zwei gleichzeitig in gleicher Richtung einfallende Wellen mit Schwingungen parallel und normal zur Einfallsebene zu, führen wir also nebeneinander $\mathfrak{E}_p$ und $\mathfrak{E}_s$ in die allgemeinen Formeln ein, so umfassen wir dadurch, wegen der komplexen Natur dieser Größen, nicht nur das Problem einfallender lineärer Schwingungen nach beliebigem Azimut, sondern ganz beliebige Polarisationszustände.

Nach dem Vorausgeschickten nehmen die Grenzbedingungen (93′) bei vertauschter Reihenfolge die Gestalt an

94″) $$\left\{\begin{aligned} (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\,\gamma &= \mathfrak{D}_o\,\mathfrak{C}_o \cos\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e\,\mathfrak{C}_e \cos\mathfrak{d}_e\,,\\ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\,\alpha &= \mathfrak{D}_o\,\mathfrak{A}_o \cos\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e\,\mathfrak{A}_e \cos\mathfrak{d}_e\,,\\ \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s &= \mathfrak{D}_o \sin\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e \sin\mathfrak{d}_e\,,\\ a\,(\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\,\frac{\gamma}{\alpha} &= \frac{\mathfrak{D}_o}{\mathfrak{A}_o}\Big[(a_{11}\,\mathfrak{C}_o - a_{13}\,\mathfrak{A}_o)\sin\mathfrak{d}_o + a_{12}\cos\mathfrak{d}_o\Big]\\ &\quad + \frac{\mathfrak{D}_e}{\mathfrak{A}_e}\Big[(a_{11}\,\mathfrak{C}_e - a_{13}\,\mathfrak{A}_e)\sin\mathfrak{d}_e + a_{12}\cos\mathfrak{d}_e\Big], \end{aligned}\right.$$

und sie gestatten, $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{D}_o$, $\mathfrak{D}_e$ zu berechnen; der beste Weg hierzu ist dem S. 620 eingeschlagenen analog. —

Der wichtigste Fall ist der, daß, wie das erste, so auch das zweite Medium isotrop ist; wir setzen dann für dasselbe

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_,\,,\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0\,,\ \omega_o = \omega_e = \omega,$$

und, da die beiden gebrochenen Wellen sich in derselben Richtung fortpflanzen, auch

$$\mathfrak{A}_o = \mathfrak{A}_e = \mathfrak{A}_,\,,\ \mathfrak{C}_o = \mathfrak{C}_e = \mathfrak{C}_,\,.$$

Ferner können wir, wie die einfallende und die reflektierte, so auch die gebrochene Schwingung durch ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene ausdrücken und demgemäß für sie setzen

$$\mathfrak{d}_o = 0\,,\ \mathfrak{d}_e = \tfrac{1}{2}\pi\,,\ \mathfrak{D}_o = \mathfrak{D}_p\,,\ \mathfrak{D}_e = \mathfrak{D}_s.$$

Lassen wir dann zunächst der Allgemeinheit halber inhomogene einfallende Wellen, also komplexe Werte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ der Richtungskosinus im ersten Medium, zu und benutzen, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{o} = \mathfrak{A}_,/\mathfrak{o}_,$ und $a = \mathfrak{o}^2$, $a_, = \mathfrak{o}_,^2$ ist, so erhalten wir das System von Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\,\mathfrak{C} &= \mathfrak{D}_p\,\mathfrak{C}_,\,, \quad (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{D}_p\,\mathfrak{A}_,\,,\\ \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s &= \mathfrak{D}_s\quad\,, \quad (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\,\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_s\,\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,\,.\end{aligned}\right\} \qquad 95)$$

Aus demselben folgt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p\frac{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}, \quad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,},\\ \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p\frac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}, \quad \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s\frac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,};\end{aligned}\right\} \qquad 95')$$

die Faktoren von $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_p$ in diesen Formeln wollen wir als komplexe Schwächungsfaktoren $\mathfrak{r}_p$, $\mathfrak{r}_s$, $\mathfrak{d}_p$, $\mathfrak{d}_s$ auffassen.

Fällt die im Medium (1) erregte Welle auf eine zur ersten Grenze parallele Ebene $z = l$ auf, jenseits deren wieder das Medium (0) liegt, so gelten die obigen Formeln mit vertauschten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_,$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_,$; die Schwächungsfaktoren der Reflexion $\mathfrak{r}'_p$, $\mathfrak{r}'_s$, die hier eintreten, sind sonach mit $-\mathfrak{r}_p$, $-\mathfrak{r}_s$ identisch, während die der Brechung $\mathfrak{d}'_p$, $\mathfrak{d}'_s$ im Zähler $\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,$ statt $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ haben. —

Ist die einfallende Welle homogen, so sind die komplexen Richtungskosinus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ mit den reellen α, γ zu vertauschen; es ergeben dann die obigen Formeln für die reflektierten Amplituden $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_s$ die Werte

$$\mathfrak{R}_p = -\,\mathfrak{E}_p\frac{\alpha\,\mathfrak{C}_, - \gamma\,\mathfrak{A}_,}{\alpha\,\mathfrak{C}_, + \gamma\,\mathfrak{A}_,}, \quad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s\frac{\alpha\gamma - \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\alpha\gamma + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}, \qquad 95'')$$

also, wenn man neben dem reellen Einfallswinkel φ den komplexen Brechungswinkel $\mathfrak{f}_,$ durch $\mathfrak{A}_, = \sin\mathfrak{f}_,$, $\mathfrak{C}_, = \cos\mathfrak{f}_,$ einführt,

$$\mathfrak{R}_p = -\,\mathfrak{E}_p\frac{\sin(\varphi - \mathfrak{f}_,)}{\sin(\varphi + \mathfrak{f}_,)}, \quad \mathfrak{R}_s = +\,\mathfrak{E}_s\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \mathfrak{f}_,)}{\operatorname{tg}(\varphi + \mathfrak{f}_,)}, \qquad 95''')$$

was genau den Resultaten (82) entspricht. Wir fügen diesen allgemeinen Formeln noch bei die Beziehung

$$\frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = -\,\frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p}\frac{\cos(\varphi + \mathfrak{f}_,)}{\cos(\varphi - \mathfrak{f}_,)} = -\,\frac{\mathfrak{E}_s}{\mathfrak{E}_p}\frac{\gamma\,\mathfrak{C}_, - \alpha\,\mathfrak{A}_,}{\gamma\,\mathfrak{C}_, + \alpha\,\mathfrak{A}_,}. — \qquad 95'''')$$

Haben speziell die beiden Komponenten der einfallenden Welle gleiche Phase, ist also die einfallende Schwingung lineär polarisiert nach beliebigem Azimut, so ist $\mathfrak{E}_s/\mathfrak{E}_p$ reell, und man kann durch Verfügung über den Anfangspunkt der Zeit stets $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_p$ selbst reell machen; wir wollen dies als ausgeführt voraussetzen und dadurch andeuten, daß wir $\mathfrak{E}_s$ mit E_s, $\mathfrak{E}_p$ mit E_p vertauschen.

Führen wir noch für $\mathfrak{A}_{,}$ und $\mathfrak{C}_{,}$ ihre Werte aus (92') ein, so gewinnen die erhaltenen Resultate die folgende Form

96) $$\frac{\Re_p}{E_p} = \frac{\gamma + i\alpha\varkappa_,}{\gamma - i\alpha\varkappa_,}, \quad \frac{\Re_s}{E_s} = \frac{\alpha\gamma(1-\varkappa_,^2) + i\varkappa_,}{\alpha\gamma(1-\varkappa_,^2) - i\varkappa_,}, \quad \frac{\Re_s}{\Re_p} = \frac{E_s}{E_p}\,\frac{\alpha + i\varkappa_,\gamma}{\alpha - i\varkappa_,\gamma}.$$

Alle diese Ausdrücke haben die S. 558 besonders erwähnte Form der komplexen Amplitudenverhältnisse

$$\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}} = Pe^{id} = \frac{A+iB}{A-iB},$$

welche für das korrespondierende reelle Amplitudenverhältnis P und die Phasendifferenz d die Werte

$$P = 1, \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d = \frac{B}{A}$$

liefert.

Das erstere Resultat, auf die Ausdrücke für $\Re_p/E_p$ und $\Re_s/E_s$ angewandt, ergiebt, daß die resultierenden reellen Amplituden der beiden reflektierten Wellen denen der beiden einfallenden gleich sind. Gleiches gilt von den Intensitäten, und dies erklärt den Namen der totalen Reflexion, der dann von dem hier vorliegenden Falle in uneigentlichem Sinne auch auf den Vorgang übertragen wird, der bei krystallinischen Medien eintritt, wenn bei einfallenden homogenen Wellen eine der gebrochenen inhomogen ist.

Das zweite Resultat liefert für die in der Grenze stattfindenden Beschleunigungen d_p und d_s der reflektierten Wellen parallel und normal zur Einfallsebene gegen die bezüglichen einfallenden bei Berücksichtigung des Wertes (92) von $\varkappa_,$ und bei Benutzung des Brechungsverhältnisses $\sqrt{a/a_,} = n_{10} = n_,/n$

96') $$\begin{cases} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d_p = \dfrac{\alpha\varkappa_,}{\gamma} = \dfrac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha^2 - n_{10}^2}, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d_s = \dfrac{\varkappa_,}{\alpha\gamma(1-\varkappa_,^2)} = \dfrac{1}{n_{10}^2\gamma}\sqrt{\alpha^2 - n_{10}^2}; \end{cases}$$

ebenso ergiebt sich für die Verzögerung d_r der parallel zur Einfallsebene polarisierten reflektierten Welle gegen die normale

96'') $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}d_r = \frac{\gamma\varkappa_,}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^2 - n_{10}^2}.$$

Diese letzte Verzögerung ist gleich Null, wenn der Einfall unter dem Grenzwinkel φ geschieht; sie wächst bei zunehmendem Einfallswinkel schnell bis zu einem Betrag, der bei Glas etwa $\pi/4$ erreicht, nimmt dann langsam ab und verschwindet bei streifendem Einfall.[32])

Ihr Auftreten bei der totalen Reflexion hat zur Folge, daß einfallendes lineär polarisiertes Licht elliptisch polarisiert reflektiert

wird, und die Untersuchung dieser Elliptizität gestattet eine experimentelle Bestimmung von d_r. Hebt man durch Zufügung einer entgegengesetzten und gleichen Verzögerung die Elliptizität auf, so besitzt das resultierende lineärpolarisierte Licht das gleiche Azimut, wie das einfallende, da die Amplituden der beiden Komponenten parallel und normal zur Einfallsebene bei der Reflexion nicht geschwächt werden. —

Setzt man für die komplexen Amplituden ihre Werte gemäß der Formel $\mathfrak{R} = R' + iR''$, so nehmen die imaginären Teile der Lösungen für die reflektierten Bewegungen die Form

$$R' \sin T + R'' \cos T$$

an. Die Werte der R' und R'' ergeben sich dabei leicht folgendermaßen

$$\left.\begin{aligned} R_p' &= E_p \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + n_{10}^2}{1 - n_{10}^2}, & R_p'' &= E_p \frac{2\gamma\sqrt{\alpha^2 - n_{10}^2}}{1 - n_{10}^2}, \\ R_s' &= E_s \frac{n_{10}^4\gamma^2 - \alpha^2 + n_{10}^2}{(1 - n_{10}^2)(\alpha^2 - n_{10}^2\gamma^2)}, & R_s'' &= E_s \frac{2\gamma n_{10}^2\sqrt{\alpha^2 - n_{10}^2}}{(1 - n_{10}^2)(\alpha^2 - n_{10}^2\gamma^2)}. \end{aligned}\right\} \quad 96''')$$

Die Ausdrücke für die komplexen Amplituden der gebrochenen Welle haben minderes Interesse. Man erhält aus (95′) unter der Voraussetzung, daß h o m o g e n e Wellen einfallen,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{2\alpha\gamma}{\alpha\mathfrak{C}_, + \gamma\mathfrak{A}_,} = \mathfrak{E}_p \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + f_,)}, \\ \mathfrak{D}_s &= \mathfrak{E}_s \frac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,} = \mathfrak{E}_s \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + f_,)\cos(\varphi - f_,)}. \end{aligned}\right\} \quad 96'''')$$

Da die Schwingungskomponenten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{w}$ resp. mit $\mathfrak{C}_,$ und $\mathfrak{A}_,$ proportional sind, die ein rein imaginäres Verhältnis $\mathfrak{C}_,/\mathfrak{A}_, = -i\varkappa$ ergeben, so geschieht die aus ihnen zusammengesetzte Bewegung in einer elliptischen Bahn, deren Hauptaxen den Koordinatenaxen X und Z parallel sind. Die in das zweite Medium eindringende Schwingung ist also nicht transversal. —

Noch bleibt eine prinzipielle Schwierigkeit aufzuklären, welche die im Vorstehenden gegebene Lösung des Problemes der totalen Reflexion enthält. Sie liegt darin, daß zwar die reflektierte Welle die ganze Energie der einfallenden entführt, daß aber trotzdem im zweiten Medium eine Bewegung stattfindet, die gleichfalls einen Energiestrom darstellt; es ist die Frage, aus welcher Quelle diese Energie entnommen wird.

Wir betrachten zunächst die Größe des Energiestromes, der die Grenzfläche durchsetzt, und der nach S. 603 gegeben ist durch

$$a_{,}(\overline{\xi_{,}}\,\overline{v_{,}'}-\overline{\eta_{,}}\,\overline{u_{,}'})=-\,a_{,}\left[\left(\overline{\frac{\partial u_{,}}{\partial z}}-\overline{\frac{\partial w_{,}}{\partial x}}\right)\overline{u_{,}'}+\overline{\frac{\partial v_{,}}{\partial z}}\,\overline{v_{,}'}\right],$$

worin alle Ausdrücke für das zweite Medium genommen sein mögen; dieser Wert zerfällt in zwei Teile, die resp. nur von der parallel und nur von der normal zur Einfallsebene polarisierten Komponente abhängen. Im Falle homogener Wellen, also gewöhnlicher oder partieller Reflexion, sind u und w mit derselben trigonometrischen Funktion proportional, die t, x und z additiv verbunden enthält; infolgedessen wechselt $\eta_{,}u_{,}'$ sein Zeichen nicht mit wechselnder Zeit. Gleiches gilt ersichtlich von $\xi_{,}v_{,}'$, und somit behält bei der partiellen Reflexion der die Grenze durchsetzende Energiestrom an jeder Stelle seine Richtung dauernd bei und wechselt nur seine Stärke periodisch. Anders im Falle inhomogener Wellen, wie sie bei der totalen Reflexion auftreten. Hier sind in $u_{,}$, $v_{,}$, $w_{,}$ die Argumente t, x, z derart verbunden, daß sowohl $\eta_{,}u_{,}'$, als $\xi_{,}v_{,}'$, einem Produkt von Sinus und von Kosinus derselben Funktion von t proportional werden; der Energiestrom kehrt hier also, wie leicht zu sehen, während einer jeden Periode vier Mal seine Richtung um.

Ähnliches gilt in Bezug auf den normal zur Einfallsebene stattfindenden Strom, der für uns ein Interesse nicht bietet.

Anders verhält sich dagegen die im zweiten Medium parallel der X-Axe verlaufende Energieströmung. Für sie gilt

$$a_{,}(\overline{\eta_{,}}\,\overline{w_{,}'}-\overline{\zeta_{,}}\,\overline{v_{,}'})=-\,a_{,}\left[\overline{\frac{\partial v_{,}}{\partial x}}\,\overline{v_{,}'}-\left(\overline{\frac{\partial u_{,}}{\partial z}}-\overline{\frac{\partial w_{,}}{\partial x}}\right)\overline{w_{,}'}\right],$$

und man erkennt leicht, daß die beiden Teile dieses Ausdruckes, welche denselben Charakter haben, wie die des oben betrachteten, auch im Falle der totalen Reflexion ihr Vorzeichen nicht mit der Zeit wechseln.

Sonach wirken zwei Umstände zur Erzeugung der Bewegung in dem zweiten Medium zusammen: ein in der Einfallsebene und längs der Grenze hingehender, aus Unendlich kommender Energiestrom und ein periodisches Herüber- und Hinüberschwanken von Energie durch die Zwischengrenze. Jener tangentiale Energiestrom würde also bei wirklich unendlich ausgedehnten einfallenden Wellen im Grunde neben diesen durch das Problem gegeben sein müssen. In der Wirklichkeit, wo es sich um begrenzte Wellen handelt, dürfte der Vorgang folgendermaßen verlaufen. Am Rande des von der einfallenden Welle getroffenen Stückes der Zwischengrenze, soweit derselbe der $-X$-Axe — also der Seite, von der die einfallende Welle kömmt — zugewandt ist, wird jene tangentiale Energieströmung auf

Kosten der reflektierten Energie entstehen; soweit derselbe der $+X$-Axe, — also der Seite, nach welcher die einfallende Welle geht — zugewandt ist, wird sie, da die zu ihrer Erhaltung nötige Wechselwirkung mit der Bewegung im ersten Medium weiterhin nicht mehr stattfindet, ihren Charakter ändern und sich im Raume zerstreuen.

Da der Betrag der im zweiten Medium fortgepflanzten Energie nach S. 636 sehr klein ist, so dürfte es unmöglich sein, deren Verbleib durch die Beobachtung festzustellen.

§ 15. Reflexion und Brechung an einer planparallelen Platte aus isotroper durchsichtiger Substanz. Die Erscheinungen, wenn an beiden Grenzen gewöhnliche, und wenn an einer Grenze totale Reflexion stattfindet.

Neue und höchst interessante Erscheinungen treten ein, wenn eine ebene Welle einfarbigen Lichtes, die in einem Medium (0) fortschreitet, auf die eine Fläche einer planparallelen Platte aus einem Medium (1) fällt, deren zweite Fläche an ein Medium (2) grenzt. Wir werden aber, da sich die Verhältnisse hier ohnedies komplizieren, nur den Fall in Betracht ziehen, daß alle drei Medien isotrop sind; doch wollen wir, als von praktischer Bedeutung, inhomogene ebene Wellen zulassen, die normal zur Einfallsebene konstante Amplituden besitzen.

Die erste Grenzfläche (0, 1) der Platte sei die Ebene $z=0$, die zweite (1, 2) die Ebene $z=l$; die Einfallsebene sei, wie früher, die XZ-Ebene. Die auf das Medium (0) bezüglichen Parameter seien ohne Index gelassen, die auf (1) bezüglichen durch den Index $_{,}$ die auf (2) bezüglichen durch $_{,,}$ charakterisiert.

Da die Medien sämtlich isotrop sind, so können wir die Schwingungskomponenten parallel und normal zur Einfallsebene gesondert behandeln.

Wir beginnen mit der normalen Komponente und setzen für die in (0) einfallende und die ebenda reflektierte Welle

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{E}_s e^{i\mathfrak{T}}, \quad \mathfrak{v}_r = \mathfrak{R}_s e^{i\mathfrak{T}_r},$$

wobei

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{A}x + \mathfrak{C}z}{\mathfrak{o}}\right), \quad \mathfrak{T}_r = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{A}x - \mathfrak{C}z}{\mathfrak{o}}\right), \quad \mathfrak{o}^2 = a \qquad 97)$$

ist; für die in (1) einfallende und an der zweiten Grenze reflektierte

$$\mathfrak{v}_, = \mathfrak{D}_{s,} e^{i\mathfrak{T}_,}, \quad \mathfrak{v}_{r,} = \mathfrak{R}_{s,} e^{i\mathfrak{T}_{r,}},$$

wobei

$$\mathfrak{T}_, = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{A}_, x + \mathfrak{C}_, z}{\mathfrak{o}_,}\right), \quad \mathfrak{T}_{r,} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{A}_, x - \mathfrak{C}_, z}{\mathfrak{o}_,}\right), \quad \mathfrak{o}_,^2 = a_, \qquad 97')$$

ist; endlich für die in (2) fortgepflanzte

$$97'')\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_d = \mathfrak{D}_s e^{i\mathfrak{T}_{,,}}, \quad \text{wobei} \\ \mathfrak{T}_{,,} = \dfrac{2\pi}{\tau}\left(t - \dfrac{\mathfrak{A}_{,,}x + \mathfrak{C}_{,,}z}{\mathfrak{o}_{,,}}\right), \quad \mathfrak{o}_{,,}^2 = a_{,,}. \end{cases}$$

Die Grenzbedingungen für $z = 0$ lauten

$$98)\quad \overline{\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_r} = \overline{\mathfrak{v}_{,} + \mathfrak{v}_{r,}}, \quad \overline{a\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v} + \mathfrak{v}_r)} = \overline{a_{,}\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_{,} + \mathfrak{v}_{r,})};$$

für $z = l$ gilt

$$98')\quad \overline{\mathfrak{v}_{,} + \mathfrak{v}_{r,}} = \overline{\mathfrak{v}_d}, \quad \overline{a_{,}\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{v}_{,} + \mathfrak{v}_{r,})} = \overline{a_{,,}\frac{\partial \mathfrak{v}_d}{\partial z}}.$$

Man erhält zunächst das Brechungsgesetz

$$98'')\quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{o}} = \frac{\mathfrak{A}_{,}}{\mathfrak{o}_{,}} = \frac{\mathfrak{A}_{,,}}{\mathfrak{o}_{,,}}$$

und außerdem für die Amplituden die Gleichungen

$$98''')\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s = \mathfrak{D}_{s,} + \mathfrak{R}_{s,}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}(\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s) = \mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}(\mathfrak{D}_{s,} - \mathfrak{R}_{s,}), \\ \mathfrak{D}_{s,}\mathfrak{e}_{,}^{-1} + \mathfrak{R}_{s,}\mathfrak{e}_{,}^{+1} = \mathfrak{D}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1}, \quad \mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}(\mathfrak{D}_{s,}\mathfrak{e}_{,}^{-1} - \mathfrak{R}_{s,}\mathfrak{e}_{,}^{+1}) = \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}\mathfrak{D}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1}; \end{cases}$$

hierin bedeutet

$$98'''')\quad \mathfrak{e}_{,} = e^{\frac{2\pi i\mathfrak{C}_{,}l}{\tau\mathfrak{o}_{,}}}, \quad \mathfrak{e}_{,,} = e^{\frac{2\pi i\mathfrak{C}_{,,}l}{\tau\mathfrak{o}_{,,}}}.$$

Aus den letzten beiden Formeln (98''') folgt

$$99)\quad \mathfrak{D}_{s,} = \frac{\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} + \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}}{2\,\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{e}_{,}^{-1}}\mathfrak{D}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1}, \quad \mathfrak{R}_{s,} = \frac{\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} - \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}}{2\,\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{e}_{,}^{+1}}\mathfrak{D}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1},$$

und beim Einsetzen in die beiden ersten

$$99')\quad \begin{cases} (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s)\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} \\ = \frac{1}{2}\left[(\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} + \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,})\mathfrak{e}_{,}^{+1} + (\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} - \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,})\mathfrak{e}_{,}^{-1}\right]\mathfrak{e}_{,,}^{-1}\mathfrak{D}_s, \\ (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\mathfrak{A}\mathfrak{C} \\ = \frac{1}{2}\left[(\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} + \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,})\mathfrak{e}_{,}^{+1} - (\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} - \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,})\mathfrak{e}_{,}^{-1}\right]\mathfrak{e}_{,,}^{-1}\mathfrak{D}_s. \end{cases}$$

Hierfür schreiben wir kurz

$$99'')\quad \begin{cases} (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s)\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,} = \mathfrak{P}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1}\mathfrak{D}_s, \\ (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{Q}_s\mathfrak{e}_{,,}^{-1}\mathfrak{D}_s \end{cases}$$

und berechnen daraus

$$99''')\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s\dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_s - \mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{Q}_s}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_s + \mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{Q}_s}, \\ \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s\mathfrak{e}_{,,}\dfrac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{P}_s + \mathfrak{A}_{,}\mathfrak{C}_{,}\mathfrak{Q}_s}. \end{cases}$$

Für die Komponenten parallel zur Einfallsebene setzen wir

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{u} = -\mathfrak{C}\mathfrak{E}_p e^{i\mathfrak{T}},\ \mathfrak{w} = \mathfrak{A}\mathfrak{E}_p e^{i\mathfrak{T}};\ \mathfrak{u}_r = \mathfrak{C}\mathfrak{R}_p e^{i\mathfrak{T}_r},\ \mathfrak{w}_r = \mathfrak{A}\mathfrak{R}_p e^{i\mathfrak{T}_r},\\ \mathfrak{u}' = -\mathfrak{C}'\mathfrak{D}_{p'} e^{i\mathfrak{T}'},\ \mathfrak{w}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{D}_{p'} e^{i\mathfrak{T}'};\ \mathfrak{u}_{r'} = \mathfrak{C}'\mathfrak{R}_{p'} e^{i\mathfrak{T}_{r'}},\ \mathfrak{w}_{r'} = \mathfrak{A}'\mathfrak{R}_{p'} e^{i\mathfrak{T}_{r'}},\\ \mathfrak{u}_d = -\mathfrak{C}''\mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{T}''},\ \mathfrak{w}_d = \mathfrak{A}''\mathfrak{D}_p e^{i\mathfrak{T}''},\end{array}\right\} \quad 100)$$

wobei die verschiedenen $\mathfrak{T}$ dieselbe Bedeutung haben, wie oben.

Die Grenzbedingungen für $z = 0$ lauten

$$\overline{\mathfrak{u}} + \overline{\mathfrak{u}_r} = \overline{\mathfrak{u}'} + \overline{\mathfrak{u}_{r'}},\quad \overline{\mathfrak{w}} + \overline{\mathfrak{w}_r} = \overline{\mathfrak{w}'} + \overline{\mathfrak{w}_{r'}}, \qquad 100')$$

und für $z = l$ gilt

$$\overline{\mathfrak{u}'} + \overline{\mathfrak{u}_{r'}} = \overline{\mathfrak{u}_d},\quad \overline{\mathfrak{w}'} + \overline{\mathfrak{w}_{r'}} = \overline{\mathfrak{w}_d}. \qquad 100'')$$

Diese Formeln liefern zunächst folgendes System

$$\left.\begin{array}{c}(\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\mathfrak{C} = (\mathfrak{D}_{p'} - \mathfrak{R}_{p'})\mathfrak{C}',\ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\mathfrak{A} = (\mathfrak{D}_{p'} + \mathfrak{R}_{p'})\mathfrak{A}',\\ (\mathfrak{D}_{p'}\mathfrak{e}'^{-1} - \mathfrak{R}_{p'}\mathfrak{e}'^{+1})\mathfrak{C}' = \mathfrak{D}_p \mathfrak{e}''^{-1}\mathfrak{C}'',\\ (\mathfrak{D}_{p'}\mathfrak{e}'^{-1} + \mathfrak{R}_{p'}\mathfrak{e}'^{+1})\mathfrak{A}' = \mathfrak{D}_p \mathfrak{e}''^{-1}\mathfrak{A}'',\end{array}\right\} \quad 100''')$$

wobei die $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{e}''$ durch (98'''') definiert sind.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\mathfrak{D}_{p'} = \frac{\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' + \mathfrak{A}'\mathfrak{C}''}{2\,\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{e}'^{-1}}\mathfrak{D}_p\mathfrak{e}''^{-1},\quad \mathfrak{R}_{p'} = \frac{\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{C}''}{2\,\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{e}'^{+1}}\mathfrak{D}_p\mathfrak{e}''^{-1}, \qquad 101)$$

und mit ihrer Hilfe

$$\left.\begin{array}{c}(\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\\ = \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' + \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'')\mathfrak{e}'^{+1} - (\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'')\mathfrak{e}'^{-1}]\,\mathfrak{D}_p\mathfrak{e}''^{-1},\\ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\mathfrak{A}\mathfrak{C}'\\ = \tfrac{1}{2}[(\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' + \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'')\mathfrak{e}'^{+1} + (\mathfrak{A}''\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}'\mathfrak{C}'')\mathfrak{e}'^{-1}]\,\mathfrak{D}_p\mathfrak{e}''^{-1}.\end{array}\right\} \quad 101')$$

Hierfür schreiben wir kurz

$$\left.\begin{array}{c}(\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\mathfrak{A}\mathfrak{C}' = \mathfrak{P}_p\mathfrak{e}''^{-1}\mathfrak{D}_p,\\ (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\mathfrak{A}'\mathfrak{C} = \mathfrak{Q}_p\mathfrak{e}''^{-1}\mathfrak{D}_p\end{array}\right\} \qquad 101'')$$

und berechnen daraus

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p\dfrac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{P}_p - \mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{Q}_p}{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{P}_p + \mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{Q}_p},\\ \mathfrak{D}_p = \mathfrak{E}_p\mathfrak{e}''\dfrac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}\mathfrak{P}_p + \mathfrak{A}\mathfrak{C}'\mathfrak{Q}_p}. —\end{array}\right\} \qquad 101''')$$

Diese höchst allgemeinen Resultate lassen sich erheblich einfacher und anschaulicher gestalten durch Einführung der S. 639 definierten komplexen Schwächungsverhältnisse $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{d}$ bei Reflexion und Brechung an den beiden Grenzen (0, 1) und (1, 2), von denen offenbar auch in letzter Instanz der ganze Vorgang abhängt.

Setzen wir nämlich etwas allgemeiner, wie dort,

$$
102)\quad \begin{cases}
\mathfrak{r}_s = \dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{r}'_s = \dfrac{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_, - \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_, + \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}}, \\[2ex]
\mathfrak{d}_s = \dfrac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{d}'_s = \dfrac{2\,\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_, + \mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_{,,}}, \\[2ex]
\mathfrak{r}_p = \dfrac{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{r}'_p = \dfrac{\mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_, - \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_{,,}}{\mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_, + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_{,,}}, \\[2ex]
\mathfrak{d}_p = \dfrac{2\,\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{d}'_p = \dfrac{2\,\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}_{,,}\mathfrak{C}_, + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_{,,}}
\end{cases}
$$

so erhalten wir unter Rücksicht hierauf in gleicher Weise für die Wellen (s) und (p), und somit ohne Indices zu schreiben,

$$
102')\qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{E}\,\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{e}_,^{+1} + \mathfrak{r}'\,\mathfrak{e}_,^{-1}}{\mathfrak{e}_,^{+1} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{e}_,^{-1}}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{e}_{,,}\,\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}'}{\mathfrak{e}_,^{+1} + \mathfrak{r}\,\mathfrak{r}'\,\mathfrak{e}_,^{-1}}.
$$

Diese Formeln wollen wir zunächst auf den Fall anwenden, daß homogene ebene Wellen in (0) einfallen, und daß ihnen nach dem Brechungsgesetz (98″) auch homogene Wellen in (1) und in (2) entsprechen.[33]) Es verwandeln sich dann die komplexen Schwächungsverhältnisse $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$ in die reellen ϱ und δ, deren Werte lauten

$$
103)\quad \begin{cases}
\varrho_s = \dfrac{\alpha\gamma - \alpha_,\gamma_,}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}, & \varrho'_s = \dfrac{\alpha_,\gamma_, - \alpha_{,,}\gamma_{,,}}{\alpha_,\gamma_, + \alpha_{,,}\gamma_{,,}}, \\[2ex]
\delta_s = \dfrac{2\,\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \alpha_,\gamma_,}, & \delta'_s = \dfrac{2\,\alpha_,\gamma_,}{\alpha_,\gamma_, + \alpha_{,,}\gamma_{,,}}, \\[2ex]
\varrho_p = \dfrac{\alpha_,\gamma - \alpha\gamma_,}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, & \varrho'_p = \dfrac{\alpha_{,,}\gamma_, - \alpha_,\gamma_{,,}}{\alpha_{,,}\gamma_, + \alpha_,\gamma_{,,}}, \\[2ex]
\delta_p = \dfrac{2\,\alpha\gamma}{\alpha_,\gamma + \alpha\gamma_,}, & \delta'_p = \dfrac{2\,\alpha_,\gamma_,}{\alpha_{,,}\gamma_, + \alpha_,\gamma_{,,}},
\end{cases}
$$

während

$$
103')\qquad \mathfrak{e}_, = e^{iL_,} = e^{\frac{2\pi i\gamma_, l}{\tau\omega_,}}, \quad \mathfrak{e}_{,,} = e^{iL_{,,}} = e^{\frac{2\pi i\gamma_{,,} l}{\tau\omega_{,,}}}
$$

wird; dabei bezeichnen die α und γ, wie früher, die reellen Richtungskosinus der Wellennormalen in den drei Medien.

Die Gleichungen (102′) nehmen nunmehr die Form an

$$
103'')\quad \begin{cases}
\mathfrak{R} = \mathfrak{E}\,\dfrac{(\varrho + \varrho')\cos L_, + i(\varrho - \varrho')\sin L_,}{(1 + \varrho\varrho')\cos L_, + i(1 - \varrho\varrho')\sin L_,}, \\[2ex]
\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,\dfrac{\delta\,\delta'(\cos L_{,,} + i\sin L_{,,})}{(1 + \varrho\varrho')\cos L_, + i(1 - \varrho\varrho')\sin L_,},
\end{cases}
$$

welche wir dem Weiteren zu Grunde legen.

Da die $\mathfrak{R}/\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}/\mathfrak{E}$ komplex sind, so besitzen die reflektierten und die durchgegangenen Wellen Verzögerungen gegenüber denjenigen einfallenden, die ihre Ebenen in der Grenze $z = 0$ schneiden,

während gleiches nach S. 617 bei der einfachen Reflexion oder Brechung nicht stattfindet. Die Ursache ist der Umstand, daß jetzt die reflektierten und die gebrochenen Wellen durch Superposition unendlich vieler durch wiederholte Reflexionen an den Grenzen des Medium (1) entstandenen gebildet werden, die verschiedene Wege zurückgelegt und somit verschiedene Verzögerungen erlitten haben.

Ist das einfallende Licht linear polarisiert, so lassen sich, wie schon S. 639 benutzt, durch Verfügung über den Anfangspunkt für die Zeit die Amplituden $\mathfrak{E}_p$ und $\mathfrak{E}_s$ reell, also gleich E_p und E_s machen. Es haben dann die Ausdrücke für $\mathfrak{R}$ und für $\mathfrak{D}$ die Form

$$A e^{-i\Delta} = E\frac{A + iB}{C + iD}, \tag{104}$$

worin A die resultierende Amplitude und Δ die Verzögerung der reflektierten oder der gebrochenen Welle gegenüber der einfallenden bezeichnet.

Hieraus ergiebt sich aber

$$A^2 = E^2\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}, \quad \Delta = \Delta'' - \Delta', \tag{104'}$$

wobei

$$\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\Delta', \quad \frac{D}{C} = \operatorname{tg}\Delta'' \tag{104''}$$

gesetzt ist.

Wenden wir zunächst den ersten Teil dieses allgemeinen Schemas an, so erhalten wir für die reflektierten und die gebrochenen Amplituden der Komponenten (p) und (s) nach geringer Umformung

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= E^2\frac{\varrho^2 + \varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos 2L_,}{1 + \varrho^2\varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos 2L_,},\\ &= E^2\frac{(\varrho + \varrho')^2 - 4\varrho\varrho'\sin^2 L_,}{(1 + \varrho\varrho')^2 - 4\varrho\varrho'\sin^2 L_,},\\ D^2 &= E^2\frac{\delta^2\delta'^2}{1 + \varrho^2\varrho'^2 + 2\varrho\varrho'\cos 2L_,},\\ &= E^2\frac{\delta^2\delta'^2}{(1 + \varrho\varrho')^2 - 4\varrho\varrho'\sin^2 L_,}; \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

aus ihnen folgen die Intensitäten der bezüglichen Wellen durch Multiplikation mit $2\pi^2/\tau^2$. Die erhaltenen Resultate enthalten wichtige, der Beobachtung zugängliche Gesetze.

Die Dicke l der Platte tritt allein in dem Aggregat $L_, = 2\pi\gamma_, l/\tau\omega_, = 2\pi\gamma_, l/\lambda_,$ auf; die Intensitäten sind somit periodische Funktionen von l, ein Umstand, auf das schon S. 526 Bezug genommen ist.

Bezeichnen wir die bei dem periodischen Wechsel erreichten extremen Werte von R und D mit R_1, R_2, D_1, D_2, so erhalten wir

$$R_1^2 = E^2 \frac{(\varrho - \varrho')^2}{(1 - \varrho\varrho')^2}, \quad R_2^2 = E^2 \frac{(\varrho + \varrho')^2}{(1 + \varrho\varrho')^2},$$

$$D_1^2 = E^2 \frac{\delta^2 \delta'^2}{(1 - \varrho\varrho')^2}, \quad D_2^2 = E^2 \frac{\delta^2 \delta'^2}{(1 + \varrho\varrho')^2},$$

und zwar treten die ersteren ein, wenn $l\gamma_, / \tau\,\omega_, = l\gamma_, / \lambda_, = (2h+1)/4$, die letzteren, wenn es $= h/2$ ist, wobei $h = 1, 2 \ldots$, und $\lambda_,$ die Wellenlänge in der Platte bedeutet. Man erkennt, daß die Entscheidung darüber, welche dieser Ausdrücke Maxima, welche Minima geben, davon abhängt, ob ϱ und ϱ' gleiches, oder ob sie entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Bei genügend kleinen Einfällswinkeln sind ϱ und ϱ' von gleichem Vorzeichen, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω von dem Medium (0) zu (1) zu (2) zunimmt oder abnimmt, dagegen von entgegesetztem, wenn ω in (1) kleiner oder größer ist, als in (0) und in (2).

Dies letztere findet u. a. statt in dem praktisch wichtigsten Falle, daß die Medien (0) und (2) identisch sind. Hier ist dann $\varrho = -\varrho'$, aber nicht gleichzeitig $\delta = \delta'$, jedoch $1 - \varrho^2 = (1 - \varrho'^2) = \delta\delta'$, und es gilt allgemein statt des Systems (105)

$$105') \quad R^2 = E^2 \frac{4\varrho^2 \sin^2 L_,}{(1 - \varrho^2)^2 + 4\varrho^2 \sin^2 L_,}, \quad D^2 = E^2 \frac{(1 - \varrho^2)^2}{(1 - \varrho^2)^2 + 4\varrho^2 \sin^2 L_,},$$

also

$$R^2 + D^2 = E^2,$$

und die extremen Werte lauten

$$R_1^2 = E^2 \frac{4\varrho^2}{(1 + \varrho^2)^2}, \quad R_2^2 = 0,$$

$$D_1^2 = E^2 \frac{(1 - \varrho^2)^2}{(1 + \varrho^2)^2}, \quad D_2^2 = E^2.$$

Für manche Zwecke ist eine Annäherung genügend, die man aus dem Vorstehenden erhält, indem man ϱ als sehr klein neben Eins betrachtet und Glieder vierter Ordnung vernachlässigt. Man erhält so aus (105')

$$105'') \qquad R^2 = E^2\, 4\varrho^2 \sin^2 L_,, \quad D^2 = E^2 (1 - 4\varrho^2 \sin^2 L_,).$$

Bei wachsendem Einfallswinkel kann sich, wenigstens für die normal zur Einfallsebene polarisierte Komponente, unter Umständen das oben erörterte Verhältnis umkehren, denn der Koeffizient ϱ_s wechselt nach S. 627 das Vorzeichen, wenn der Polarisationswinkel der Kombination (0, 1), ϱ'_s, wenn derjenige der Kombination (1, 2) überschritten wird. Sind also die beiden Kombinationen ungleich, so findet für die genannten Koeffizienten der Vorzeichenwechsel nicht

gleichzeitig statt, und demgemäß liegt bei Benutzung von senkrecht zur Einfallsebene polarisiertem Licht zwischen diesen beiden Polarisationswinkeln ein Bereich, wo die Intensitäten R_1 und R_2 den Charakter des Minimums und des Maximums vertauscht haben. —

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die einfallende Welle einfarbiges Licht enthält; besteht sie aus einem Gemisch verschiedener Farben, so hat man jeden Bestandteil für sich der Theorie zu unterwerfen und die Resultate zu summieren. Verbinden wir also die resultierende Intensität I des einfallenden Lichtes durch die Beziehung

$$I = \sum I_n$$

mit den Intensitäten I_n der Bestandteile, und bezeichnen wir die Schwächungskoeffizienten bei der Reflexion und bei der Brechung durch die Platte resp. mit P_n und Θ_n, so wird für die reflektierte und für die gebrochene Welle gelten

$$I_r = \sum I_n P_n, \quad I_d = \sum I_n \Theta_n.$$

So wie die Koeffizienten P_n und Θ_n für die einzelnen Bestandteile merklich verschieden sind, werden hiernach die Mischungsverhältnisse, und somit die Farben der reflektierten und der gebrochenen Welle von denen der einfallenden abweichen. Dies ist bei der Reflexion und der Brechung an einer einfachen Zwischengrenze nur in äußerst geringem Maße der Fall, es kann aber bei dem vorliegenden Problem einer planparallelen Platte in hohem Grade stattfinden; beispielsweise können gewisse Bestandteile bei der Reflexion nahezu vollständig in Wegfall kommen. Der bei weitem wichtigste Fall ist der, daß das einfallende Licht weißes ist, d. h., daß es alle Farben in jenem speziellen Mischungsverhältnis enthält, das uns die Empfindung der Farblosigkeit erweckt. Hier wird das an der Platte reflektierte und das durch sie fortgepflanzte Licht im allgemeinen farbig erscheinen; aber wir haben keine zuverlässigen Hilfsmittel, um seine Farbe aus dem Mischungsverhältnis numerisch zu berechnen.

Es genüge somit, nur zwei Bemerkungen über diese Phänomene anzuschließen.

Die erste knüpft daran an, daß, wie von vornherein klar ist, und wie auch die Formeln (105) erkennen lassen, die Koeffizienten P_n und Θ_n sich zu Eins ergänzen, wenn das erste und das dritte Medium identisch ist. Hieraus folgt dann, daß auch

$$I_r + I_d = \sum I_n$$

ist, d. h., daß sich die reflektierten und die gebrochenen Wellen jederzeit zu weißem Licht ergänzen. Zwei Gemische, welche diese Eigenschaft haben, nennt man komplementär gefärbt und muß daher diesen Namen auf den vorliegenden Fall anwenden.

Die zweite knüpft daran an, daß mit wachsender Dicke l der Platte auch der Parameter $L_,$ der Formeln (105) wächst, und daß mit wachsendem $L_,$ das Glied $\sin^2 L_,$, das allein $L_,$ enthält, innerhalb des Bereiches der optisch wahrnehmbaren Farben immer häufiger zwischen seinem größten und seinem kleinsten Wert oscilliert. Es ist klar, daß, sowie benachbarte Maxima und Minima von $\sin^2 L_,$ auf Farben fallen, die dem Auge nicht mehr stark verschieden erscheinen, die Wirkung der verschieden starken Schwächung der verschiedenen Bestandteile undeutlich wird, daß also die von weißem Licht herrührende Farbenerscheinung mit wachsender Dicke immer mehr verschwinden muß. In der That ist sie auch nur bis zu einer Dicke, welche etwa das fünffache der Länge einer Welle innerhalb der Platte beträgt, wahrnehmbar.

Um alle die vorstehend beschriebenen Erscheinungen bequem zu beobachten, ist die von NEWTON angegebene Versuchsanordnung geeignet, die kurz als NEWTON'scher Apparat bezeichnet wird.[34]) Bei ihr wird die sehr dünne und in kleinen Bereichen als planparallel zu betrachtende Platte durch den lufterfüllten Raum zwischen einer Glasplatte und einer sie berührenden Linse aus derselben oder anderer Substanz von sehr großem Krümmungsradius σ gebildet.

In einem auf der Linse gemessenen Winkelabstand ϑ von der Berührungsstelle ist dann die Dicke l der Zwischenschicht gleich $\frac{1}{2}\sigma\vartheta^2$, wobei $\sigma\vartheta$ mit dem lineären Abstand d merklich identisch ist. Beschränkt man sich auf die in (105'') eingeführte Annäherung und berücksichtigt den Wert von $L_,$, so erhält man für einfarbiges Licht

$$105''')\qquad R^2 = E^2\,4\,\varrho^2 \sin^2\frac{\pi\gamma_,\sigma\vartheta^2}{\tau\,\omega_,},\quad D^2 = E^2\left(1 - 4\,\varrho^2 \sin^2\frac{\pi\gamma_,\sigma\vartheta^2}{\tau\,\omega_,}\right),$$

dagegen für weißes, indem man ϱ, $\omega_,$ und $\gamma_,$ als von der Farbe unabhängig betrachtet,

$$105'''')\quad I_r = 4\varrho^2 \sum I_n \sin^2\frac{\pi\gamma_,\sigma\vartheta^2}{\tau_n\,\omega_,},\quad D^2 = \sum I_n - 4\varrho^2 \sum I_n \sin^2\frac{\pi\gamma_,\sigma\vartheta^2}{\tau_n\,\omega_,}.$$

Man erhält also im einfarbigen Lichte helle und dunkle, im weißen Lichte farbige Ringe um die Berührungsstelle, deren Gesetze leicht angebbar sind. —

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich ausschließlich auf die Intensitätsverhältnisse der an der Platte reflektierten oder ge-

brochenen ebenen Wellen. Was nun weiter die ihnen erteilte **Phasenänderung** angeht, so wird nach (104″) für die reflektierte Welle

$$\operatorname{tg} \Delta_r' = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho + \varrho'} \operatorname{tg} L_, , \qquad \operatorname{tg} \Delta_r'' = \frac{1 - \varrho\varrho'}{1 + \varrho\varrho'} \operatorname{tg} L_, , \qquad 106)$$

für die gebrochene

$$\operatorname{tg} \Delta_d' = \operatorname{tg} L_{,,} , \qquad \operatorname{tg} \Delta_d'' = \operatorname{tg} \Delta_r'' = \frac{1 - \varrho\varrho'}{1 + \varrho\varrho'} \operatorname{tg} L_, . \qquad 106')$$

Ist das erste und das dritte Medium identisch, also $\varrho = -\varrho'$, so wird $\Delta_r' = \frac{1}{2}\pi$ und

$$\Delta_r = \Delta_r'' - \tfrac{1}{2}\pi .$$

Für die Verzögerung Δ_d der durchgehenden Welle gegen die einfallende erhält man einen besonders einfachen Wert, wenn die reflektierten Amplituden so klein sind, daß man $\varrho\varrho'$ neben Eins vernachlässigen kann. Hier gilt dann

$$\Delta_d = L_{,,} - L_, = \frac{2\pi l}{\tau}\left(\frac{\gamma_{,,}}{\omega_{,,}} - \frac{\gamma_,}{\omega_,}\right). \qquad 106'')$$

Eine besondere praktische Wichtigkeit besitzt auch für die durchgehende Welle der Fall, daß das dritte Medium mit dem ersten identisch, also

$$L_{,,} = \frac{2\pi l \gamma}{\tau\omega}$$

ist; er ist u. a. realisiert, wenn man eine Platte aus einer isotropen durchsichtigen Substanz im Luftraum beobachtet. Fängt man mit der Platte nur einen Teil der einfallenden ebenen Welle auf und läßt den anderen unbehindert weitergehen, so schreiten die beiden Teile im Raume $z > l$ nebeneinander in paralleler Richtung weiter fort, und Δ_d giebt direkt die Verzögerung des gebrochenen Anteiles gegen den nicht gebrochenen an.

Hier gilt also in erster Annäherung gemäß (106″)

$$\Delta_d = \frac{2\pi l}{\tau}\left(\frac{\gamma}{\omega} - \frac{\gamma_,}{\omega_,}\right), \qquad 106''')$$

ein Ausdruck, dessen Richtigkeit man leicht direkt erweisen kann, indem man bei Vernachlässigung der inneren Reflexionen die Wege bestimmt, welche die beiden Wellennormalen zurückgelegt haben. Aber dieser, für beide Komponenten (p) und (s) übereinstimmende Wert ist nicht streng; er ist vielmehr für genaue Betrachtungen zu ersetzen durch den aus (106′) folgenden

$$\Delta_d = \frac{2\pi l\gamma}{\tau\omega} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1 - \varrho\varrho'}{1 + \varrho\varrho'} \operatorname{tg} \frac{2\pi l \gamma_,}{\tau\omega_,}\right), \qquad 106'''')$$

der für beide Komponenten eine etwas verschiedene Größe besitzt.

Nachdem ein exakter Wert für Δ_d gefunden ist, kann man eine Platte aus einem durchsichtigen isotropen Körper benutzen, um einer ebenen Welle eine beliebige Verzögerung zu erteilen.[35] Um zwei parallel fortschreitende Wellen um einen kleinen Betrag relativ zu einander zu verzögern, läßt man sie praktisch zwei identische Platten passieren, die gegeneinander oder gegen die Fortpflanzungsrichtung geneigt werden können. Wenn sich die Neigungswinkel scharf ablesen lassen, und wenn Dicke und Brechungsindex der Platten bekannt sind, so kann man nach den obigen Formeln die erteilte relative Verzögerung in jedem einzelnen Fall berechnen. Unter welchen Umständen dabei die angenäherte Formel (106''') an Stelle der strengen (106'''') treten darf, kann nur eine genauere Diskussion der letzteren zeigen. —

Wir haben uns bisher auf den einfachsten Fall beschränkt, daß den in (0) einfallenden homogenen ebenen Wellen im Medium (1) und (2) gleichfalls homogene Wellen entsprechen, daß also das Brechungsgesetz zu reellen φ auch reelle Werte $\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$ liefert. Von den Fällen, wo dies nicht erfüllt ist, wo also an einer oder an zwei Grenzen **totale Reflexion** stattfindet, sind besonders die zwei von Interesse, daß entweder $\varphi_,$ oder daß $\varphi_{,,}$ reell ist.

Wenden wir uns zunächst dem ersten Fall zu, so ist in demselben $\mathfrak{A}_,$ und $\mathfrak{C}_,$ reell, gleich $\alpha_,$ und $\gamma_,$, dagegen nach (92')

$$\mathfrak{A}_{,,} = \alpha\sqrt{\frac{a_{,,}}{a}} = \mu_{,,}, \quad \mathfrak{C}_{,,} = -i\sqrt{\frac{a_{,,}\,\alpha^2}{a} - 1} = -i\nu_{,,},$$

worin $\mu_{,,}$ und $\nu_{,,}$ neue Bezeichnungen sind, zwischen denen die Beziehung

$$\mu_{,,}^2 - \nu_{,,}^2 = 1$$

besteht.

Berücksichtigt man dies, so werden die Schwächungsfaktoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{d}$, wie im vorigen Falle, reell, nämlich zu ϱ und δ, und sind durch die in (103) enthaltenen Ausdrücke für die parallel und die normal zur Einfallsebene polarisierte Welle gegeben. Dagegen bleibt $\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{d}'$ komplex, und es gilt nach (102) spezieller

$$107)\quad \begin{cases} \mathfrak{r}_s' = \dfrac{\alpha_,\gamma_, + i\mu_{,,}\nu_{,,}}{\alpha_,\gamma_, - i\mu_{,,}\nu_{,,}}, & \mathfrak{d}_s' = \dfrac{2\alpha_,\gamma_,}{\alpha_,\gamma_, - i\mu_{,,}\nu_{,,}}, \\[2ex] \mathfrak{r}_p' = \dfrac{\mu_{,,}\gamma_, + i\alpha_,\nu_{,,}}{\mu_{,,}\gamma_, - i\alpha_,\nu_{,,}}, & \mathfrak{d}_p' = \dfrac{2\alpha_,\gamma_,}{\mu_{,,}\gamma_, - i\alpha_,\nu_{,,}}, \end{cases}$$

wofür wir kurz schreiben

$$\mathfrak{r}' = \varrho' + i\varrho'', \quad \mathfrak{d}' = \delta' + i\delta'';$$

ferner wird jetzt

$$\mathfrak{e}_{,} = e^{iL_{,}} = e^{\frac{2\pi i \gamma_{,} l}{\tau \sqrt{a_{,}}}}, \quad \mathfrak{e}_{,,} = e_{,,} = e^{-\frac{2\pi \nu_{,,} l}{\tau \sqrt{a_{,,}}}}. \qquad 107')$$

Unter Rücksicht hierauf folgt jetzt aus den Gleichungen (102')

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \mathfrak{E}\frac{((\varrho+\varrho')\cos L_{,} + \varrho''\sin L_{,}) + i((\varrho-\varrho')\sin L_{,} + \varrho''\cos L_{,})}{((1+\varrho\varrho')\cos L_{,} + \varrho\varrho''\sin L_{,}) + i((1-\varrho\varrho')\sin L_{,} + \varrho\varrho''\cos L_{,}}, \\ \mathfrak{D} &= \mathfrak{E}e_{,,}\frac{\delta\delta' + i\delta\delta''}{((1+\varrho\varrho')\cos L_{,} + \varrho\varrho''\sin L_{,}) + i((1-\varrho\varrho')\sin L_{,} + \varrho\varrho''\cos L_{,})}.\end{aligned}\right\} \qquad 107'')$$

Beachtet man, daß wegen der an der zweiten Grenze stattfindenden totalen Reflexion $\varrho'^2+\varrho''^2=1$ ist, also $\varrho'=\cos L$, $\varrho''=\sin L$ gesetzt werden kann, so erhält man auch

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}\frac{(\varrho\cos L_{,} + \cos(L_{,}-L)) + i(\varrho\sin L_{,} - \sin(L_{,}-L))}{(\cos L_{,} + \varrho\cos(L_{,}-L)) + i(\sin L_{,} - \varrho\sin(L_{,}-L))}, \qquad 107''')$$

und durch Anwendung der ersten Formel (104') folgt hieraus bei reellem $\mathfrak{E}$ für die reflektierte reelle Gesamtamplitude

$$R^2 = E^2.$$

Die Reflexion an der Platte ist also eine totale, wenn gleiches an der zweiten Grenzfläche stattfindet; die Intensität der reflektierten Welle ist somit von der Natur und Dicke der Platte unabhängig, und diese Umstände influieren nur auf ihre Phase. —

In dem zweiten der erwähnten Fälle ist α, γ und $\alpha_{,,}, \gamma_{,,}$ reell, und wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß das erste und das dritte Medium identisch, somit $\alpha_{,,}=\alpha$, $\gamma_{,,}=\gamma$ ist; es ist dann auch $\mathfrak{r} = -\mathfrak{r}'$, während $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}'$ verschieden bleiben.

Weiter gilt, wenn man wie oben setzt,

$$\mathfrak{A}_{,} = \alpha\sqrt{\frac{a_{,}}{a}} = \mu_{,}, \quad \mathfrak{C}_{,} = -i\sqrt{\frac{\alpha^2 a_{,}}{a} - 1} = -i\nu_{,}:$$

$$\mathfrak{e}_{,} = e_{,} = e^{-\frac{2\pi\nu_{,} l}{\tau\sqrt{a_{,}}}}, \quad \mathfrak{e}_{,,} = e^{\frac{2\pi i\gamma l}{\tau\sqrt{a}}},$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{r}_s &= \frac{\alpha\gamma + i\mu_{,}\nu_{,}}{\alpha\gamma - i\mu_{,}\nu_{,}}, & \mathfrak{r}_p &= \frac{\mu_{,}\gamma + i\nu_{,}\alpha}{\mu_{,}\gamma - i\nu_{,}\alpha}, \\ \mathfrak{d}_s &= \frac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma - i\mu_{,}\nu_{,}}, & \mathfrak{d}_p &= \frac{2\alpha\gamma}{\mu_{,}\gamma - i\nu_{,}\alpha}, \\ \mathfrak{d}'_s &= \frac{-2i\mu_{,}\nu_{,}}{\alpha\gamma - i\mu_{,}\nu_{,}}, & \mathfrak{d}'_p &= \frac{-2i\mu_{,}\nu_{,}}{\mu_{,}\gamma - i\nu_{,}\alpha}.\end{aligned}\right\} \qquad 108)$$

Man erhält sonach aus (102')

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{E}\frac{\mathfrak{r}(e_{,}^{+1} - e_{,}^{-1})}{e_{,}^{+1} - \mathfrak{r}^2 e_{,}^{-1}}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{E}\mathfrak{e}_{,,}\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{d}'}{e_{,}^{+1} - \mathfrak{r}^2 e_{,}^{-1}}. \qquad 108')$$

Von besonderem Interesse sind die Werte der resultierenden, reflektierten und gebrochenen Amplituden; um dieselben für die Wellen (p) und (s) in einem Formelpaar darzustellen, wollen wir abkürzen

108″) $$\alpha\gamma = m_s, \quad \mu_, \nu_, = n_s, \quad \mu_, \gamma = m_p, \quad \nu_, \alpha = n_p$$

und erhalten dann bei reellem $\mathfrak{E}$ nach der ersten Formel (104′) leicht:

108‴) $$\begin{cases} R^2 = E^2 \dfrac{(m^2 + n^2)^2 (e_,^{+1} - e_,^{-1})^2}{(m^2 - n^2)^2 (e_,^{+1} - e_,^{-1})^2 + 4 m^2 n^2 (e_,^{+1} + e_,^{-1})^2}, \\ D^2 = E^2 \dfrac{16\, m^2 n^2}{(m^2 - n^2)^2 (e_,^{+1} - e_,^{-1})^2 + 4 m^2 n^2 (e_,^{+1} + e_,^{-1})^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln enthalten zwei Resultate von allgemeinem Interesse. Einmal erscheint die Dicke l des Medium (1) nur in Exponentialgrößen, die Intensitäten sind also, abweichend von den früheren Resultaten, nicht periodische Funktionen von l, sondern R/E nimmt mit wachsendem l von Null bis Eins dauernd zu, D/E umgekehrt von Eins bis Null ab. Sodann enthält die Exponentialgröße $e_,$ den Exponenten $2\pi\nu_, l / \tau \sqrt{a_,}$, der bei gleichem l und $\nu_,$ mit wachsendem τ abnimmt. Es folgt hieraus, daß bei abnehmendem D das blaue, bei abnehmendem R das rote Ende des Spektrums in seiner Wirkung früher unmerklich wird.

Die Beobachtung der bezüglichen Erscheinungen kann man einfach so anstellen, daß man zwei gleiche rechteckige, aber nicht notwendig gleichschenkelige Prismen aus derselben Substanz, deren Hypothenusenflächen sehr schwach gekrümmt sind, mit letzteren so gegeneinander legt, daß sie zusammen ein Parallelepipedon bilden. Läßt man auf die Zwischengrenze weißes Licht so auffallen, daß an ihr Totalreflexion stattfindet, so zeigt die Beobachtung der Reflexion an der Berührungsstelle einen dunkeln Fleck mit bläulichem, die der Brechung einen hellen Fleck mit rötlichem Rande, aber keine hellen und dunkeln oder farbigen Ringe darum, wie dies die Formeln (108‴) aussagen.[36])

Das Interesse dieser Experimente liegt vornehmlich in dem durch sie gelieferten Nachweis, daß, wie es die Theorie verlangt, bei sogenannter totaler Reflexion im zweiten Medium doch Schwingungen stattfinden. Während nämlich deren direkte Beobachtung durch die normal zur Grenze überaus schnell abnehmende Intensität jener Schwingungen verhindert wird, ist hier eine indirekte dadurch ermöglicht, daß die im genäherten dritten Medium durch jene Schwingungen erregten gewöhnlichen Wellen sich ohne Schwächung fortpflanzen, und somit ohne Schwierigkeit nachgewiesen werden können.

§ 16. Interferenzerscheinungen an planparallelen Platten von durchsichtiger krystallinischer Substanz in polarisiertem Lichte. Erscheinungen in der Nähe der optischen Axen.

Wir haben uns bei den Betrachtungen des vorigen Paragraphen auf isotrope Medien beschränkt, weil die dort behandelten Erscheinungen an planparallelen Platten bei Krystallen nur quantitative Änderungen erfahren, die nicht soviel allgemeines Interesse besitzen, daß sich die Entwickelung der strengen Formeln für Krystalle lohnte. Was dagegen Krystallplatten von eigenartigen optischen Erscheinungen zeigen, gestattet eine für die bei weitem meisten Zwecke ausreichende Darstellung durch eine nur angenäherte Theorie, deren Grundformel sich ohne weiteres von isotropen Medien auf Krystalle übertragen läßt.

Wir betrachten eine planparallele Platte aus einem beliebigen durchsichtigen inaktiven Krystall von der Dicke l, die auf beiden Seiten von dem gleichen Medium, etwa von Luft umgeben ist. Auf die eine ihrer Grenzflächen falle unter einem Winkel, der gewöhnliche Reflexion gestattet, eine ebene homogene Welle einfarbigen Lichtes; es entstehen dann im Innern der Platte zwei Wellen (o) und (e), die sich in verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen und mit gleicher Fortpflanzungsrichtung, aber mit einerPhasendifferenz aus der zweiten Grenzfläche austreten.

Die beiden Wellen im Innern der Platte sind nach dem Inhalt von § 8 lineär polarisiert, aber ihre Polarisationsrichtungen sind nicht notwendig normal zu einander, da ihre Fortpflanzungsrichtungen nicht zusammenfallen. Die beiden austretenden Wellen sind nach § 12 gleichfalls lineär polarisiert, aber auch dann nicht notwendig normal zu einander, wenn die Wellen im Innern der Platte diese Eigenschaft haben, da ja die Polarisationsrichtungen bei der Brechung gedreht werden.

Zu einander normale Polarisationsrichtungen treten einerseits bei normalem Einfall auf, andererseits dann, wenn die Einfallsebene die beiden in der Platte fortgepflanzten Strahlen enthält; denn in letzterem Falle ist die eine Polarisationsrichtung notwendig parallel, die andere normal zur Einfallsebene, und dies Verhältnis kann sich nach Symmetrie auch beim Austritt aus der Platte nicht ändern. Wir wollen uns weiterhin auf diese Fälle zu einander normaler Polarisationsrichtungen beschränken, weil dieselben besondere praktische Bedeutung besitzen, und weil auch im allgemeinen Fall die Polarisationsrichtungen meist nahe zu einander senkrecht bleiben.

Die auf die Platte fallende Schwingung möge dargestellt werden durch ihre komplexen Komponenten $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach den Polarisationsrichtungen der in der Platte fortgepflanzten ordinären und extraordinären Welle; wir setzen

109) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{E}_o e^{iT}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{E}_e e^{iT},$$

wobei $T = 2\pi t/\tau$ ist, und t von einem beliebigen Anfang gerechnet wird. Die aus der Platte austretenden Komponenten $\mathfrak{u}_d$ und $\mathfrak{v}_d$ sind dann bei Vernachlässigung der Einwirkung der Reflexionen an den Grenzflächen nach S. 651 gegeben durch

109′) $$\mathfrak{u}_d = \mathfrak{E}_o e^{iT_o}, \quad \mathfrak{v}_d = \mathfrak{E}_e e^{iT_e},$$

wobei

$$T_o = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{l\gamma_o}{\omega_o}\right), \quad T_e = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{l\gamma_e}{\omega_e}\right)$$

ist, und ω und γ die frühere Bedeutung haben.

Werden die beiden Wellen mit einem Analysator aufgefaßt, dessen Polarisationsebene das Azimut b gegen die ordinäre Polarisationsrichtung (o) in der Platte hat, so resultiert bei Vernachlässigung der Schwächungen durch Reflexionen und einer gemeinsamen Phasenänderung infolge des nach dem Austritt aus der Platte zusammen durchmessenen Weges eine Schwingung mit dem Vektor

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{E}_o e^{iT_o} \cos b + \mathfrak{E}_e e^{iT_e} \sin b,$$

deren komplexe Amplitude $\mathfrak{A}$ gegeben ist durch

109″) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{E}_o e^{-iL_o} \cos b + \mathfrak{E}_e e^{-iL_e} \sin b,$$

wo

109‴) $$\frac{2\pi l\gamma_o}{\tau\,\omega_o} = L_o, \quad \frac{2\pi l\gamma_e}{\tau\,\omega_e} = L_e$$

gesetzt ist.

Für das Quadrat der reellen resultierenden Amplituden erhält man dann, indem man

$$\mathfrak{E}_o = E_o e^{-id_o}, \quad \mathfrak{E}_e = E_e e^{-id_e}, \quad L_o - L_e + d_o - d_e = \varDelta$$

setzt,

110) $$A^2 = E_o^2 \cos^2 b + E_e^2 \sin^2 b + 2\,E_o E_e \cos b \sin b \cos \varDelta,$$

und daraus folgt die Intensität der aus dem Analysator austretenden Welle durch Multiplikation mit $2\pi^2/\tau^2$.

Das Resultat zeigt, daß die ursprüngliche relative Verzögerung d_o und d_e der beiden Komponenten der einfallenden Welle infolge des Durchganges durch die Platte um $L_o - L_e$ vergrößert wird. Diese letztere Größe, deren strenger Wert nach dem Inhalt von § 11 überaus kompliziert ist, läßt sich durch eine Annäherung, die be-

nutzt, daß bei allen bekannten Krystallen die Geschwindigkeiten ω nur wenig mit der Richtung variieren, verhältnismäßig einfach ausdrücken. Denn man kann zunächst noch streng schreiben

$$L_o - L_e = \frac{2\pi l}{\tau} \frac{\gamma_o^2 \omega_e^2 - \gamma_e^2 \omega_o^2}{\omega_o \omega_e (\gamma_o \omega_e + \gamma_e \omega_o)}, \qquad 110')$$

und weiter, indem man $\gamma^2 = 1 - \alpha^2$ setzt und berücksichtigt, daß nach dem Brechungsgesetz für Wellennormalen $\alpha_o \omega_e = \alpha_e \omega_o$ ist, bei Beschränkung auf die erste Annäherung auch

$$L_o - L_e = \frac{\pi l}{\tau} \frac{\omega_e^2 - \omega_o^2}{\gamma_, \omega_,^3}, \qquad 110'')$$

wobei $\gamma_,$ und $\omega_,$ Mittelwerte von γ_o, γ_e und ω_o, ω_e bezeichnen. Hierin läßt sich aber nach den Formeln (51') der Zähler ausdrücken, und man erhält leicht

$$L_o - L_e = -\frac{\pi l}{\tau \gamma_,} \frac{a_1 - a_3}{\omega_,^3} \sin U' \sin U'', \qquad 110''')$$

wobei a_1, a_3 die extremen optischen Parameter der Substanz der Platte und U', U'' die Winkel ihrer optischen Axen gegen die mittlere Richtung der Wellennormalen in der Platte bezeichnen.

Fassen wir zunächst nur den Einfluß des schiefen Einfalls auf die Platte ins Auge, so erkennen wir, daß $\gamma_,$ nur in der Verbindung $l/\gamma_,$ auftritt, und daß somit, wenn das Gesetz für die Geschwindigkeiten ω das gleiche bleibt, ein vergrößerter Einfallswinkel einer Vergrößerung der Dicke der Platte äquivalent ist. Nachdem dies erkannt ist, können wir uns weiterhin auf normalen Einfall beschränken, also $\gamma_, = 1$ setzen. —

Der wichtigste spezielle Fall ist der, daß das einfallende Licht l i n e ä r p o l a r i s i e r t ist; wir rechnen sein Azimut in demselben Sinne, wie oben b, und bezeichnen es durch a, seine Amplitude durch E. Dann wird

$$\left. \begin{aligned} &E_o = E\cos a,\ \ E_e = E\sin a,\ \ d_o - d_e = 0,\ \ \varDelta = L_o - L_e \ \text{und} \\ &A^2 = E^2 [\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2 a \sin^2 b + 2\cos a \cos b \sin a \sin b \cos \varDelta]; \end{aligned} \right\} \qquad 111)$$

bei Einführung des Winkels

$$c = a - b$$

zwischen den Polarisationsebenen des Analysators und des Polarisators, der das einfallende Licht liefert, gilt auch

$$A^2 = E^2 [\cos^2 c - \sin 2a \sin 2b \sin^2 \tfrac{1}{2} \varDelta]. \qquad 111')$$

Hiermit ist das Gesetz, nach welchem die von einer gegebenen Platte gelieferte Intensität von der gegenseitigen Lage der Polari-

sationsebene der ordentlichen Welle in der Platte und derjenigen des Polarisators und des Analysators abhängt, einfach und anschaulich dargestellt. Wir knüpfen an dasselbe nur wenige Bemerkungen.

Beseitigt man die Platte, etwa indem man ihre Dicke l verschwinden läßt, so wird $\Delta = 0$, $A^2 = E^2 \cos^2 c$; der gleiche Wert resultiert, die Platte ist also ohne Wirkung, wenn a oder b gleich Null oder gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, d. h., wenn eine der Polarisationsebenen in der Platte mit derjenigen des Polarisators oder des Analysators zusammenfällt; das Maximum ihrer Wirkung übt die Platte dagegen, wenn a und b gleich $\pm\frac{1}{4}\pi$ sind, d. h., wenn Analysator und Polarisator parallel oder gekreuzt sind, und die Polarisationsebenen in der Platte die Winkel $\pm\frac{1}{4}\pi$ mit ihnen einschließen. In diesen Positionen werden zumeist die Beobachtungen angestellt, und es gilt bei parallelen Polarisationsapparaten die Formel

111'') $$A_0^2 = E^2(1 - \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta) = E^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\Delta,$$

bei gekreuzten

111''') $$A_{{}^1\!/_2\pi}^2 = E^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta;$$

hieraus folgt

$$A_0^2 + A_{{}^1\!/_2\pi}^2 = E^2,$$

was sich als ein spezieller Fall darstellt der allgemeinen Beziehung

111'''') $$A_c^2 + A_{c+{}^1\!/_2\pi}^2 = E^2,$$

die sich leicht in Worte fassen läßt. —

Da Δ mit der Periode τ indirekt proportional ist, so sind, auch wenn man die nicht allzu großen Wechsel der Geschwindigkeiten ω mit der Farbe ignoriert, die aus dem Analysator austretenden Intensitäten von der Farbe des einfallenden Lichtes abhängig; hieraus folgt aber, daß einfallendes weißes Licht im allgemeinen gefärbt, und einfallendes gefärbtes Licht mit veränderter Farbe aus dem Analysator austritt. Für die Intensität eines durch die Platte gehenden Gemisches gilt nach dem S. 649 Gesagten allgemein

112) $$I = \sum I_n (\cos^2 c - \sin 2a \sin 2b \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta_n),$$

wobei die I_n die ursprünglichen Intensitäten der Bestandteile bezeichnen, denen auch verschiedene Δ_n entsprechen. Schreibt man diese Formel, indem man a und b als von der Farbe unabhängig ansieht,

112') $$I = \cos^2 c \sum I_n - \sin 2a \sin 2b \sum I_n \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta_n,$$

so erkennt man, daß das erste Glied eine Mischung in demselben relativen Verhältnis, wie das einfallende Licht, und somit weißes Licht darstellt, wenn weißes einfällt; daß das zweite aber im allgemeinen

ein Gemisch anderer Zusammensetzung repräsentiert. In den beiden oben benutzten Hauptpositionen ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{c} I_0 = \sum I_n \cos^2 \frac{1}{2} \varDelta_n, \quad I_{\frac{1}{2}\pi} = \sum I_n \sin^2 \frac{1}{2} \varDelta_n, \\ I_0 + I_{\frac{1}{2}\pi} = \sum I_n; \end{array}\right\} \qquad 112')$$

also

hieraus folgt, daß, wenn weißes Licht einfällt, das in diesen Fällen gelieferte Licht komplementär zu einander gefärbt ist. Analoge Bedeutung hat die aus (111'''') folgende allgemeinere Formel

$$I_c + I_{c+\frac{1}{2}\pi} = \sum I_n. \qquad 112'')$$

Es erübrigt noch die Untersuchung des Einflusses, den die Orientierung der Platte gegen den Krystall auf die Erscheinungen ausübt. Diesen Einfluß übersieht man am leichtesten, wenn man sich eine Hohlkugel von gegen ihre konstante Dicke l sehr großem Radius aus dem benutzten Krystall hergestellt, in ihrem Mittelpunkt eine Lichtquelle mit einem nach den verschiedenen Seiten hin drehbaren Polarisator aufgestellt und das von ihr ausgehende und die Hohlkugel normal durchsetzende Licht außerhalb mit einem Analysator aufgefangen denkt. Dann sind U' und U'' unmittelbar durch die Winkel des Einfallslotes an der untersuchten Stelle gegen die optischen Axen O' und O'' gegeben, die Polarisationsebene (o) ist die Halbierungsebene des körperlichen Winkels zwischen den beiden Ebenen durch O', O'' und das Einfallslot, die Polarisationsebene (e) steht hierzu normal; ω_r mag als von der Richtung unabhängig gelten.

Nach (110''') ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$\varDelta = -\frac{\pi l}{\tau} \frac{a_1 - a_3}{\omega_r^3} \sin U' \sin U'',$$

die Kurven gleicher relativer Verzögerung sind also durch die Gleichung

$$\sin U' \sin U'' = \text{Const.}$$

gegeben; sie haben ungefähr die Gestalt von auf der Kugelschale konstruierten Cassini'schen Kurven um die Austrittsstellen der optischen Axen als Pole und werden wirklich zu solchen, wenn die optischen Axen einander sehr nahe liegen, und man ein so kleines Bereich in ihrer Umgebung betrachtet, daß man innerhalb desselben von der Krümmung der Kugelschale absehen kann.

Ist der Krystall einaxig, so ist $U' = U''$, und die letzte Gleichung geht über in

$$\sin^2 U = \text{Const.};$$

hier werden die Kurven gleicher relativer Verzögerung zu Kreisen um die optische Axe. Betrachtet man nur die unmittelbare Um-

gebung der optischen Axe, so kann man dort die Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes als überall gleich ansehen, und es gilt nach (111′), indem man $\sin U$ mit U vertauscht,

$$113)\quad A^2 = E^2 \left[\cos^2 c - \sin 2a \sin 2(a-c) \sin^2\left(\frac{\pi l U^2 (a_1 - a_3)}{2 \tau \omega_2^3}\right)\right];$$

dabei ist nach dem oben Gesagten U die Poldistanz der betrachteten Stelle, a ihre gegen die Ebene des Polarisators gemessene geographische Länge.

Läßt man die Polarisationsebene des Analysators einmal parallel, einmal normal zu der des Polarisators gestellt sein, setzt man also c einmal gleich Null, einmal gleich $\frac{1}{2}\pi$, so erhält man für einfarbiges Licht

$$113')\quad \begin{cases} A_0^2 = E^2 [1 - \sin^2 2a \sin^2 m U^2], \\ A_{\frac{1}{2}\pi}^2 = E^2 \sin^2 2a \sin^2 m U^2, \end{cases}$$

worin m eine Abkürzung ist; hieraus folgt für weißes Licht

$$113'')\quad \begin{cases} I_0 = \sum I_n - \sin^2 2a \sum I_n \sin^2 m_n U^2, \\ I_{\frac{1}{2}\pi} = \sin^2 2a \sum I_n \sin^2 m_n U^2. \end{cases}$$

Die Diskussion dieser Resultate unter Heranziehung der Formeln (105′′′′) zeigt, daß eine Erscheinung entsteht, analog den Newtonschen Ringen im durchgehenden und im reflektierten Lichte, aber durchzogen von einem farblosen Kreuz, das im ersten Falle hell, im zweiten dunkel ist, und dessen Arme resp. parallel und normal zu den Polarisationsrichtungen der beiden Polarisatoren stehen.

Für Werte von c, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, ist eine ähnliche Vergleichung möglich; man erhält hier naturgemäß zwei farblose Kreuze, die um den Winkel c gegeneinander gedreht sind.

Für den Fall, daß der untersuchte Krystall optisch zweiaxig ist, werde nur die unmittelbare Umgebung der einen optischen Axe O' näher untersucht. Schließt die Polarisationsrichtung p_1 des Polarisators den Winkel f, die p_2 des Analysators den Winkel g, die Ebene des Meridians durch den betrachteten Punkt den Winkel h mit der Ebene (O', O'') der optischen Axen ein, wobei alle drei Winkel im gleichen Sinne, und zwar speziell so gerechnet werden mögen, daß sie gleich π werden, wenn die bezügliche Richtung nach der Seite von O'' hin fällt, so schließt die Polarisationsrichtung der ordinären Welle den Winkel $\frac{1}{2}h$ mit der Ebene (O', O'') ein, und es ist

$$a = f - \tfrac{1}{2}h, \quad b = g - \tfrac{1}{2}h, \quad c = g - f;$$

hieraus folgt, daß nach (111′) und wegen $U'' = 2o$ auch gilt

$$A^2 = E^2 \left[\cos^2(g-f) - \sin(2f-h)\sin(2g-h)\sin^2\left(\frac{\pi l U' \sin 2o}{2\,\tau\,\omega_v^3}(a_1 - a_3)\right)\right]. \quad 114)$$

In den beiden speziellen Fällen paralleler und gekreuzter Polarisatoren ergiebt dies

$$\left.\begin{aligned} A_0^2 &= E^2[1 - \sin^2(2f-h)\sin^2(m\,U'\sin 2o)], \\ A_{1/2\pi}^2 &= E^2\sin^2(2f-h)\sin^2(m\,U'\sin 2o), \end{aligned}\right\} \quad 114')$$

wobei wieder m die frühere Abkürzung ist; hieraus folgt dann, wenn statt einfarbigem weißes Licht einfällt, und dieselbe Richtung O' für alle Farben eine optische Axe darstellt,

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \sum I_n - \sin^2(2f-h)\sum I_n\sin^2(m_n U'\sin 2o), \\ I_{1/2\pi} &= \sin^2(2f-h)\sum I_n \sin^2(m_n U'\sin 2o). \end{aligned}\right\} \quad 114'')$$

Diese Formeln, welche den in (113'') enthaltenen sehr ähnlich sind, zeigen, daß die Erscheinung in der Nähe der einen optischen Axe eines zweiaxigen Krystalles gleichfalls ein System farbiger Ringe bildet, das indessen ersichtlich bezüglich der Ringöffnungen ein anderes Gesetz befolgt, als bei einaxigen Krystallen und bei dem Newton'schen Apparat, und durchsetzt wird von einem einzigen farblosen Streifen, der durch $h = 2f$ (resp. $h = 2f + \pi$) gegeben wird und im ersten Falle hell, im zweiten dunkel ist.

Für Werte c, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, ergiebt die aus (114) zu gewinnende allgemeine Formel zwei durch $h = 2f$ und $h = 2g$ bestimmte farblose Streifen.

Fallen die optischen Axen für die verschiedenen Farben nicht zusammen, wie das bei zweiaxigen Krystallen die Regel ist, so verlieren die obigen Formeln für weißes Licht ihre einfache Bedeutung, und es müssen jetzt die Winkel a, b, f, g, h, o, U' und U'' für jede Farbe auf andere Richtungen als optische Axen bezogen werden. Infolge hiervon treten an die Stelle der zuletzt erwähnten dunkeln oder hellen farblosen Streifen solche, die entweder ganz, oder wenigstens an ihren Rändern, eigentümlich gefärbt sind, und die Ringsysteme verlieren jede Ähnlichkeit mit dem Newton'schen Phänomen, enthalten z. B. gar nicht mehr Kurven konstanter Färbung.

Eine rechnerische Verfolgung dieser Veränderungen bietet bisher noch große Schwierigkeiten; die klarste Vorstellung liefert eine graphische Methode, welche die Systeme der Maxima und der Minima von I für einige der Hauptfarben superponiert und aus deren gegenseitiger Lage auf die eintretenden Erscheinungen schließt. —

Die bisherigen Betrachtungen setzten eine aus dem Krystall geschliffene Kugelschale und eine in ihrem Centrum befindliche

Lichtquelle voraus; je kleiner aber das Bereich ist, auf dem die Erscheinungen verfolgt werden, um so weniger wird die Krümmung der Kugelschale einen merklichen Einfluß auf sie üben, um so genauer werden die oben erhaltenen Formeln das wiedergeben, was man an einer planparallelen Platte wahrnimmt, wenn man in von der normalen wenig abweichenden Richtungen durch dieselbe nach der Lichtquelle hinsieht. Hierdurch erkennt man, daß die vorstehenden Entwickelungen eine angenäherte Theorie der Interferenzerscheinungen liefern, welche Krystallplatten im konvergenten polarisierten Lichte zeigen.

Die große praktische Wichtigkeit dieser Phänomene beruht besonders darauf, daß sie die Hilfsmittel bieten zu einer sehr bequemen und der Genauigkeit nach vielen Anforderungen entsprechenden Bestimmung der optischen Konstanten eines Krystalles, bei welcher die Differenzen der Hauptgeschwindigkeiten als Größen erster Ordnung neben deren absoluten Werten betrachtet werden.[37])

Da die Mittelpunkte der oben besprochenen Ringsysteme die optischen Axen charakterisieren, so kann man zunächst die Lage dieser letzteren bestimmen, wenn man aus dem Krystall Platten von bekannter Orientierung hergestellt hat, welche eines oder auch zwei jener Ringsysteme zeigen. Zwar stellen sich die Erscheinungen in verzerrter Form dar, wenn die Platte nicht genau normal zu einer Axe geschliffen ist, aber es gelingt ohne Schwierigkeit, den Einfluß dieser Neigung in Rechnung zu ziehen, wenn nur durch eine der für isotrope Medien brauchbaren Methoden zuvor ein mittlerer Wert der Lichtgeschwindigkeit im Krystall, resp. des Brechungsindex bestimmt worden ist. So läßt sich also die Richtung einer jeden optischen Axe in relativ einfacher Weise feststellen; gleichzeitig giebt die Anzahl der farblosen Streifen, welche das Ringsystem schneiden, nach S. 660 u. f. darüber Aufschluß, ob sie die einzig vorhandene ist, d. h., ob es sich um einen optisch-einaxigen oder -zweiaxigen Krystall handelt, — eine Feststellung, die sich immer dann nützlich erweist, wenn die Krystallform nicht so ausgebildet ist, daß ihre Gesetzmäßigkeiten zur Entscheidung dieser Frage herangezogen werden können. In vielen Fällen kann man außerdem aus der Farbenverteilung im Ringsystem darauf schließen, wie die den verschiedenen Farben entsprechenden optischen Axen gegeneinander liegen, und dies gemäß den Erörterungen von S. 584 u. f. zur Feststellung des Systemes benutzen, dem der optisch-zweiaxige Krystall angehört.

Da weiter der scheinbare Durchmesser der Ringe einer bestimmten Ordnung, außer von der Dicke der Platte und dem mitt-

leren Wert $\omega_, = \sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + a_3)}$ der Lichtgeschwindigkeit in derselben, bei einaxigen Krystallen von der Differenz $(a_1 - a_3)$, bei zweiaxigen von dem Produkt $(a_1 - a_3)\sin 2\,o$ abhängt, und $\omega_,$, wie $2\,o$, nach dem Vorstehenden als bekannt angesehen werden darf, so führt eine Messung der scheinbaren Ringdurchmesser zur Kenntnis der Differenz $(a_1 - a_3)$. Berücksichtigt man die Formeln (43′), welche den Winkel o definieren, so erkennt man, daß hierdurch genügende Daten gegeben sind, um alle drei Parameter a_1, a_2, a_3 für den untersuchten Krystall zu bestimmen, falls nur noch über das Vorzeichen der Differenz $(a_1 - a_3)$, das durch das bisherige offen bleibt, Entscheidung getroffen ist. Daß letzteres mit Leichtigkeit geschehen kann, wird sich sogleich ergeben. —

Nächst dem oben behandelten Falle einfallenden lineär polarisierten Lichtes interessiert besonders der des einfallenden zirkular polarisierten; wir erhalten ihn aus dem allgemeinsten vorausgesetzten, indem wir

$$E_o = E_e = E \text{ und } d_o - d_e = \pm \tfrac{1}{2}\pi$$

setzen. Legen wir E_o in die $+X$-, E_e in die $+Y$-, die Wellennormale in die $+Z$-Axe, so entspricht das obere Vorzeichen rechts, das untere links rotierendem Licht.

Bei Benutzung dieser Verfügungen resultiert aus (110)

$$A^2 = E^2[1 \mp \sin 2b \sin(L_o - L_e)], \tag{115}$$

worin nun für $L_o - L_e$, je nachdem es sich um ein- oder um zweiaxige Krystalle handelt, der Wert

$$-\frac{\pi(a_1 - a_3)\,l \sin^2 U}{\tau\,\omega_,^3} \quad\text{oder}\quad -\frac{\pi(a_1 - a_3)\,l \sin U' \sin U''}{\tau\,\omega_,^3}$$

einzusetzen ist. Von der spezielleren Diskussion dieses Resultates mag abgesehen werden; dagegen ist die eine Bemerkung von Interesse, daß, abweichend von dem bei einfallendem lineär polarisierten Licht Geltenden, hier die Erscheinung nicht nur von der Größe, sondern auch von dem Vorzeichen der Phasendifferenz $L_o - L_e$ abhängig wird.

Da nun diese Phasendifferenz mit $(a_1 - a_3)$ proportional ist, so muß die Beobachtung der Krystallplatte mit einfallendem zirkularpolarisierten Licht unter geeigneten Umständen das Vorzeichen der Differenz $(a_1 - a_3)$ zu entscheiden gestatten. Hiermit ist die Möglichkeit für die Ausfüllung der oben noch gebliebenen Lücke nachgewiesen. —

Die Ausdehnung der vorstehenden Betrachtungen auf den Fall, daß mehrere parallele Platten aus krystallinischer Substanz hinter-

einander von einer Lichtwelle durchsetzt werden, bietet dann nicht die geringsten Schwierigkeiten, wenn die Platten so orientiert sind, daß die Polarisationsrichtungen der hindurchgehenden Wellen parallel liegen. Legt man in die eine von ihnen die X-, in die andere die Y-Axe, und bezeichnet man die den verschiedenen Platten entsprechenden Werte von ω_x und ω_y, γ_x und γ_y und daher nach (109''') von L_x und L_y durch obere Indices, so bleibt die Formel (110) gültig, wenn man nur für $\varDelta$ den allgemeineren Wert

115') $$\varDelta = \sum_i (L_x^{(i)} - L_y^{(i)}) + d_x - d_y$$

einsetzt.

Der wichtigste Fall ist der nur zweier Platten, aus derselben Substanz in gleicher Orientierung hergestellt, die entweder parallel oder gekreuzt orientiert sind und normal von der einfallenden Welle getroffen werden.

Bei der ersteren Orientierung gilt, wenn man wieder die Bezeichnungen (o) und (e) einführt und die Richtung der ordinären Polarisation in der ersten Platte mit der X-Axe zusammenfallen läßt,

115'') $$\varDelta = \frac{2\pi}{\tau}(l_1 + l_2)\left(\frac{1}{\omega_o} - \frac{1}{\omega_e}\right),$$

bei der zweiten

115''') $$\varDelta = \frac{2\pi}{\tau}(l_1 - l_2)\left(\frac{1}{\omega_o} - \frac{1}{\omega_e}\right);$$

im ersten Falle wirkt also die Kombination wie eine Platte von der Dicke $(l_1 + l_2)$, im zweiten wie eine von der Dicke $(l_1 - l_2)$.

Auf dem letzteren Resultat beruht ein wichtiges Instrument, bestimmt, die zu einander normalen Komponenten einer beliebigen transversalen Schwingung um eine genau bestimmbare Größe gegeneinander zu beschleunigen oder zu verzögern. Es besteht aus der Kombination zweier planparalleler Platten von identischer Natur, die hintereinander, und zwar gegeneinander gekreuzt, aufgestellt sind, und von denen die eine die konstante Dicke l_1, die andere die in meßbarer Weise veränderliche l_2 besitzt. Die Veränderlichkeit der zweiten Platte wird dadurch bewirkt, daß dieselbe aus zwei aufeinander gelegten Keilen von gleichen und sehr kleinen Winkelöffnungen zusammengesetzt ist, die in genau meßbarer Weise so aneinander hingeschoben werden können, daß ihre äußeren Flächen dabei einander parallel bleiben.

Nach dem S. 545 Gesagten kann man mit Leichtigkeit diejenigen Stellungen der Keile auffinden, bei welchen die gegenseitige Verzögerung der beiden durch das System gehenden Komponenten ein

ganzes Vielfaches von π beträgt, da bei dieser einfallendes lineär polarisiertes Licht auch lineär polarisiert austritt; demgemäß läßt sich das Instrument ohne Bestimmung von Dicken oder Keilwinkeln leicht und genau graduieren. Dasselbe eignet sich besonders zur Messung von Verzögerungen zwischen den Komponenten einer gegebenen transversalen Welle, die dadurch auszuführen ist, daß man durch Mitwirkung des beschriebenen Systemes die vorhandene Verzögerung zu Null macht, — wie man sagt, sie kompensiert. Wegen dieser wichtigsten Anwendung wird das beschriebene und von BABINET angegebene Instrument als BABINET'scher Kompensator bezeichnet.[38])

§ 17. Die Veränderung der optischen Eigenschaften von Krystallen bei der Einwirkung von Temperaturänderungen, von Deformationen und von elektrischen Kräften. Der Einfluß einer Bewegung auf das optische Verhalten isotroper Körper.

Die optischen Eigenschaften der nicht aktiven Krystalle sind Funktionen einer Reihe von Einwirkungen, denen diese Körper ausgesetzt werden können, und da die Bestimmungen der optischen Konstanten im allgemeinen mit einer ziemlich großen Genauigkeit ausführbar sind, so ist die Kenntnis der bezüglichen Erscheinungen im Vergleich mit der anderer verwandter relativ weit vorgeschritten. Die an den Krystallen hervorgebrachten optischen Wirkungen zerfallen in zwei Klassen; zur ersten gehören solche, deren Symmetrie mit der Symmetrie der für nicht aktive Krystalle charakteristischen und durch (38) gegebenen potentiellen Energie φ_a vereinbar ist, und die demgemäß die Eigenschaften der inaktiven Krystalle nur quantitativ, nicht aber qualitativ verändern, zur zweiten solche, für welche das Gegenteil stattfindet. Wir beschränken uns hier zunächst auf die Betrachtung der ersteren Einwirkungen, zu denen Temperaturerhöhungen, elastische Deformationen und elektrische Kräfte gehören; von den letzteren soll die Wirkung einer Bewegung des Mediums am Ende dieses Paragraphen, die eines Magnetfeldes im nächsten besprochen werden. —

Nach dem Gesagten ist im folgenden, wie für den Krystall im natürlichen, so auch im — wie wir kurz sagen wollen — veränderten Zustande, eine optische potentielle Energie φ charakteristisch, deren Gesetz die Form besitzt

$$2\,\varphi = a_{11}\,\xi^2 + a_{22}\,\eta^2 + a_{33}\,\zeta^2 + 2\,a_{23}\,\eta\,\zeta + 2\,a_{31}\,\zeta\,\xi + 2\,a_{12}\,\xi\,\eta; \qquad 116)$$

wir wollen festsetzen, daß der vorstehende Ausdruck für den ver-

änderten Zustand gilt, und daß er sich auf diejenigen Koordinatenaxen bezieht, in Bezug auf welche im ursprünglichen Zustand galt

116') $$2\varphi^0 = a_1^0\,\xi^2 + a_2^0\,\eta^2 + a_3^0\,\zeta^2;$$

daß dagegen, auf die neuen optischen Symmetrieaxen bezogen, φ die Gestalt annimmt

116'') $$2\varphi = a_1\,\xi_0^2 + a_2\,\eta_0^2 + a_3\,\zeta_0^2.$$

Die Untersuchung über die Veränderungen, welche durch eine der oben genannten Einwirkungen entstehen, kommt dann heraus auf die Bestimmung des Zusammenhanges zwischen den Konstanten a_{hk}, resp. a_i des neuen und denjenigen a_i^0 des alten Zustandes; auf die einzelnen Erscheinungen, welche der veränderte Krystall zu zeigen vermag, ist dagegen nicht einzugehen nötig, weil ihre Gesetze aus dem Ansatz (116) für φ — gleichviel, welche Natur seine Konstanten a_{hk} besitzen, — bereits in den vorhergehenden Paragraphen dieses Teiles ausführlich entwickelt sind. —

Wir wollen zunächst annehmen, daß das Gesetz, welches die a_{hk} mit den a_i^0 und den auf den Krystall einwirkenden Umständen verbindet, gegeben sei, und eine allgemeine Untersuchung über die unter diesen Umständen sich ergebende neue Lage der optischen Symmetrieaxen und die Größe der neuen Parameter a_i anstellen, die keine andere spezielle Annahme über dieses Gesetz benutzt, als die in vielen und wichtigen Fällen erfüllte, daß die bewirkten Veränderungen der optischen Eigenschaften gering sind, oder präciser ausgedrückt, daß die Größen

$$a_{11} - a_1^0,\quad a_{22} - a_2^0,\quad a_{33} - a_3^0,\quad a_{23},\ a_{31},\ a_{12}$$

neben den a_1^0, a_2^0, a_3^0 als von erster Ordnung betrachtet werden dürfen.[39])

Hierzu gehen wir aus von der S. 577 erörterten Thatsache, daß das veränderte optische Verhalten des Krystalles für eine bestimmte Farbe vollständig charakterisiert ist durch das ihr entsprechende Polarisationsovaloid von der Gleichung

117) $$\varrho^2 = a_{11}\,\alpha^2 + a_{22}\,\beta^2 + a_{33}\,\gamma^2 + 2\,a_{23}\,\beta\gamma + 2\,a_{31}\,\gamma\alpha + 2\,a_{12}\,\alpha\beta,$$

in der ϱ den Radiusvektor bezeichnet, welcher den Richtungskosinus α, β, γ entspricht. Die Hauptaxen dieses Ovaloids fallen dann mit den dem Krystall für die bestimmte Farbe entsprechenden optischen Symmetrie- oder Polarisationsaxen zusammen, und die extremen Werte ϱ^2 von ϱ^2, die ihnen zugehören, sind mit den Parametern a_i identisch.

Bezeichnet man mit Λ den LAGRANGE'schen Multiplikator, so lauten die Bedingungen für die Maxima und Minima von ϱ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\bar{\alpha} + a_{12}\bar{\beta} + a_{13}\bar{\gamma} - \Lambda\bar{\alpha} = 0\,, \\ a_{21}\bar{\alpha} + a_{22}\bar{\beta} + a_{23}\bar{\gamma} - \Lambda\bar{\beta} = 0\,, \\ a_{31}\bar{\alpha} + a_{32}\bar{\beta} + a_{33}\bar{\gamma} - \Lambda\bar{\gamma} = 0\,; \end{aligned}\right\} \qquad 117')$$

sie ergeben bei Zusammenfassung mit den Faktoren $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ nach (117) die Beziehung

$$\Lambda = \bar{\varrho}^2 \qquad 117'')$$

und liefern durch Elimination von $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ die kubische Gleichung für ϱ^2

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \bar{\varrho}^2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \bar{\varrho}^2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \bar{\varrho}^2 \end{vmatrix} = 0\,,$$

die sich auch schreiben läßt:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \bar{\varrho}^2)(a_{22} - \bar{\varrho}^2)(a_{33} - \bar{\varrho}^2) + 2\,a_{23}\,a_{31}\,a_{12} \\ = (a_{11} - \bar{\varrho}^2)\,a_{23}^2 + (a_{22} - \bar{\varrho}^2)\,a_{31}^2 + (a_{33} - \bar{\varrho}^2)\,a_{12}^2\,. \end{aligned}\right\} \qquad 117''')$$

Setzt man die drei Wurzeln für $\bar{\varrho}^2$ successive in das System (117') ein, so erhält man dadurch die Gleichungen zur Bestimmung der ihnen entsprechenden $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$. —

Ist der Krystall optisch-zweiaxig, und sind die Differenzen $a_2^0 - a_3^0$, $a_3^0 - a_1^0$, $a_1^0 - a_2^0$ von derselben Größenordnung, wie die a_i^0 selbst, d. h., sind die oben angeführten Größen $a_{11} - a_1^0, \ldots a_{12}$ auch gegen sie von erster Ordnung, so läßt sich die Gleichung (117''') leicht durch Annäherung lösen; denn sie wird befriedigt durch die Annahme, daß sich die drei Wurzeln $\bar{\varrho}_1^2$, $\bar{\varrho}_2^2$, $\bar{\varrho}_3^2$ nur um Glieder zweiter Ordnung von a_{11}, a_{22}, a_{33} unterscheiden.

Geht man dann mit der ersten Wurzel $\bar{\varrho}_1^2$ in das System (117') ein, so erhält man aus der zweiten und dritten Formel das Resultat, daß $\bar{\beta}_1$ und $\bar{\gamma}_1$ erster Ordnung sind, daß also $\bar{\alpha}_1$ nur um ein Glied zweiter Ordnnng von Eins verschieden sein kann; berücksichtigt man dies und vernachlässigt die Glieder zweiter Ordnung, so findet man sogleich

$$\bar{\beta}_1 = \frac{a_{21}}{a_{11} - a_{22}}\,, \quad \bar{\gamma}_1 = \frac{a_{31}}{a_{11} - a_{33}}\,, \quad a_1 = a_{11}\,; \qquad 118)$$

und durch ähnliche Schlüsse ergiebt sich für die anderen Axen

118′)
$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{\gamma}_2 = \frac{a_{32}}{a_{22}-a_{33}}, & \bar{\alpha}_2 = \frac{a_{12}}{a_{22}-a_{11}}, & a_2 = a_{22}, \\ \bar{\alpha}_3 = \frac{a_{13}}{a_{33}-a_{11}}, & \bar{\beta}_3 = \frac{a_{23}}{a_{33}-a_{22}}, & a_3 = a_{33}. \end{array}\right.$$

Diese einfachen Resultate, welche die Axen des Polarisationsovaloides unter den vorausgesetzten Umständen nach Größe und Richtung vollständig bestimmen, lassen sich noch anders und vielleicht anschaulicher deuten. Es läßt sich nämlich zeigen, daß, wenn die gemachten Bedingungen erfüllt sind, das für den veränderten Zustand charakteristische Ovaloid (117), dessen Gleichung wir schreiben

118″) $$\varrho^4 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy,$$

aus dem ursprünglichen

$$\varrho_0^4 = a_1^0 x^2 + a_2^0 y^2 + a_3^0 z^2$$

erhalten werden kann durch drei unendlich kleine Dilatationen nach den Koordinatenaxen und durch drei unendlich kleine Drehungen um dieselben.

In der That, bezeichnet man mit α_i den Zuwachs des Parameters a_i^0, so erhält man zunächst durch die bloße Dilatation ein Ovaloid von der Gleichung

$$\varrho^4 = (a_1^0 + \alpha_1)x^2 + (a_2^0 + \alpha_2)y^2 + (a_3^0 + \alpha_3)z^2,$$

wobei nun die neuen Parameter a_i gegeben sind durch

118‴) $$a_i = a_i^0 + \alpha_i;$$

da weiter bei einer Drehung mit den Komponenten λ, μ, ν die Koordinaten x, y, z die Zuwachse

$$\delta x = y\nu - z\mu, \quad \delta y = z\lambda - x\nu, \quad \delta z = x\mu - y\lambda$$

erhalten, so folgt

$$\varrho^4 = (a_1^0 + \alpha_1)x^2 + (a_2^0 + \alpha_2)y^2 + (a_3^0 + \alpha_3)z^2 \\ + 2(a_2^0 - a_3^0)yz\lambda + 2(a_3^0 - a_1^0)zx\mu + 2(a_1^0 - a_2^0)xy\nu.$$

und die Vergleichung dieses Resultates mit (118″) ergiebt

$$a_{11} = a_1^0 + \alpha_1, \qquad a_{22} = a_2^0 + \alpha_2, \qquad a_{33} = a_3^0 + \alpha_3,$$
$$a_{23} = (a_2^0 - a_3^0)\lambda, \quad a_{31} = (a_3^0 - a_1^0)\mu, \quad a_{12} = (a_1^0 - a_2^0)\nu.$$

Bei Heranziehung der Beziehungen (118‴) erhält man aber schließlich

118⁗)
$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = a_{11}, \quad a_2 = a_{22}, \quad a_3 = a_{33} \\ \lambda = \frac{a_{23}}{a_{22}-a_{33}}, \quad \mu = \frac{a_{31}}{a_{33}-a_{11}}, \quad \nu = \frac{a_{12}}{a_{11}-a_{22}}, \end{array}\right.$$

was dem Sinn nach mit (118) und (118′) zusammenfällt. —

Indessen sind diese einfachsten Resultate wesentlich an die Voraussetzung geknüpft, daß die Differenzen der a_i^0 von derselben Größenordnung sind, wie die Parameter a_i^0 selbst, und sie verlieren daher jedenfalls alle oder zum Teil ihre Gültigkeit, wenn der Krystall optisch einaxig ist oder zum isotropen Körper degeneriert.

Handelt es sich um einen ursprünglich einaxigen Krystall, ist also $a_1^0 = a_2^0$, so sind nunmehr

$$a_{11} - a_1^0, \quad a_{22} - a_1^0, \quad a_{33} - a_3^0, \quad a_{23}, \; a_{31}, \; a_{12}$$

als Größen erster Ordnung nur neben $a_1^0 - a_3^0$ resp. $a_{11} - a_{33}$ oder $a_{22} - a_{33}$ zu betrachten.

Die Formel (117‴) zeigt dann, daß eine der Wurzeln, — sie heiße $\overline{\varrho_3^2}$, — wie früher, bis auf eine Größe zweiter Ordnung mit a_{33} übereinstimmt, daß die andern $\overline{\varrho_1^2}$ und $\overline{\varrho_2^2}$ sich aber um Größen erster Ordnung von a_{11} und a_{22} unterscheiden; denn macht man diese Verfügung, so besitzen die niedrigsten Glieder der Gleichung (117‴) die gleiche Ordnung.

Geht man nun mit der Annahme, daß $\overline{\varrho^2}$ sich um ein Glied erster Ordnung von a_{11} und von a_{22} unterscheidet, in die Formeln (117′), so ergiebt die letzte, daß $\overline{\gamma}$ für diese Wurzeln von erster Ordnung sein muß, und die beiden ersten Gleichungen vereinfachen sich bei Beschränkung auf die erste Ordnung zu

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \overline{\varrho^2})\,\overline{\alpha} + a_{12}\,\overline{\beta} &= 0\,, \\ a_{21}\,\overline{\alpha} + (a_{22} - \overline{\varrho^2})\,\overline{\beta} &= 0\,, \end{aligned}\right\} \qquad 119)$$

woraus folgt

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \overline{\varrho^2})(a_{22} - \overline{\varrho^2}) &= a_{12}^2 \\ \frac{a_{11} - \overline{\varrho^2}}{a_{22} - \overline{\varrho^2}} &= \frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}^2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad 119')$$

Die erste Gleichung ergiebt, wenn man $\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2} = r$ setzt,

$$\overline{\varrho^2} = \tfrac{1}{2}(a_{11} + a_{22} \pm r), \qquad 119'')$$

und die zweite wird dadurch zu

$$\frac{\overline{\beta}^2}{\overline{\alpha}^2} = \frac{a_{11} - a_{22} \mp r}{a_{22} - a_{11} \mp r},$$

resp. zu

$$\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \pm\,\frac{1}{2\,a_{12}}(a_{11} - a_{22} \mp r), \quad \text{oder} \quad \frac{2\,\overline{\alpha}\,\overline{\beta}}{\overline{\alpha}^2 - \overline{\beta}^2} = -\frac{2\,a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \qquad 119''')$$

wodurch vier Wurzeln $\overline{\beta}/\overline{\alpha}$ gegeben sind, die den Halbaxen $\overline{\varrho}_1$ und $\overline{\varrho}_2$ entsprechen.

Geht man dagegen von der Annahme aus, daß $\overline{\varrho^2}$ sich um ein Glied zweiter Ordnung von a_{33} unterscheidet, so ergeben die ersten beiden Gleichungen (117') wie früher, daß $\overline{\alpha}$ und $\overline{\beta}$ von der ersten Ordnung sein müssen, und daß demgemäß auch jetzt noch gilt

$$119'''') \qquad \overline{\alpha}_3 = \frac{a_{13}}{a_{33} - a_{11}}, \quad \overline{\beta}_3 = \frac{a_{23}}{a_{33} - a_{22}}.$$

Durch diese Resultate sind nun auch für optisch einaxige Krystalle Richtung und Größe der Ovaloidaxen für den veränderten Krystall relativ einfach bestimmt.

Bei regulären Krystallen versagt diese Näherungsmethode, und man ist hier im allgemeinen auf die strenge Behandlung der Formeln (117') in der S. 667 angedeuteten Weise angewiesen. Ausgenommen sind nur die besonders wichtigen Fälle, in denen man nach den Symmetrieverhältnisssen von vornherein angeben kann, welche Lage alle drei optischen Symmetrieaxen nach geschehener Einwirkung auf den Krystall besitzen werden. Kann man dies wenigstens für die eine Symmetrieaxe aussagen, so läßt sich, indem man die eine Koordinatenaxe in die Richtung jener Symmetrieaxe legt, die Gleichung für $\overline{\varrho^2}$ zu einer quadratischen machen.

In der That, ist die Z-Axe eine optische Symmetrieaxe, so muß für die beiden andern $\gamma = 0$ sein, das System (117') reduziert sich also auf

$$(a_{11} - \overline{\varrho^2})\overline{\alpha} + a_{12}\overline{\beta} = 0, \quad a_{21}\overline{\alpha} + (a_{22} - \overline{\varrho^2})\overline{\beta} = 0,$$

was mit (119) zusammenfällt und ebenso zu behandeln ist, wie jenes.

Bei isotropen Körpern bedarf es nicht der Anwendung derartiger Betrachtungen; denn da bei ihnen alle Richtungen physikalisch gleichwertig sind, so ist die Symmetrie des Systems der auf den Körper ausgeübten Einwirkungen allein für die Symmetrie des optischen Vorganges maßgebend, und da die erstere Symmetrie meist leicht erkennbar ist, so gilt gleiches für die letztere. —

Wir wenden uns nun zu der spezielleren Betrachtung der im Eingang aufgeführten drei Arten von Einwirkungen auf die optischen Eigenschaften der Krystalle.

Als die einfachste stellen wir an die Spitze der Reihe die Wirkung einer Temperaturänderung; sie gewinnt dadurch Ausdruck, daß in dem allgemeinen Ansatz (116) für die optische potentielle Energie φ die Parameter a_{hk} als Funktionen der Temperatur betrachtet werden. Da die Temperatur ein Skalar ist, so werden hierdurch die Symmetrieverhältnisse der Funktion φ nicht geändert, und eine Aenderung der Temperatur kann nur dieselben Arten

von Bewegungen der optischen Symmetrieaxen hervorrufen, die bei einer Änderung der Farbe des fortgepflanzten Lichtes eintreten, und die auf S. 577 u. f. besprochen sind.

Eine erste und in vielen Fällen ausreichende Annäherung erhält man, wenn man die Konstanten a_{hk} als lineäre Funktionen der von einer mittleren aus gerechneten Temperatur τ ansetzt. —

Was die Beobachtungsmethoden angeht, die zur Feststellung der thermischen Veränderlichkeit der optischen Konstanten angewandt werden, so bieten die Messungen der Ablenkungen, die ebene Wellen in Prismen erfahren, manche praktische Vorteile; doch ist bei denselben die Thatsache nicht außer acht zu lassen, daß im allgemeinen die brechenden Winkel der Prismen sich bei wechselnder Temperatur ändern. Auch die Beobachtung der Veränderung der optischen Axenwinkel läßt sich gut ausführen.

Die erhaltenen Resultate sind überaus mannigfaltig und nicht kurz zusammenzufassen; erwähnt möge nur werden, daß bei vielen isotropen Körpern die Änderung des Brechungsindex n mit derjenigen der Dichte ϱ so verbunden ist, daß das Aggregat $(n^2-1)/\varrho(n^2+2)$ anscheinend von der Temperatur nahezu unabhängig ist. —

In zweite Linie stellen wir die Einwirkung einer Deformation des Krystalles auf seine optischen Eigenschaften. Da die eine solche charakterisierenden Deformationsgrößen $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ als unendlich klein angesehen werden dürfen, so ergiebt sich für φ, unter Berücksichtigung des zur Formel (116') Gesagten, der allgemeine Ansatz

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi = {} & (a_1^0 + a_{11}^{(1)} x_x + a_{11}^{(2)} y_y + \cdots + a_{11}^{(6)} x_y)\,\xi^2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + 2\,(a_{12}^{(1)} x_x + a_{12}^{(2)} y_y + \cdots + a_{12}^{(6)} x_y)\,\xi\eta. \end{aligned}\right\} \qquad 120)$$

Hierbei hat die in $x_x, \ldots x_y$ homogen lineäre Funktion $2(\varphi-\varphi^0)$ den Typus, der auf S. 142 des I. Bd. als vierter bezeichnet ist, und sie läßt sich daher, wenn man in Betracht zieht, daß die x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y sich transformieren, wie die Produkte X^2, Y^2, Z^2, $2YZ$, $2ZX$, $2XY$ von Vektorkomponenten, nach dem Schema IV auf S. 143 für die verschiedenen Krystallgruppen spezialisieren.[40]

Für Krystalle des regulären Systemes und bei Voraussetzung eines mit den krystallographischen Hauptaxen zusammenfallenden Koordinatenaxensystemes wird z. B.

$$\left.\begin{aligned} 2\varphi = {} & (a^0 + a_1' x_x + a_2' \vartheta)\,\xi^2 + (a^0 + a_1' y_y + a_2' \vartheta)\,\eta^2 \\ & + (a^0 + a_1' z_z + a_2' \vartheta)\,\zeta^2 + 2\,a_3'(y_z\eta\zeta + z_x\zeta\xi + x_y\xi\eta), \end{aligned}\right\} \quad 120')$$

wobei a_1', a_2', a_3' neue Konstanten bezeichnen, und $x_x + y_y + z_z = \vartheta$ gesetzt ist. Den für isotrope Körper geltenden Ansatz für φ erhält man hieraus, indem man die Beziehung $a_3' = \frac{1}{2} a_1'$ einführt. [41])

Wenn die Deformation ausschließlich durch mechanische Einwirkungen hervorgebracht ist, die Temperatur z. B. konstant erhalten wird, so bestehen zwischen den sechs Deformationsgrößen $x_x, \ldots x_y$ und den sechs Druckkomponenten $X_x, \ldots X_y$ nach Bd. I, S. 331 homogene lineäre Beziehungen, deren Parameter die isothermischen Elastizitätsmoduln sind, und vermöge deren die ersteren Größen sich in dem Ansatz (120) durch die letzteren vertreten lassen. Wir schreiben demgemäß neben (120), und als unter den angeführten Voraussetzungen damit äquivalent,

$$
120'') \quad \left\{ \begin{aligned} 2\varphi &= (a_1^0 + a_{11}^{(1)} X_x + a_{11}^{(2)} Y_y + \ldots + a_{11}^{(6)} X_y)\xi^2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\quad + 2(a_{12}^{(1)} X_x + a_{12}^{(2)} Y_y + \ldots + a_{12}^{(6)} X_y)\xi\eta \end{aligned} \right.
$$

und können auch diesen Ansatz nach Schema IV für die verschiedenen Krystallgruppen spezialisieren, wenn wir nur berücksichtigen, daß die Drucke X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y sich transformieren, wie die Produkte X^2, Y^2, Z^2, YZ, ZX, XY von Vektorkomponenten. Man erhält so beispielsweise für reguläre Krystalle, indem man $X_x + Y_y + Z_z = \Theta$ setzt,

$$
120''') \quad \left\{ \begin{aligned} 2\varphi = {} & (a^0 + a_1' X_x + a_2' \Theta)\xi^2 + (a^0 + a_1' Y_y + a_2' \Theta)\eta^2 \\ & + (a^0 + a_1' Z_z + a_2' \Theta)\zeta^2 + 2 a_3'(Y_z \eta\zeta + Z_x \zeta\xi + X_y \xi\eta), \end{aligned} \right.
$$

worin a_1', a_2', a_3' neue Bezeichnungen sind. Für isotrope Körper kommt noch die Beziehung $a_3' = 2 a_1'$ hinzu.

Diese zweite Form der Funktionen φ ist deshalb von besonderem Nutzen, weil bei der gebräuchlichsten Art der Beobachtung die Krystallpräparate prismatische Form haben und parallel einer Kante gleichförmig komprimiert werden. Hier lassen sich nämlich die Werte der Druckkomponenten $X_x, \ldots X_y$ leicht angeben.

Haben die Kanten des Prismas Richtungen, deren Richtungskosinus mit α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α_3, β_3, γ_3 bezeichnet sein mögen, und wirken ihnen parallel Drucke P_1, P_2, P_3, so ist

$$
\begin{aligned} X_x &= P_1 \alpha_1^2 + P_2 \alpha_2^2 + P_3 \alpha_3^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_z &= P_1 \beta_1 \gamma_1 + P_2 \beta_2 \gamma_2 + P_3 \beta_3 \gamma_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}
$$

Da bei wirklichen Beobachtungen zwei von den drei P_h gleich Null zu sein pflegen, so sind diese Resultate relativ sehr einfach.

Liegt die Prismenkante, längs deren der Druck $P_3 = P$ wirkt, parallel mit der Z-Axe, so ergiebt sich

$$2\varphi = (a^0 + \alpha'_2 P)(\xi^2 + \eta^2) + \big(a^0 + (\alpha'_1 + \alpha'_2)P\big)\zeta^2;$$

schließt sie mit den Koordinatenaxen X, Y, Z gleiche Winkel ein, so folgt

$$2\varphi\big(a^0 + (\tfrac{1}{3}\alpha'_1 + \alpha'_2)P\big)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \tfrac{2}{3}\alpha'_3 P(\eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta);$$

in beiden Fällen wird der Krystall optisch einaxig mit der Druckrichtung als optischer Axe, aber mit verschiedenen Werten der Hauptgeschwindigkeiten. —

Die eigentlichen Objekte der Messung stellen bei einem einseitig komprimierten Krystallprisma die relative Verzögerung der beiden normal zur Druckrichtung und zu einem Paar von Prismenflächen hindurchgehenden Wellen und die absolute Verzögerung jeder von ihnen dar. Die erstere läßt sich einfach mit Hilfe des S. 664 beschriebenen Kompensators bestimmen und hat eine besondere Wichtigkeit bei isotropen Körpern und bei regulären Krystallen, wo ihr ganzer Betrag eine Wirkung der Deformation ist. Die letztere läßt sich messen durch die Beobachtung der relativen Verzögerung der durch das gepreßte Prisma gegangenen Wellen gegen eine durch ein gleiches, aber nicht gepreßtes Prisma geschickte. Dabei bedarf die infolge der Deformation geänderte Weglänge im gepreßten Prisma einer besonderen Berücksichtigung. Diese Messungen erlauben eine ziemliche Genauigkeit, während die Bestimmung der in einem gepreßten Prisma stattfindenden Polarisationsrichtungen keine große Schärfe gestattet und sich daher nur bei regulären Krystallen und bei isotropen Medien, wo die ganze Doppelbrechung eine Folge der Deformation ist, nutzbringend erweist.

Von den Resultaten der Messungen genüge es zu bemerken, daß sie der Theorie vollständig entsprechen. Die Erscheinungen besitzen eine relativ große Mannigfaltigkeit, weil die charakteristischen Konstanten α'_h sich für verschiedene Krystalle desselben Systemes nicht nur von verschiedener Größe, sondern auch von verschiedenem Vorzeichen finden.[42])

Wenn durch Beobachtungen nach den im Vorstehenden erörterten Methoden die Konstanten $a_{hk}^{(i)}$ bestimmt, und wenn die Koefficienten der reinen thermischen Deformation bekannt sind, so kann man auch die optischen Veränderungen berechnen, welche bei einer Temperaturänderung durch die sie begleitende Deformation allein bewirkt werden, und insbesondere die Frage beantworten, ob dieselben mit den hierbei beobachteten gesamten Veränderungen

übereinstimmen. Es ist von großem Interesse, daß letzteres in manchen Fällen **nicht** stattfindet, daß also eine direkte und nicht durch die Deformation vermittelte Einwirkung einer Temperaturänderung auf das optische Verhalten stattfindet, die z. B. allein übrig bleiben würde, wenn man die thermischen Deformationen durch geeignet angebrachte äußere Drucke aufhöbe.[43]) —

Gehen wir nun schließlich zu der Betrachtung der Einwirkung über, die eine im Innern des Körpers wirkende **elektrische** Kraft ergiebt, so sind auch hier die Änderungen der optischen Konstanten so gering, daß wir dieselben in erster Annäherung als lineäre Funktionen der Kraftkomponenten X, Y, Z ansetzen können.[44]) Die potentielle Energie φ nimmt somit den Wert an

$$121)\quad \begin{cases} 2\varphi = (a_1^0 + a'_{11} X + a''_{11} Y + a'''_{11} Z)\,\xi^2 + \dots \\ \qquad + (a'_{23} X + a''_{23} Y + a'''_{23} Z)\, 2\,\eta\,\zeta + \dots, \end{cases}$$

wobei

$$a'_{hk} = \frac{\partial a_{hk}}{\partial X}, \quad a''_{hk} = \frac{\partial a_{hk}}{\partial Y}, \quad a'''_{hk} = \frac{\partial a_{hk}}{\partial Z}$$

ist.

Die Funktion $2(\varphi - \varphi^0)$ hat die Form, welche Bd. I, S. 139 als **dritter** Typus skalarer Funktionen bezeichnet worden ist, und läßt sich demgemäß unmittelbar nach dem Schema III auf S. 140 ebenda für die verschiedenen Krystallgruppen spezialisieren. Dieses Schema zeigt, daß die Konstanten a'_{hk}, a''_{hk}, a'''_{hk} nur bei Krystallen, die kein Centrum der Symmetrie besitzen, von Null verschieden sind, und auch hier nicht bei allen; die durch den Ansatz (121) ausgesprochene Wirkung ist also keineswegs eine **allgemeine**, aber die Beobachtung hat ihr Vorhandensein an einer Reihe von Substanzen, welche den von der Theorie gestellten Bedingungen genügen, mit vollständiger Sicherheit nachgewiesen.[45])

Von den speziellen Formen, welche der Ansatz bei verschiedenen Krystallgruppen annimmt, sei wieder nur die dem regulären System — spezieller den Gruppen 30 und 32 der Zusammenstellung Bd. I, S. 133 — entsprechende mitgeteilt, welche lautet

$$121')\quad 2\varphi = a^0(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 2\,a'_1\,(X\,\eta\,\zeta + Y\,\zeta\,\xi + Z\,\xi\,\eta).$$

Um ihre Bedeutung in einem speziellen Fall hervortreten zu lassen, legen wir die Richtung der elektrischen Kraft K in eine krystallographische Axe, z. B. die Z-Axe. Dann lautet die Gleichung des Polarisationsovaloides

$$\varrho^2 = a^0 + 2\,a'_1\,K\,\alpha\,\beta;$$

die Z-Axe ist also jedenfalls eine optische Symmetrieaxe, und ihr

entspricht die Wurzel $\overline{\varrho_3^2} = a^0$. Im übrigen gilt das System (119) mit den speziellen Werten

$$a_{11} = a_{22} = a^0, \; a_{12} = a_1' K,$$

und es folgt nach (119'') und (119''') für Richtung und Größe von $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_2}$

$$\overline{\varrho^2} = a^0 \pm a_1' K, \quad \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \mp 1;$$

die optischen Symmetrieaxen $\overline{\varrho_1}$ und $\overline{\varrho_2}$ halbieren also die Winkel zwischen den $\pm X$- und $\pm Y$-Axen. Beachtet man noch, daß die XY-Ebene die größte und die kleinste Ovaloidaxe enthält, und daß

$$\overline{\varrho_1^2} - \overline{\varrho_2^2} = 2(\overline{\varrho_1^2} - \overline{\varrho_3^2}) = 2(\overline{\varrho_3^2} - \overline{\varrho_2^2})$$

ist, so erkennt man, daß die optischen Axen den Winkel 90° einschließen und somit in die Koordinatenaxen X und Y fallen müssen.

Die Objekte der Beobachtung sind im wesentlichen dieselben, wie die bei der Einwirkung einer Deformation, aber die Messungen werden durch die allen elektrostatischen Beobachtungen eigenen Übelstände schwieriger. Trotzdem haben sich sichere und mit der Theorie im Einklang stehende Resultate gewinnen lassen.

Wie die Temperaturänderungen, so bewirken auch die elektrischen Kräfte Deformationen, die speziell bei den hier vorausgesetzten acentrischen Krystallen nach § 13 des IV. Teiles lineäre Funktionen der Kraftkomponenten sind; die Änderungen der optischen Konstanten, welche durch elektrische Kräfte bewirkt werden, enthalten somit Anteile in sich, die als direkte Wirkungen dieser Deformationen aufgefaßt und nach den Formeln von S. 116 und S. 672 berechnet werden können, wenn man die Konstanten kennt, welche die Deformationen mit den elektrischen Komponenten verbinden. Es läßt sich somit auch die Frage beantworten, ob etwa die gesamte, oben betrachtete elektro-optische Wirkung durch die Deformationen vermittelt wird; die an verschiedenen Krystallen durchgeführten Untersuchungen haben mit Sicherheit das sehr merkwürdige Resultat ergeben, daß dem nicht so ist, daß vielmehr neben dieser indirekten noch eine direkte Einwirkung der elektrischen Kraft auf das optische Verhalten stattfindet.[46]) —

Wenn nun auch Einwirkungen der elektrischen Kraft, welche den oben entwickelten Gesetzen entsprechen, bei centrischen Krystallen und bei isotropen Körpern durch die Symmetrieverhältnisse ausgeschlossen sind, so können bei jenen doch Änderungen der optischen Konstanten, welche Funktionen zweiten (oder überhaupt eines

geraden) Grades der elektrischen Kraftkomponenten sind, nichtsdestoweniger auftreten. Solche würden dann dargestellt werden durch den Ausdruck für das Potential φ

121'')
$$\left\{\begin{aligned} 2\varphi &= (a_1^0 + \beta_{11}^{(1)} X^2 + \beta_{11}^{(2)} Y^2 + \ldots + 2\beta_{11}^{(6)} XY)\xi^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\beta_{23}^{(1)} X^2 + \beta_{23}^{(2)} Y^2 + \ldots + 2\beta_{23}^{(6)} XY) 2\xi\eta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

wo dann die Konstanten $\beta_{hk}^{(i)}$ folgendermaßen zu deuten sind:

$$\beta_{hk}^{(1)} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial X^2}, \ldots \beta_{hk}^{(6)} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial X \partial Y}.$$

Diese Funktion läßt sich ebenso, wie die in (120), nach dem Schema IV, Bd. I, S. 143 für die verschiedenen Krystallgruppen spezialisieren. Für isotrope Körper erhält man

$$\begin{aligned} 2\varphi = &(a^0 + \beta_1 X^2 + \beta_2 K^2)\xi^2 + (a^0 + \beta_1 Y^2 + \beta_2 K^2)\eta^2 \\ &+ (a^0 + \beta_1 Z^2 + \beta_2 K^2)\zeta^2 + 2\beta_1 (YZ\eta\zeta + ZX\zeta\xi + XY\xi\eta), \end{aligned}$$

wobei die β_h neue Bezeichnungen sind, oder indem man die Z-Axe in die Kraftrichtung legt, was keine Spezialisierung involviert, auch

121''') $$2\varphi = (a^0 + \beta_2 K^2)(\xi^2 + \eta^2) + \left(a^0 + (\beta_1 + \beta_2) K^2\right)\zeta^2;$$

der isotrope Körper wird sonach optisch einaxig, und seine optische Axe fällt in die Richtung von K. Phänomene dieser Art sind nicht nur bei festen isotropen Körpern (Glas), sondern auch bei Flüssigkeiten experimentell nachgewiesen worden; indessen fehlt bisher noch eine ausgiebige Vergleichung derselben mit den Forderungen der Theorie. Bei Flüssigkeiten ist übrigens jedenfalls festgestellt, daß die Veränderung ihrer optischen Konstanten mit dem Quadrat der Feldstärke proportional ist; auch scheint hier die eine der charakteristischen Konstanten, nämlich β_2, zu verschwinden.[47]) —

Wir wenden uns nunmehr zu der bereits oben angekündigten Betrachtung der Einwirkung, welche eine **Bewegung** auf die optischen Eigenschaften eines durchsichtigen Körpers übt. Dieselbe schließt sich den übrigen Entwickelungen dieses Paragraphen nur insofern an, als sie eine hypothetische Erweiterung der Gleichungen für inaktive durchsichtige Medien liefert; sie sondert sich aber dadurch wesentlich von ihnen, daß diese Erweiterung in einer anderen Richtung stattfindet.

Von den hierher gehörigen Erscheinungen ist bisher nur eine ganz sicher gestellt. Durch sehr feine Versuche ist nämlich die fundamentale Thatsache nachgewiesen worden, daß die absolute Geschwindigkeit des Lichtes in einer strömenden Flüssigkeit größer ist, wenn die Lichtwelle in der Richtung der Strömung fortschreitet, kleiner,

wenn sie in entgegengesetztem Sinne verläuft. Aber es superponiert sich keineswegs einfach die ganze Geschwindigkeit Ω der Flüssigkeit derjenigen ω der Lichtwelle, sondern nur ein Bruchteil derselben, der angenähert durch $(n^2-1)/n^2$ gegeben wird, falls n einen mittleren Wert des Brechungsindex der Flüssigkeit bezeichnet.[48]) Der Einfluß der Bewegung des Mediums auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, den man hypothetisch allen Körpern beilegt, wächst also mit dem Brechungsindex n und ist bei Körpern, die, wie die Gase, n sehr nahe gleich Eins haben, unmerklich.

Wenn die Welle schief gegen die Bewegungsrichtung fortschreitet, so wird eine mittlere Größe der beiden Einwirkungen stattfinden, es wird daher in bewegten isotropen Körpern eine Fläche N der Normalengeschwindigkeiten existieren, welche, ungleich den bisher betrachteten, kein Centrum der Symmetrie und dabei nur eine Hülle besitzt, da die Versuche Anzeichen von Doppelbrechung nicht gegeben haben.

Fragt man nach Zusatzgliedern zu den Differentialgleichungen (40″) für isotrope Körper, welche diese Veränderungen darzustellen vermögen, so ergiebt sich als einfachste Form die folgende[49]):

$$\left.\begin{array}{c} u''=a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z}-\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)-2a'\frac{\partial u'}{\partial s}, \quad v''=a\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)-2a'\frac{\partial v'}{\partial s}, \\ w''=a\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}-\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)-2a'\frac{\partial w'}{\partial s}, \end{array}\right\} \quad 122)$$

in der a' eine zu bestimmende und von dem Medium abhängige Konstante bezeichnet, die jedenfalls mit der Translationsgeschwindigkeit an der betrachteten Stelle verschwindet, und in der s die Richtung dieser Translation angiebt. Diese Ergänzung ist sowohl mit der Superposition verschiedener Wellen, als mit der Transversalität der Schwingungen in homogenen Wellen vereinbar, die in ruhenden Medien stattfinden.

Setzt man eine homogene ebene Welle voraus und legt die Z-Axe in die Wellennormale, so nimmt das System (122) unter Rücksicht auf die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(s,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(s,y)+\frac{\partial u}{\partial z}\cos(s,z) \quad \text{u. s. f.}$$

die Form an

$$u''=a\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2a_3'\frac{\partial u'}{\partial z}, \quad v''=a\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-2a_3'\frac{\partial v'}{\partial z}, \quad w''=0, \qquad 122')$$

wobei $a_3'=a'\cos(s,z)$ ist. Die Gleichungen für die Komponenten u und v sind identisch, es kann somit jede Art von transversalen

Schwingungen in jeder Richtung fortgepflanzt werden. Für die Geschwindigkeit ω erhält man die Gleichung

$$\omega^2 - 2\,a_3'\,\omega = a, \tag{122''}$$

woraus folgt

$$\omega = a_3' \pm \sqrt{a + a_3'^2};$$

von diesen beiden Werten ist der eine positiv, der andere negativ, es pflanzt sich also nach jeder Seite der Z-Axe nur **eine** Welle fort. Die Oberfläche N hat hiernach die Gestalt einer Kugel, deren Centrum in der Richtung der Translation etwas verschoben ist.

Betrachtet man gemäß der Beobachtung bei allen praktisch herstellbaren Geschwindigkeiten $a_3'^2$ als sehr klein neben a und bedenkt, daß $\sqrt{a}$ die Geschwindigkeit ω_0 der Welle im ruhenden Medium angiebt, so erhält man für die Richtung $+Z$

$$\omega = \sqrt{a} + a_3' = \omega_0 + a_3'.$$

Um mit der oben citierten Beobachtung in Einklang zu kommen, müßte gelten

$$a' = \Omega\,\frac{n^2-1}{n^2} = \Omega\,\frac{v^2-\omega_0^2}{v^2}, \tag{122'''}$$

worin Ω die Geschwindigkeit der Translation und v diejenige des Lichtes im leeren Raum bezeichnet; dabei kann wegen der Unsicherheit der Beobachtungen ω_0^2 ebensowohl mit a, als auch mit dem von der Periode τ unabhängigen Teil a_0 dieser Funktion identifiziert werden.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich leicht auf krystallinische Körper erweitern, haben hier aber noch keinerlei aktuelles Interesse. —

Wegen der oben angegebenen Bedeutung von $\partial u'/\partial s$ u. s. f. kann man nach der früher erörterten Methode aus den Hauptgleichungen auch die **Grenzbedingungen** ableiten. Setzt man nämlich voraus, daß bei mit dem Ort wechselnder physikalischer Natur des Mediums und bei nach Größe und Richtung wechselnder Geschwindigkeit Ω das System (122) die Gestalt besitzt

$$u'' = \frac{\partial\,a\,\eta}{\partial z} - \frac{\partial\,a\,\zeta}{\partial y} - 2\left(\frac{\partial\,a_1'\,u'}{\partial x} + \frac{\partial\,a_2'\,u'}{\partial y} + \frac{\partial\,a_3'\,u'}{\partial z}\right)$$

u. s. f. und kombiniert mit ihm die Definitionen (39') von ξ, η, ζ: so erhält man als Bedingungen für ein zur XY-Ebene paralleles Element der Grenze o_{hi}

$$(\overline{a\,\eta} - 2\,\overline{a_3'\,u'})_h = (\overline{a\,\eta} - 2\,\overline{a_3'\,u'})_i,\quad (\overline{a\,\xi} - 2\,\overline{a_3'\,v'})_h = (\overline{a\,\xi} - 2\,\overline{a_3'\,v'})_i,$$

$$\overline{u}_h = \overline{u}_i,\quad \overline{v}_h = \overline{v}_i.$$

Beobachtungen, die einen einigermaßen sichern Schluß auf die Zulässigkeit derartiger Bedingungen gestatten, sind bisher noch nicht gelungen.

§ 18. Die Fortpflanzung ebener homogener Wellen in durchsichtigen magnetisch-aktiven Medien. Die bezügliche Normalen- und Strahlenfläche für isotrope magnetisch-aktive Körper.

Die Grundlage der Theorie durchsichtiger, magnetisch-aktiver Krystalle bilden nach S. 572 die folgenden Werte der kinetischen und der potentiellen Energie ψ und φ

$$\left.\begin{aligned} 2\psi &= u'^2 + v'^2 + w'^2, \quad \varphi = \varphi_a + \varphi_b, \\ 2\varphi_a &= a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta, \\ 2\varphi_b &= b_1(\zeta'\eta - \eta'\zeta) + b_2(\xi'\zeta - \zeta'\xi) + b_3(\eta'\xi - \xi'\eta). \end{aligned}\right\} \quad 123)$$

Hierin sind b_1, b_2, b_3 die Komponenten eines Vektors b, dessen Richtung mit der Richtung der magnetischen Axe in dem betrachteten Volumenelement zusammenfällt, und dessen Größe, abgesehen von ihrer durch (30′) gegebenen Abhängigkeit von der Schwingungsperiode τ, eine Funktion der magnetischen Feldstärke ist; wir wiederholen beiläufig, daß diese Funktion dem durch die Feldstärke induzierten spezifischen Moment parallel zu gehen scheint, ein Punkt, auf den wir nochmals zurückkommen werden.

Die Hauptgleichungen nehmen nach dem in (36′) und (37) gegebenen Schema die Form an [50])

$$\left.\begin{aligned} u'' &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} + b_1\zeta' - b_3\xi'\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} + b_2\xi' - b_1\eta'\right), \\ v'' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \zeta} + b_2\xi' - b_1\eta'\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} + b_3\eta' - b_2\zeta'\right), \\ w'' &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \xi} + b_3\eta' - b_2\zeta'\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \eta} + b_1\zeta' - b_3\xi'\right); \end{aligned}\right\} \quad 123')$$

ihnen ordnen sich zu die Definitionen

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \qquad 123'')$$

Hieraus folgen die Bedingungen für ein der XY-Ebene paralleles Grenzelement zwischen zwei Medien (h) und (i) in der Form

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h &= \overline{v}_i, \\ \left(\frac{\partial \overline{\varphi_a}}{\partial \xi} + b_3\overline{\eta'} - b_2\overline{\zeta'}\right)_h &= \left(\frac{\partial \overline{\varphi_a}}{\partial \xi} + b_3\overline{\eta'} - b_2\overline{\zeta'}\right)_i, \\ \left(\frac{\partial \overline{\varphi_a}}{\partial \eta} + b_1\overline{\zeta'} - b_3\overline{\xi'}\right)_h &= \left(\frac{\partial \overline{\varphi_a}}{\partial \eta} + b_1\overline{\zeta'} - b_3\overline{\xi'}\right)_i, \end{aligned}\right\} \quad 123''')$$

denen wir als nicht unabhängig zufügen können

123'') $$\overline{w_h} = \overline{w_i}, \quad \overline{\zeta_h} = \overline{\zeta_i}. \text{ —}$$

Wir betrachten zunächst die Fortpflanzung einer homogenen ebenen Welle einfarbigen Lichtes in dem unbegrenzt gedachten aktiven Medium und legen die Z-Axe in die Wellennormale. Dann ergiebt sich $w = 0$, und das System (123') nimmt die einfache Gestalt an

124) $$\left\{\begin{aligned} u'' &= a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + b_3\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}, \\ v'' &= a_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - b_3\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}, \end{aligned}\right.$$

die wir noch weiter reduzieren können, indem wir dem XY-System eine solche Lage geben, daß, auf dasselbe bezogen, a_{12} verschwindet; wie früher wollen wir dabei die Einführung dieses Axensystemes durch Einklammern der Parameter a_{hk} andeuten. Nach dem S. 581 Gefundenen sind die so bestimmten Axen die Polarisationsrichtungen, welche die betrachtete Welle im Krystall besitzen kann, wenn die magnetische Einwirkung verschwindet, und (a_{22}), (a_{11}) stellen die Quadrate der ihnen entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 dar.

Wir können somit ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch das System

124') $$\left\{\begin{aligned} u'' &= (a_{22})\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + b_3\frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}, \\ v'' &= (a_{11})\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - b_3\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \end{aligned}\right.$$

als Ausgangspunkt benutzen.

Zur Integration setzen wir

124'') $$u = F\sin T, \quad v = G\cos T, \quad T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right)$$

und erhalten, indem wir $2\pi b_3/\tau$ in b_3' abkürzen,

124''') $$((a_{22}) - \omega^2)F = b_3' G\,, \quad ((a_{11}) - \omega^2)G = b_3' F;$$

hieraus folgt als Bedingung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

125) $$((a_{11}) - \omega^2)((a_{22}) - \omega^2) = b_3'^2$$

und als Gleichung für das Amplitudenverhältnis

$$((a_{11}) - (a_{22})) + b_3'\left(\frac{G}{F} - \frac{F}{G}\right) = 0$$

oder

125') $$\left(\frac{G}{F}\right)^2 + ((a_{11}) - (a_{22}))\frac{G}{b_3' F} - 1 = 0;$$

außerdem gilt auch

$$\frac{(a_{22}) - \omega^2}{(a_{11}) - \omega^2} = \frac{G^2}{F^2}. \qquad 125'')$$

Diese Formeln ergeben, daß sich längs der gewählten $+Z$-Richtung zwei elliptisch polarisierte Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen können, und, da in der Gleichung (125) $b_3 = b \cos(b, z)$ nur quadratisch vorkommt, mit den gleichen Geschwindigkeiten auch parallel der $-Z$-Richtung. Die Axen der Polarisationsellipsen fallen mit den Koordinatenaxen X und Y zusammen, liegen also in den Polarisationsrichtungen, die derselben Welle im nicht magnetisch erregten Krystall zugehören, und die S. 593 u. f. bestimmt worden sind.

Das Produkt der Amplitudenverhältnisse $G_1 G_2 / F_1 F_2$ für die beiden Wellen ist nach (125′) gleich minus Eins; die Verhältnisse G_1 / F_1 und G_2 / F_2 müssen also zu einander reziprok sein, überdies entgegengesetztes Vorzeichen haben. Hieraus folgt, daß die Bahnellipsen einander ähnlich, aber gegeneinander um 90° gedreht sind, sowie daß sie in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

Bezeichnet man die Rotationsrichtung als rechts oder links, je nachdem sie sich von der Seite gesehen darstellt, wohin die Welle fortschreitet, so giebt für die Fortpflanzung parallel der $+Z$-Axe $FG > 0$ eine rechts, $FG < 0$ eine links rotierende Welle.

Besonders einfache Verhältnisse treten ein, wenn die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Welle so gewählt ist, daß sie der Bedingung

$$(a_{11}) = (a_{22})$$

genügt, d. h., wie S. 584 und 590 ausgeführt, in eine optische Axe des magnetisch nicht erregten Krystalles fällt. Dann ergiebt die Gleichung (125) sogleich

$$\omega^2 = a_2 \pm b_3', \qquad 125''')$$

und die Formel (125″) liefert

$$\frac{G}{F} = \mp 1, \qquad 125'''')$$

wobei nach (124‴) die oberen und die unteren Vorzeichen sich gegenseitig entsprechen; die Polarisationskurve ist also ein Kreis. Das Gleiche gilt bei jeder Richtung der Wellennormalen für isotrope Körper, da hier $a_{22} = a_{11} = a$ konstant ist. —

Gehen wir nunmehr zu der Auflösung der Gleichungen (125) und (125′) über, so ergiebt die erstere

126) $$\omega^2 = \frac{1}{2}\left((a_{11}) + (a_{22}) \pm \sqrt{((a_{11}) - (a_{22}))^2 + 4\,b_3'^2}\right),$$

die letztere

126′) $$\frac{G}{F} = -\frac{1}{2b_3'}\left((a_{11}) - (a_{22}) \pm \sqrt{((a_{11}) - (a_{22}))^2 + 4\,b_3'^2}\right);$$

in beiden Formeln entsprechen sich, wie die Gleichungen (124‴) zeigen, die oberen und die unteren Vorzeichen gegenseitig.

Man erkennt, daß die beiden Wurzeln für ω^2 einander nur dann gleich werden können, wenn zugleich $(a_{11}) = (a_{22})$ ist und b_3 verschwindet, d. h. also, wenn die Wellennormale in eine optische Axe fällt, zu der gleichzeitig die magnetischen Kraftlinien normal stehen. Diesen singulären Fall ausgeschlossen, zerfällt also die Fläche N der Normalengeschwindigkeiten jederzeit in zwei getrennte Hüllen, die keine Punkte gemein haben.

Die Gleichungen (126) und (126′) lassen sich leicht benutzen, um die beiden Wurzeln für ω^2 und für G/F in ihrer Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen anzugeben. Denn obwohl a_{11} und a_{22} durch ihre ursprünglichen Definitionen (38‴) zunächst von den Axen-Richtungen der Schwingungsellipsen abhängig gemacht sind, so lassen sie sich doch bei Einführung des hier benutzten speziellen Koordinatensystemes auch als Funktionen der Fortpflanzungsrichtung geben.

In der That ist nach einer auf S. 595 oben gemachten Bemerkung, falls die X-Axe in die Polarisationsrichtung gelegt wird, welche im nicht magnetisch erregten Krystall die o r d i n ä r e Welle besitzt, (a_{22}) mit ω_o^2, (a_{11}) mit ω_e^2 identisch, und diese Größen sind bereits in den Formeln (51′) u. f. durch die Winkel U' und U'' der Wellennormalen gegen die optischen Axen des Krystalles ausgedrückt. Setzt man diese Werte ein, so erhält man

126″) $$\left\{\begin{aligned}\omega^2 = \frac{1}{2}\Big((a_1 + a_3) &+ (a_1 - a_3)\cos U' \cos U'' \\ &\pm \sqrt{(a_1 - a_3)^2 \sin^2 U' \sin^2 U'' + 4\,b_3'^2}\Big).\end{aligned}\right.$$

126‴) $$\left\{\begin{aligned}\frac{G}{F} = \frac{1}{2b_3'}\Big((a_1 - a_3)&\sin U' \sin U'' \\ &\mp \sqrt{(a_1 - a_3)^2 \sin^2 U' \sin^2 U'' + 4\,b_3'^2}\Big).\end{aligned}\right.$$

Hierin kann auch noch b_3, welches nach S. 579 die Projektion eines Vektors b auf die Richtung der Wellennormale darstellt, durch die Winkel, welche b mit den optischen Axen einschließt, und außerdem durch U', U'' ausgedrückt werden.

Für die Diskussion wollen wir von den beiden durch (126) oder (126'') angegebenen Wurzeln für ω^2 die dem oberen Vorzeichen entsprechende, und somit jederzeit größere, durch ω_1^2, die andere durch ω_2^2 bezeichnen; es geht bei verschwindendem b dann ω_1 in ω_o, ω_2 in ω_e über, falls $a_1 > a_3$ und die Wurzelgröße in der Bedeutung $(a_1 - a_3)\sin U' \sin U''$ verstanden wird. Ähnlich wollen wir die Verhältnisse G_1/F_1 und G_2/F_2 definieren; es besitzt dann nach (126') oder (126''') G_1/F_1 jederzeit das Vorzeichen von $-b'_3$, G_2/F_2 das von $+b'_3$. Auf der positiven Seite des Vektors b ist somit die Welle (1) eine links, (2) eine rechts rotierende; auf der negativen Seite von b gilt das umgekehrte, und beide Bereiche sind getrennt durch den Äquatorialkreis, wo b_3 gleich Null ist, also eine Elliptizität überhaupt nicht stattfindet. Die rechts rotierende Welle pflanzt sich in jeder Richtung mit derjenigen Geschwindigkeit fort, welche in der entgegengesetzten Richtung der links rotierenden Welle zugehört.

Noch sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Beobachtung auch bei Anwendung starker Magnetfelder für alle durchsichtigen Krystalle das Verhältnis $2\pi b/\tau(a_1 - a_3)$ als sehr klein ergeben hat. Hieraus folgt, daß in allen Richtungen, welche Winkel von wenigstens einigen Graden mit den optischen Axen einschließen, $b'_3/((a_{11}) - (a_{22}))$ gleichfalls eine kleine Größe ist. Für derartige Richtungen kann man somit Näherungswerte für ω und G/F einführen und erhält, wenn man $(a_{22}) > (a_{11})$ annimmt, direkt aus (125) oder aus (126)

$$\left.\begin{aligned} \omega_1^2 &= (a_{22}) + \frac{b_3'^2}{(a_{22}) - (a_{11})}, \quad & \omega_2^2 &= (a_{11}) - \frac{b_3'^2}{(a_{22}) - (a_{11})}, \\ \frac{G_1}{F_1} &= -\frac{b'_3}{(a_{22}) - (a_{11})}, & \frac{F_2}{G_2} &= +\frac{b'_3}{(a_{22}) - (a_{11})}. \end{aligned}\right\} \quad 126'''')$$

Die ersten Werte zeigen, daß durch die magnetische Erregung ω_1^2 um ebensoviel vergrößert ist, als ω_2^2 verkleinert, die letzteren, daß für die Welle (1) die Polarisationsellipse nach der Richtung der X-Axe, für (2) aber nach der Y-Axe außerordentlich gestreckt ist. —

Um das Gesetz zu erhalten, welches die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und den Polarisationszustand einer homogenen ebenen Welle mit den Richtungskosinus der Wellennormale gegen die optischen Symmetrieaxen des magnetisch nicht erregten Krystalles verbindet, kann man die Hauptgleichungen (123') auf das der betreffenden Farbe entsprechende Symmetrieaxensystem beziehen, und demgemäß bei Einführung der komplexen Komponenten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ schreiben:

$$
127)\quad \begin{cases}
\mathfrak{u}'' = \dfrac{\partial}{\partial z}(a_2\,\mathfrak{y} + b_1\,\mathfrak{z}' - b_3\,\mathfrak{x}') - \dfrac{\partial}{\partial y}(a_3\,\mathfrak{z} + b_2\,\mathfrak{x}' - b_1\,\mathfrak{y}'),\\
\mathfrak{v}'' = \dfrac{\partial}{\partial x}(a_3\,\mathfrak{z} + b_2\,\mathfrak{x}' - b_1\,\mathfrak{y}') - \dfrac{\partial}{\partial z}(a_1\,\mathfrak{x} + b_3\,\mathfrak{y}' - b_2\,\mathfrak{z}'),\\
\mathfrak{w}'' = \dfrac{\partial}{\partial y}(a_1\,\mathfrak{x} + b_3\,\mathfrak{y}' - b_2\,\mathfrak{z}') - \dfrac{\partial}{\partial x}(a_2\,\mathfrak{y} + b_1\,\mathfrak{z}' - b_3\,\mathfrak{x}').
\end{cases}
$$

Zur Integration ist zu setzen

$$127')\qquad \mathfrak{u} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{p},\quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{p},\quad \mathfrak{w} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{p},\quad \mathfrak{p} = \mathfrak{K}\,e^{iT},$$

wobei $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Richtungskosinus des komplexen Polarisationsvektors $\mathfrak{p}$ sind und die Bedingung

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 = 1$$

erfüllen; zugleich ist

$$T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r}{\omega}\right),\qquad r = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Man erhält dann zunächst für die Komponenten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Hilfsvektors $\mathfrak{d}$

$$127'')\quad \mathfrak{x} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\omega}(\mathfrak{H}\beta - \mathfrak{G}\gamma),\quad \mathfrak{y} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\omega}(\mathfrak{F}\gamma - \mathfrak{H}\alpha),\quad \mathfrak{z} = -\frac{\mathfrak{p}'}{\omega}(\mathfrak{G}\alpha - \mathfrak{F}\beta);$$

hieraus ergiebt sich für seine Richtungskosinus $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$:

$$127''')\qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{H}\beta - \mathfrak{G}\gamma,\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{F}\gamma - \mathfrak{H}\alpha,\quad \mathfrak{N} = \mathfrak{G}\alpha - \mathfrak{F}\beta,$$

während auch ist

$$127'''')\qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{M}\gamma - \mathfrak{N}\beta,\quad \mathfrak{G} = \mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{L}\gamma,\quad \mathfrak{H} = \mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha.$$

Die Formeln (127) liefern nun, wenn wir kurz $2\pi b_h/\tau = b_h'$ setzen,

$$
128)\quad \begin{cases}
\omega^2\mathfrak{F} = \gamma\left(a_2\mathfrak{M} + i(b_1'\mathfrak{N} - b_3'\mathfrak{L})\right) - \beta\left(a_3\mathfrak{N} + i(b_2'\mathfrak{L} - b_1'\mathfrak{M})\right),\\
\omega^2\mathfrak{G} = \alpha\left(a_3\mathfrak{N} + i(b_2'\mathfrak{L} - b_1'\mathfrak{M})\right) - \gamma\left(a_1\mathfrak{L} + i(b_3'\mathfrak{M} - b_2'\mathfrak{N})\right),\\
\omega^2\mathfrak{H} = \beta\left(a_1\mathfrak{L} + i(b_3'\mathfrak{M} - b_2'\mathfrak{N})\right) - \alpha\left(a_2\mathfrak{M} + i(b_1'\mathfrak{N} - b_3'\mathfrak{L})\right);
\end{cases}
$$

faßt man sie mit den Faktoren $0, -\gamma, \beta$; $\gamma, 0, -\alpha$; $-\beta, \alpha, 0$ zusammen und beachtet die Beziehungen (127'''), so erhält man drei Gleichungen, die nur noch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und ω enthalten; sie lauten:

$$
129)\quad \begin{cases}
0 = (a_1 - \omega^2)\mathfrak{L} + i(b_3'\mathfrak{M} - b_2'\mathfrak{N}) - \alpha\mathfrak{O},\\
0 = (a_2 - \omega^2)\mathfrak{M} + i(b_1'\mathfrak{N} - b_3'\mathfrak{L}) - \beta\mathfrak{O},\\
0 = (a_3 - \omega^2)\mathfrak{N} + i(b_2'\mathfrak{L} - b_1'\mathfrak{M}) - \gamma\mathfrak{O},
\end{cases}
$$

und es ist dabei abgekürzt gesetzt

$$
129')\quad \begin{cases}
\alpha\left(a_1\mathfrak{L} + i(b_3'\mathfrak{M} - b_2'\mathfrak{N})\right) + \beta\left(a_2\mathfrak{M} + i(b_1'\mathfrak{N} - b_3'\mathfrak{L})\right)\\
\qquad + \gamma\left(a_3\mathfrak{N} + i(b_2'\mathfrak{L} - b_1'\mathfrak{M})\right) = \mathfrak{O}.
\end{cases}
$$

Nimmt man hinzu die Bedingung

$$\alpha \mathfrak{L} + \beta \mathfrak{M} + \gamma \mathfrak{N} = 0,$$

so hat man vier Gleichungen, die homogen sind in $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{D}$; es muß sonach ihre Determinante verschwinden, d. h., es muß gelten

$$\begin{vmatrix} (a_1 - \omega^2) & +i b_3' & -i b_2' & -\alpha \\ -i b_3' & (a_2 - \omega^2) & +i b_1' & -\beta \\ +i b_2' & -i b_1' & (a_3 - \omega^2) & -\gamma \\ +\alpha & +\beta & +\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad 129'')$$

Diese Gleichung giebt das allgemeine Gesetz an, das ω^2 mit α, β, γ verbindet; sie ist nur scheinbar komplex und nimmt reduziert die relativ einfache Gestalt an

$$\left.\begin{array}{l} (a_2 - \omega^2)(a_3 - \omega^2)\alpha^2 + (a_3 - \omega^2)(a_1 - \omega^2)\beta^2 + (a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2)\gamma^2 \\ \qquad = (\alpha b_1' + \beta b_2' + \gamma b_3')^2 = b'^2 \cos^2(r, b), \end{array}\right\} \qquad 129''')$$

die man gleichfalls für die Diskussion der Wurzeln ω^2 benutzen kann.

Auf optisch einaxige Krystalle, also auf den Fall $a_1 = a_2$ angewandt, ergiebt (129''')

$$(a_1 - \omega^2)(a_3(\alpha^2 + \beta^2) + a_1 \gamma^2 - \omega^2) = b'^2 \cos^2(r, b), \qquad 129'''')$$

was mit (125) übereinstimmt. —

Bei isotropen Körpern wird sehr einfach, wenn man den Vektor b in die $+Z$-Axe legt und den Winkel (b, r) mit ϑ bezeichnet,

$$\omega^2 = a \pm \frac{2\pi b \cos\vartheta}{\tau}; \qquad 130)$$

betrachtet man ω als Funktion von ϑ, so sind hiermit die beiden Hüllen der Normalenfläche N gesondert dargestellt. Die Hüllen haben ungefähr die Gestalt von Kugeln, deren Centra längs b, resp. Z, ein wenig gegeneinander verschoben sind; denn wegen der Kleinheit des zweiten Gliedes rechts kann man die Gleichung (130) näherungsweise auch schreiben

$$\omega^2 = a \pm \frac{2\pi b \omega \cos\vartheta}{\tau \sqrt{a}}.$$

Um zur Strahlenfläche S für magnetisch-aktive, isotrope Körper zu gelangen, hat man nach S. 522, da es sich hier um Rotationsflächen handelt, nur in zwei benachbarten Punkten einer Meridiankurve von N Normalen auf den bezüglichen Radienvektoren ω zu errichten und ihren Schnittpunkt zu bestimmen; dieser ist dann ein Punkt der Fläche S, und der Vektor nach ihm hin giebt die zu jenem ω gehörige Strahlenrichtung und -geschwindigkeit σ an.

Wählt man den Meridianschnitt der Fläche N zur XZ-Ebene, so sind jene zwei Geraden gegeben durch

130') $$\omega = x \sin \vartheta + z \cos \vartheta$$

und

130'') $$d\omega = (x \cos \vartheta - z \sin \vartheta)\, d\vartheta,$$

wobei nach (130) gilt:

130''') $$\omega\, d\omega = \mp \frac{\pi b \sin \vartheta}{\tau}\, d\vartheta.$$

Durch Kombination der beiden letzten Gleichungen erhält man die Beziehung

131) $$\mp \frac{\pi b \sin \vartheta}{\tau} = \omega (x_s \cos \vartheta - z_s \sin \vartheta)$$

für die Koordinaten x_s, z_s des Schnittpunktes; eine weitere folgt aus (130'), nämlich

131') $$\omega = x_s \sin \vartheta + z_s \cos \vartheta;$$

eliminiert man hieraus mit Hilfe von (130) ω und ϑ, so erhält man die Gleichung des Meridianschnittes der Strahlenfläche S; es ist indessen bequemer, nur ω zu eliminieren und ϑ als vermittelnde Variable beizubehalten. In erster Annäherung wird auch die Fläche S durch dieselben beiden Kugeln gebildet, deren Centra auf der Richtung von b, resp. Z, liegen.

Drückt man x_s und y_s durch Größe und Richtung der Strahlengeschwindigkeit σ aus, die ω entspricht, setzt man also

$$x_s = \sigma \sin \vartheta_s, \quad z_s = \sigma \cos \vartheta_s,$$

so ergeben die letzten beiden Formeln

131'') $$\mp \frac{\pi b \sin \vartheta}{\tau} = \omega \sigma \sin(\vartheta_s - \vartheta), \quad \omega = \sigma \cos(\vartheta_s - \vartheta).$$

Die erste Formel zeigt, daß $\vartheta_s - \vartheta$ von der Ordnung $b/\tau a$ ist, die wir als **erste** betrachten wollen; die zweite Formel ergiebt bis auf zweite Ordnung $\omega = \sigma$, und nach (130) folgt bis auf erste $\omega = \sigma = \sqrt{a}$. Demgemäß können wir auch bis auf zweite Ordnung exklusive schreiben

131''') $$\mp \frac{\pi b \sin \vartheta}{\tau a} = \sin(\vartheta_s - \vartheta),$$

wobei links auch noch ϑ beliebig mit ϑ_s, rechts $\sin(\vartheta_s - \vartheta)$ mit $(\vartheta_s - \vartheta)$ vertauscht werden kann. Diese Gleichung bestimmt den Winkel zwischen Strahl und Normale als Funktion der Richtung eines der beiden; der Winkel wird ein Maximum für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, also in der Richtung, wo die beiden Normalengeschwindigkeiten nach (130)

einander gleich werden, die beiden Hüllen der Oberfläche N sich also schneiden.

Hieraus folgt, daß einer Wellenebene, die normal zu den magnetischen Kraftlinien liegt, zwar nur eine Normalengeschwindigkeit ω, aber trotzdem zwei Strahlenrichtungen zugehören, die im Meridian liegen und gegen die äquatoriale Axe den für $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ durch (131‴) gegebenen Winkel, also mit einander den Winkel $2\pi b/\tau a$ einschließen.

Umgekehrt entsprechen einem normal zu den Kraftlinien fortgepflanzten Strahl auch zwei Wellennormalen von analoger Lage und gleichem Neigungswinkel.

Hieraus folgt, daß alle Richtungen in der Äquatorialebene ein zugleich den optischen und den Strahlenaxen ähnliches Verhalten zeigen; jedoch mit dem Unterschied, daß nicht unendlich viele einen Kegel erfüllenden Strahlen resp. Normalen auftreten, sondern nur zwei, die überdies je die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Beobachtungen über dies singuläre Verhalten, welche nach den S. 610 erwähnten Methoden auszuführen wären, sind schwierig anzustellen, da die Divergenz zwischen den betreffenden Richtungspaaren sehr gering ist.[51])

§ 19. Die Fortpflanzung ebener homogener Wellen in durchsichtigen natürlich-aktiven Medien.

Als Grundlage für die Behandlung natürlich-aktiver Körper benutzen wir nach S. 573 u. f. neben den bei inaktiven Körpern geltenden Werten

$$2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2,$$

$$2\varphi_a = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta$$

den Ansatz (33‴) für $\Sigma\varphi_\gamma$, dessen Variation nach (33⁗) äquivalent ist mit

$$\delta\varphi_c = c(u\,\delta\xi + v\,\delta\eta + w\,\delta\zeta), \qquad 132)$$

und in dem c eine Funktion der Periode τ von der Form (32) darstellt.

Die Hauptgleichungen werden hiernach zu[52])

$$\left.\begin{aligned}
u'' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\eta} + cv\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\zeta} + cw\right),\\
v'' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\zeta} + cw\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\xi} + cu\right),\\
w'' &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\xi} + cu\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_a}{\partial\eta} + cv\right);
\end{aligned}\right\} \qquad 132')$$

ihnen ordnen sich zu die Definitionen

$$132'')\qquad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Aus diesen Formeln gewinnt man in gewohnter Weise die folgenden Bedingungen für das zur XY-Ebene parallel gedachte Element einer Grenze o_{hi} zwischen zwei natürlich-aktiven Medien

$$132''')\quad \begin{cases} \overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \\ \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} + c\overline{u}\right)_h = \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}} + c\overline{u}\right)_i, \quad \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} + c\overline{v}\right)_h = \left(\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}} + c\overline{v}\right)_i, \end{cases}$$

aus denen mit Hilfe der dritten Gleichungen (132') und (132'') sich auch ergiebt

$$132'''')\qquad \overline{w}_h = \overline{w}_i, \quad \overline{\zeta}_h = \overline{\zeta}_i. \text{ —}$$

Wie bei den analogen Untersuchungen des vorigen Paragraphen betrachten wir zunächst die Fortpflanzung einer homogenen ebenen Welle in dem unbegrenzt gedachten homogenen aktiven Medium und legen die Z-Axe in die Wellennormale. Dann nehmen die ersten zwei Gleichungen des Systemes (132') die Form an

$$133)\qquad \begin{cases} u'' = a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c\frac{\partial v}{\partial z}, \\ v'' = a_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - c\frac{\partial u}{\partial z}, \end{cases}$$

während die letzte $w'' = 0$ ergiebt.

Führen wir noch das spezielle XY-Axensystem ein, für das $(a_{12}) = 0$ ist, d. h., dessen Axen in die Polarisationsrichtungen fallen, welche derselben Fortpflanzungsrichtung Z in demselben Medium bei verschwindendem c, d. h. bei verschwindender Aktivität zugehören würden, so erhält man

$$133')\qquad \begin{cases} u'' = (a_{22})\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + c\frac{\partial v}{\partial z}, \\ v'' = (a_{11})\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - c\frac{\partial u}{\partial z}; \end{cases}$$

(a_{22}), (a_{11}) stellen, auf dieselben Axen bezogen, die Quadrate der Normalengeschwindigkeiten ω längs Z bei verschwindender Aktivität dar.

Das System (133') hat die größte Ähnlichkeit mit dem System (124'); trotzdem besitzen die durch beide dargestellten Vorgänge wesentliche Verschiedenheiten, welche darauf beruhen, daß der Faktor c von der Fortpflanzungsrichtung unabhängig ist, während b_3 mit ihr variiert.

Setzen wir als Integrale, die dem vorausgesetzten speziellen Fall entsprechen,

$$u = F \sin T, \quad v = G \cos T, \quad T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\omega}\right), \qquad 133'')$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \left((a_{22}) - \omega^2\right) F &= \frac{c\,\tau\,\omega}{2\pi} G = c'\,\omega\, G, \\ \left((a_{11}) - \omega^2\right) G &= \frac{c\,\tau\,\omega}{2\pi} F = c'\,\omega\, F, \end{aligned}\right\} \qquad 133''')$$

wobei c' eine Abkürzung ist.

Hieraus folgt durch Elimination von G/F

$$\left((a_{11}) - \omega^2\right)\left((a_{22}) - \omega^2\right) = \left(\frac{c\,\tau\,\omega}{2\pi}\right)^2 = c'^2\,\omega^2; \qquad 134)$$

dagegen ist die strenge Elimination von ω in rationaler Form nicht möglich, und man kann nur als durch Symmetrie vor den Formeln (133''') ausgezeichnet bilden

$$\frac{(a_{22}) - \omega^2}{(a_{11}) - \omega^2} = \frac{G^2}{F^2}. \qquad 134')$$

Diese Resultate zeigen, daß sich in jeder Richtung zwei elliptisch polarisierte Wellen fortzupflanzen vermögen, deren Geschwindigkeiten im allgemeinen verschieden sind, und daß entgegengesetzen Richtungen gleiche Geschwindigkeitspaare entsprechen. Die Hauptaxen der Polarisationsellipsen fallen in die Richtungen lineärer Polarisation, die bei verschwindender Aktivität derselben Wellennormale entsprechen würden; sie sind also durch die Betrachtungen auf S. 594 bereits bestimmt.

Ist $(a_{11}) = (a_{22})$, fällt also die Wellennormale in eine Richtung, die bei verschwindender Aktivität eine optische Axe darstellen würde, oder ist das Medium isotrop-aktiv, so wird $G^2 = F^2$; die Polarisationsellipsen degenerieren zu Kreisen, ohne daß etwa gleichzeitig die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten für beide Wellen gleich würden.

Die Gleichung (134) läßt sich auch schreiben

$$\omega^4 - \omega^2\left((a_{11}) + (a_{22}) + c'^2\right) + (a_{11})(a_{22}) = 0, \qquad 134'')$$

und daraus folgen für die beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 die Beziehungen

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = (a_{11}) + (a_{22}) + c'^2, \quad \omega_1^2\,\omega_2^2 = (a_{11})(a_{22}).$$

Bildet man nun aus (134') für die beiden Wellen (1) und (2)

$$\frac{G_1^2\,G_2^2}{F_1^2\,F_2^2} = \frac{\left((a_{22}) - \omega_1^2\right)\left((a_{22}) - \omega_2^2\right)}{\left((a_{11}) - \omega_1^2\right)\left((a_{11}) - \omega_2^2\right)},$$

so erhält man durch Einführung dieser Werte

134''') $$\frac{G_1^2\,G_2^2}{F_1^2\,F_2^2} = \frac{(a_{22})}{(a_{11})};$$

ungleich den beiden Wellen in magnetisch-aktiven Krystallen besitzen die in natürlich-aktiven sich fortpflanzenden keine einander streng ähnlichen Polarisationsellipsen; doch wird man, da in Wirklichkeit (a_{11}) und (a_{22}) bei allen bekannten Krystallen sehr wenig von einander verschieden sind, diese Ellipsen als angenähert ähnlich, übrigens aber gekreuzt liegend, betrachten dürfen.[53])

Aus der Gleichung (134'') erhält man für die beiden Wurzeln für ω^2 die noch ganz strengen Ausdrücke

134'''') $$\begin{cases} \omega^2 = \frac{1}{2}\Big((a_{11}) + (a_{22}) + c'^2 \\ \qquad\qquad \pm \sqrt{((a_{11}) - (a_{22}))^2 + 2\,c'^2\,((a_{11}) + (a_{22})) + c'^4}\Big); \end{cases}$$

da (a_{11}) und (a_{22}) beide positiv sind, so verschwindet die Wurzelgröße für keine Richtung der Wellennormalen, und es zerfällt hiernach die Fläche N der Normalengeschwindigkeiten stets in zwei Hüllen, die keinen Punkt gemein haben.

Berücksichtigt man weiter, daß (a_{11}) und (a_{22}) die beiden Werte von ω^2 sind, die sich bei verschwindender Aktivität für dieselbe Fortpflanzungsrichtung einstellen würden, und daß diese in (51) u. f. nach ihrer Abhängigkeit von der Richtung der Wellennormalen bestimmt sind, so kann man jetzt gleichfalls ω_1^2 und ω_2^2 als Funktionen der Winkel U' und U'' der Wellennormalen gegen die optischen Axen ausdrücken. Der resultierende strenge Ausdruck ist sehr kompliziert; man kann aber einen angenäherten einfacheren bilden, indem man in dem mit c'^2 proportionalen Glied der Ausgangsformel (134'') für die Geschwindigkeit ω, welche meist nur sehr wenig mit der Richtung variiert, einen konstanten Mittelwert ω_m einsetzt; dadurch wird die Gleichung (134'') mit (125) konform, und man erhält ohne weiteres durch Übertragung von (126)

135) $$\omega^2 = \frac{1}{2}\Big((a_{11}) + (a_{22}) \pm \sqrt{((a_{11}) - (a_{22}))^2 + 4\,c'^2\,\omega_m^2}\Big).$$

Ähnlich läßt sich auch eine angenäherte Gleichung für G/F erhalten, indem man aus (133''') ω nur so weit eliminiert, als es in den nicht mit c' multiplizierten Gliedern auftritt, und in den übrigen durch ω_m ersetzt. Man erhält so

135') $$(a_{11}) - (a_{22}) + c'\,\omega_m\left(\frac{G}{F} - \frac{F}{G}\right) = 0,$$

konform mit (125'), und hieraus

$$\frac{G}{F} = -\frac{1}{2\,c'\,\omega_m}\Big((a_{11}) - (a_{22}) \pm \sqrt{((a_{22}) - (a_{11}))^2 + 4\,c'^2\omega_m^2}\Big), \qquad 135'')$$

was der Formel (126′) entspricht. Die oberen und die unteren Zeichen in den Gleichungen (135) und (135″) entsprechen sich nach den Formeln (133‴) gegenseitig.

Wie S. 682 bei den analogen Formeln gezeigt ist, kann man nun auch in diese die Winkel U' und U'' einführen, welche die Wellennormale r, resp. die Z-Axe, mit den optischen Axen O' und O'' einschließt.

Die erhaltenen Resultate gestatten eine Diskussion in derselben Weise, wie die Formeln (126) bis (126‴).

Bezeichnet man wieder die durch das obere Vorzeichen bestimmte Wurzel mit dem Index 1, die durch das untere bestimmte mit dem Index 2, so ist auch wieder $\omega_1^2 > \omega_2^2$, und G_1/F_1 besitzt das Vorzeichen von $-c'$ resp. $-c$, G_2/F_2 das von $+c'$ resp. $+c$; bei positivem c rotiert also die Welle (1) links, die Welle (2) rechts, und diese Bestimmung gilt für alle Richtungen gleichmäßig, denn ein Verschwinden der Elliptizität und eine damit verbundene Umkehrung der Rotationsrichtung findet nicht statt. In entgegengesetzten Richtungen haben somit die rechts rotierenden Wellen unter sich die gleiche Geschwindigkeit, und ebenso die links rotierenden. —

Nach der Beobachtung ist das Verhältnis $2\,c'\,\omega_m/(a_1 - a_3)$ jederzeit eine äußerst kleine Größe. Darum ist auch $2\,c'\,\omega_m/((a_{22})-(a_{11}))$ sehr klein, sowie die Wellennormale einen Winkel von einigen Graden mit den optischen Axen einschließt. Für derartige Richtungen kann man daher statt der obigen strengen Formeln praktisch brauchbare angenäherte aufstellen. Es folgt, wenn man wieder $(a_{22}) > (a_{11})$ wählt, direkt aus (134)

$$\omega_1^2 = (a_{22}) + \frac{c'^2\,\omega_m^2}{(a_{22}) - (a_{11})}, \qquad \omega_2^2 = (a_{11}) - \frac{c'^2\,\omega_m^2}{(a_{22}) - (a_{11})}, \qquad 135''')$$

$$\frac{G_1}{F_1} = -\frac{c'\,\omega_m}{(a_{22}) - (a_{11})}, \qquad \frac{F_2}{G_2} = +\frac{c'\,\omega_m}{(a_{22}) - (a_{11})}. \qquad 135'''')$$

Die Polarisationsellipse ist somit für die Welle (1) in der Richtung der X-, für die Welle (2) in der Richtung der Y-Axe im allgemeinen außerordentlich gestreckt.

Bezüglich des Verhaltens in der Nähe der optischen Axen findet dabei eine bemerkenswerte Verschiedenheit zwischen den einaxigen und den zweiaxigen Krystallen statt. Da bei einaxigen inaktiven Krystallen die beiden Hüllen der Fläche N sich in der positiven und der negativen optischen Axe berühren, so ist für

Richtungen, welche Winkel erster Ordnung mit der optischen Axe einschließen, $(a_{22}) - (a_{11})$ eine Größe zweiter Ordnung; und da bei zweiaxigen inaktiven Krystallen die beiden Hüllen sich in den optischen Axen schneiden, so ist dort unter den analogen Umständen $(a_{22}) - (a_{11})$ nur von der ersten Ordnung. Hieraus folgt bei Heranziehung der Formeln (135'''), daß bei einaxigen Krystallen die Elliptieität, und somit die Wirkung der Aktivität überhaupt, in erheblich größerer Entfernung von der optischen Axe noch merklich sein muß, als bei zweiaxigen Krystallen, und gleiches ergeben natürlich auch die strengen Formeln (135'').

Dies Resultat — das sich übrigens offenbar auch auf magnetisch-aktive Körper übertragen läßt — ist von Interesse, weil es vielleicht erklärt, warum zweiaxige Krystalle, die mit natürlicher Aktivität behaftet sind, bisher noch nicht aufgefunden werden konnten: denn es bleibt ersichtlich die Möglichkeit, daß die Bedingungen für das Zustandekommen der charakteristischen Erscheinungen zwar so, wie die Theorie sie zuläßt, erfüllt sind, daß die Phänomene selbst sich aber nur feineren Hilfsmitteln, als bisher angewandt, enthüllen. —

Zur Behandlung isotroper Medien geht man am einfachsten von der aus (134') zu gewinnenden Folgerung aus, daß für sie

136) $$F_1 = -G_1, \quad F_2 = +G_2$$

ist; dies liefert in Verbindung mit (133''') wegen $a_{11} = a_{22} = a$

136') $$a - \omega_1^2 = -c'\omega_1, \quad a - \omega_2^2 = +c'\omega_2.$$

Von den Wurzeln dieser Gleichungen kommen nur die positiven in Betracht, da die Fortpflanzung parallel mit $+Z$ geschehen soll: von den negativen, welche für die entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtung Bedeutung gewinnen, hat diejenige für die Welle (1) den entgegengesetzten Wert von der positiven für die Welle (2), und umgekehrt, was in Übereinstimmung ist mit dem oben gefolgerten Resultat, wonach die Wellen, die in Bezug auf die Fortpflanzungsrichtung in gleichem Sinne rotieren, auch die gleichen Geschwindigkeiten besitzen.

Angenäherte Werte von ω_1 und ω_2 sind gegeben durch

136'') $$\omega_1^2 = a + c'\sqrt{a}, \quad \omega_2^2 = a - c'\sqrt{a}. —$$

Auch bei natürlich aktiven Krystallen kann man das allgemeine Gesetz, welches die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten mit den Winkeln der Wellennormalen gegen ihre Polarisationsaxen, d. h. gegen die optischen Symmetrieaxen des nicht aktiven Krystalles, verbindet, so ableiten, daß man die Koordinatenaxen in die der gegebenen Farbe

entsprechenden Polarisationsaxen legt und die Wellennormale beliebig läßt.

Dann nehmen die Hauptgleichungen für die komplexen Variabeln $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die folgende Gestalt an

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}'' &= \frac{\partial}{\partial z}(a_2\,\mathfrak{y} + c\,\mathfrak{v}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_3\,\mathfrak{z} + c\,\mathfrak{w}),\\ \mathfrak{v}'' &= \frac{\partial}{\partial x}(a_3\,\mathfrak{z} + c\,\mathfrak{w}) - \frac{\partial}{\partial z}(a_1\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{u}),\\ \mathfrak{w}'' &= \frac{\partial}{\partial y}(a_1\,\mathfrak{x} + c\,\mathfrak{u}) - \frac{\partial}{\partial x}(a_2\,\mathfrak{y} + c\,\mathfrak{v}), \end{aligned}\right\} \qquad 137)$$

und ihre Integration geschieht durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{R}\,e^{iT}, \qquad 137')$$

wobei gültig bleibt, was zu dem System (127′) gesagt ist.

Man erhält so

$$\left.\begin{aligned} \omega^2\,\mathfrak{F} &= \gamma\,(a_2\,(\mathfrak{F}\gamma - \mathfrak{H}\alpha) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{G}) - \beta\,(a_3\,(\mathfrak{G}\alpha - \mathfrak{F}\beta) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{H}),\\ \omega^2\,\mathfrak{G} &= \alpha\,(a_3\,(\mathfrak{G}\alpha - \mathfrak{F}\beta) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{H}) - \gamma\,(a_1\,(\mathfrak{H}\beta - \mathfrak{G}\gamma) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{F}),\\ \omega^2\,\mathfrak{H} &= \beta\,(a_1\,(\mathfrak{H}\beta - \mathfrak{G}\gamma) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{F}) - \alpha\,(a_2\,(\mathfrak{F}\gamma - \mathfrak{H}\alpha) + i\,c'\,\omega\,\mathfrak{G}), \end{aligned}\right\} \quad 137'')$$

und die Elimination von $\mathfrak{F} : \mathfrak{G} : \mathfrak{H}$ ergiebt das gesuchte Gesetz für ω, das natürlich nur scheinbar komplex ist.

Einfacher gelangt man zum Ziele, indem man nach (127‴) und (127⁗) die Richtungskosinus $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ des Hilfsvektors $\mathfrak{d}$ einführt und die Formeln (137″) mit den Faktoren $0, -\gamma, \beta;\ \gamma, 0, -\alpha;\ -\beta, \alpha, 0$ zusammenfaßt; man findet so:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 - \omega^2)\,\mathfrak{L} + i\,c'\,\omega\,(\mathfrak{M}\gamma - \mathfrak{N}\beta) &= \alpha\,\mathfrak{D},\\ (a_2 - \omega^2)\,\mathfrak{M} + i\,c'\,\omega\,(\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{L}\gamma) &= \beta\,\mathfrak{D},\\ (a_3 - \omega^2)\,\mathfrak{N} + i\,c'\,\omega\,(\mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha) &= \gamma\,\mathfrak{D}, \end{aligned}\right\} \qquad 138)$$

wobei

$$a_1\,\alpha\,\mathfrak{L} + a_2\,\beta\,\mathfrak{M} + a_3\,\gamma\,\mathfrak{N} = \mathfrak{D} \qquad 138')$$

gesetzt ist. Dies System entspricht genau dem System (47′) bei inaktiven Krystallen, und man erhält aus ihm gleichfalls zwei einfache Beziehungen durch die Faktoren $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$; sie lauten

$$\left.\begin{aligned} \omega^2 &= a_1\,\mathfrak{L}^2 + a_2\,\mathfrak{M}^2 + a_3\,\mathfrak{N}^2,\\ -\,i\,c'\,\omega &= a_1\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{F} + a_2\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{G} + a_3\,\mathfrak{N}\,\mathfrak{H} \end{aligned}\right\} \qquad 138')$$

und enthalten dieselben Gesetze der Ellipticität der Schwingungen, die oben einfacher abgeleitet sind.

Außerdem aber repräsentiert das System (138) zusammen mit der Bedingung

$$\alpha\,\mathfrak{L} + \beta\,\mathfrak{M} + \gamma\,\mathfrak{N} = 0$$

vier Gleichungen, die in $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}$ homogen lineär sind; ihre Determinante gleich Null gesetzt, liefert die Gleichung für ω^2. Sie lautet

$$138'')\quad \begin{vmatrix} (a_1-\omega^2) & +ic'\omega\gamma & -ic'\omega\beta & -\alpha \\ -ic'\omega\gamma & (a_2-\omega^2) & +ic'\omega\alpha & -\beta \\ +ic'\omega\beta & -ic'\omega\alpha & (a_3-\omega^2) & -\gamma \\ +\alpha & +\beta & +\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und giebt, in derselben Weise, wie (129'') berechnet, das relativ einfache Resultat

$$138''')\quad \begin{cases} (a_2-\omega^2)(a_3-\omega^2)\alpha^2+(a_3-\omega^2)(a_1-\omega^2)\beta^2+(a_1-\omega^2)(a_2-\omega^2)\gamma^2 \\ \qquad = c'^2\omega^2 = \left(\dfrac{c\tau\omega}{2\pi}\right)^2, \end{cases}$$

in welchem der Einfluß der Aktivität allein durch das rechts stehende Glied gegeben ist.[54])

Für optisch einaxige Krystalle reduziert sich diese Gleichung auf

$$138'''')\qquad (a_1-\omega^2)(a_3(\alpha^2+\beta^2)+a_1\gamma^2-\omega^2) = \left(\frac{c\tau\omega}{2\pi}\right)^2,$$

die mit (134) gleichgestaltet ist; für isotrope Körper gelangt man zu (136') zurück.

Da in dem letzteren Falle die beiden Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 von der Richtung der Wellennormalen unabhängig sind, so ist hier die Oberfläche N durch zwei konzentrische Kugeln dargestellt, und das Gleiche gilt offenbar bezüglich der Fläche S. —

Wie bei den magnetisch-, so ist auch bei den natürlich-aktiven Körpern keines der im Vorhergehenden besprochenen theoretisch einfachen Phänomene die Veranlassung zur Entdeckung der eigentümlichen Eigenschaften dieser Körper gewesen. Kompliziertere, aber zugleich viel auffälligere Erscheinungen, die an ebenen Wellen wahrzunehmen sind, und die wir im nächsten Paragraphen besprechen werden, haben die Aufmerksamkeit zuerst auf sich gelenkt; ihre Erforschung hat dann die Veranlassung zu der allgemeinen Theorie gegeben. Die direkte Prüfung dieser Theorie durch Nachweisung jener einfacheren Vorgänge bietet ziemliche Schwierigkeiten; denn für alle Richtungen der Normalen, denen merklich elliptische Schwingungen entsprechen, sind die Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Wellen einander sehr nahe gleich, und infolge hiervon gelingt es nur durch besondere Kunstgriffe, die bezüglichen Wellen für die Untersuchung ihres Schwingungszustandes zu sondern.

§ 20. Reflexion und Brechung ebener homogener Wellen an der ebenen Oberfläche durchsichtiger aktiver Körper. Phänomene, die beim normalen Durchgang durch eine Platte aus einem solchen eintreten. Drehung der Polarisationsebene.

Wenden wir uns nunmehr zu dem Problem der Reflexion und der Brechung an der ebenen Grenze eines magnetisch- oder eines natürlich-aktiven Körpers, so ist dasselbe auf Grund der Gleichungen (123''') oder (132''') für ebene homogene Wellen ohne alle prinzipielle Schwierigkeiten lösbar. Indessen sind, wie hervortreten wird, die bezüglichen Vorgänge nicht derart, daß es sich lohnte, die bezüglichen Entwickelungen hier auszuführen. Es genüge daher die Angabe einiger Resultate für den Fall, daß es sich um den Einfall in einer isotropen inaktiven Substanz, etwa im Luftraum, handelt.

Eine einfallende lineär polarisierte Welle erregt in dem aktiven Medium zwei elliptisch polarisierte, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten, und deshalb nach dem auch hier gültigen Brechungsgesetz von S. 607 in verschiedenen Richtungen fortpflanzen; die Hauptaxen der Polarisationsellipsen bestimmen sich ihren Richtungen nach direkt durch das in § 11 über die Polarisationsrichtungen in nicht aktiven Krystallen Gesagte.

Soweit die Ellipticität ihrer Schwingungen merklich ist, besitzen die beiden Wellen nahezu gleiche Geschwindigkeiten, und demgemäß auch nahezu gleiche Fortpflanzungsrichtungen.

Die Richtung der in das erste Medium reflektierten Welle folgt dem gewöhnlichen Gesetz für isotrope Medien; aber ihr Polarisationszustand ist infolge der Aktivität des zweiten Mediums geändert; statt lineärer findet elliptische Polarisation statt. Indessen ist diese Ellipticität äußerst gering und der Beobachtung deshalb bisher noch nicht zugänglich.[55]) —

Während die Gesetze dieser Phänomene nur durch die vollständige Theorie zu gewinnen und dabei durch die Beobachtung nicht befriedigend zu verfolgen sind, ist es möglich, die Gesetze für die sehr auffälligen Erscheinungen, welche eine normal durch eine Platte aus einer aktiven Substanz gehende Welle liefert, in genügender Schärfe durch eine angenäherte Theorie abzuleiten, die ähnlich, wie die in § 16 auseinandergesetzte für Platten aus nichtaktiver Substanz, den Einfluß der inneren und der äußeren Reflexionen auf den Vorgang ignoriert.

Es möge bemerkt werden, daß diese angenäherte Theorie bei magnetisch-aktiven Körpern eine ziemlich rohe, bei natürlich-

aktiven eine überaus feine Annäherung an die Wirklichkeit darstellt, was darauf beruht, daß bei ersteren der Gangunterschied zweier direkt und zweier mit mehrfacher innerer Reflexion durch die Platte gehenden Wellen verschieden, bei letzteren aber gleich ist; denn in magnetisch-aktiven Körpern behalten die im Innern normal reflektierten Wellen ihre Geschwindigkeiten bei, in natürlich-aktiven tauschen sie dieselben aus. —

Für die Behandlung jener Erscheinungen wählen wir die Z-Axe zum Einfallslot, verfügen über die X- und die Y-Axe ebenso, wie in den letzten beiden Paragraphen, und setzen für die Komponenten des komplexen Polarisationsvektors $\mathfrak{p}$ in der einfallenden Welle

139) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{F} e^{iT}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G} e^{iT}, \quad T = \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Da die einfallende Schwingung sich beim Eintritt in die Platte in zwei elliptische von ähnlichen und gekreuzt liegenden Bahnen und von entgegengesetzter Rotationsrichtung zerlegt, so muß auch gelten

139') $$\mathfrak{u} = (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 \vartheta) e^{iT}, \quad \mathfrak{v} = -i(\mathfrak{E}_1 \vartheta - \mathfrak{E}_2) e^{iT},$$

wobei die Welle (1) links und (2) rechts rotiert, und ϑ das Axenverhältnis der Bahnellipsen darstellt. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke ergiebt

139'') $$\mathfrak{E}_1 = \frac{\mathfrak{F} + i\mathfrak{G}\vartheta}{1+\vartheta^2} = E_1 e^{-id_1}, \quad \mathfrak{E}_2 = \frac{\mathfrak{F}\vartheta - i\mathfrak{G}}{1+\vartheta^2} = E_2 e^{-id_2},$$

wobei E_h und d_h Abkürzungen sind.

In der Platte besitzen die beiden Wellen die Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2; setzt man also kurz

$$\frac{2\pi l}{\tau\omega_1} = L_1, \quad \frac{2\pi l}{\tau\omega_2} = L_2,$$

so erhält man für die austretende Schwingung:

139''') $$\begin{cases} \mathfrak{u}_d = (E_1 e^{-i(L_1+d_1)} + E_2 \vartheta e^{-i(L_2+d_2)}) e^{iT} = \mathfrak{F}_d e^{iT}, \\ \mathfrak{v}_d = -i(E_1 \vartheta e^{-i(L_1+d_1)} - E_2 e^{-i(L_2+d_2)}) e^{iT} = \mathfrak{G}_d e^{iT}. \end{cases}$$

Die Werte der komplexen Amplituden $\mathfrak{F}_d$ und $\mathfrak{G}_d$ gestatten den Schwingungszustand der austretenden Welle zu beurteilen. Die Schwingung ist natürlich im allgemeinen elliptisch, man kann sie aber stets durch Verzögerung der einen Komponente zu einer lineären machen. Nennen wir diese Verzögerung d und bringen sie an $\mathfrak{u}$ an, vertauschen auch gleichzeitig $-i$ mit $e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, so erhalten wir

139'''') $$\begin{cases} \mathfrak{F}_d = E_1 e^{-i(L_1+d_1+d)} + E_2 \vartheta e^{-i(L_2+d_2+d)}, \\ \mathfrak{G}_d = E_1 \vartheta e^{-i(L_1+d_1+\frac{1}{2}\pi)} - E_2 e^{-i(L_2+d_2+\frac{1}{2}\pi)}. \end{cases}$$

Die Bedingung für das Eintreten einer lineären Schwingung ist, falls man $L_2 - L_1 + d_2 - d_1 = \Delta$ setzt,

$$(E_1^2 - E_2^2)\,\vartheta \cos d = E_1 E_2 \left(\cos(\Delta - d) - \vartheta^2 \cos(\Delta + d)\right), \qquad 140)$$

während das Verhältnis der reellen austretenden Amplituden — d. h. der Moduln von $\mathfrak{G}_d$ und $\mathfrak{F}_d$ — gegeben ist durch

$$\frac{G_d^2}{F_d^2} = \frac{E_1^2 \vartheta^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2 \vartheta \cos \Delta}{E_1^2 + E_2^2 \vartheta^2 + 2 E_1 E_2 \vartheta \cos \Delta} = \operatorname{tg}^2 \alpha, \qquad 140')$$

wobei α das Azimut der wiederhergestellten lineären Polarisation gegen die X-Axe bezeichnet.

Die Verzögerung d läßt sich mit dem S. 664 beschriebenen Kompensator, der Winkel α mit einem auf einem Teilkreis drehbaren Analysator beobachten; mit den so erhaltenen Werten und mit gegebenen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ können dann, obwohl umständlich, nach (139''), (140), (140') die Größen E_h, d_h, ϑ und Δ, kann also auch $L_1 - L_2$ berechnet werden. Hierdurch ist ein Mittel gegeben, auch ohne die Sonderung der beiden in dem aktiven Medium fortgepflanzten Wellen Aufschlüsse über deren Verhalten zu gewinnen.

Praktische Bedeutung hat nur der Fall, daß das einfallende Licht lineär polarisiert ist, die Amplituden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ also reell sind.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, wenn außerdem noch die beiden in der Platte fortgepflanzten Wellen zirkular polarisiert sind, also $\vartheta = 1$ ist. Hier kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Polarisationsebene der einfallenden Welle in die XZ-Ebene legen, also $G = 0$, $F = E$ setzen. Es folgt dann

$$d_1 = d_2 = 0, \quad E_1 = E_2 = \tfrac{1}{2} E,$$

und die Bedingung (140) läßt sich durch $d = 0$ befriedigen; das aus der Platte austretende Licht ist also von selbst lineär polarisiert, und die Gleichung (140') ergiebt $\alpha = \pm \frac{1}{2}(L_1 - L_2)$. Über das Vorzeichen von α orientiert man sich am besten aus den Formeln (139'''), die in dem vorliegenden speziellen Falle die Gestalt annehmen

$$u_d = E \cos \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos \tfrac{1}{2}(2T - L_1 - L_2),$$
$$v_d = E \sin \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos \tfrac{1}{2}(2T - L_1 - L_2);$$

sie ergeben

$$\alpha = + \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) = \frac{\pi l}{\tau}\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right), \qquad 140'')$$

und hieraus folgt, daß, wenn die links, resp. positiv, rotierende Welle die größere Geschwindigkeit besitzt, auch die Drehung in positiver Richtung stattfindet.[56])

Berücksichtigt man, daß die beiden Geschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sich jederzeit nur wenig unterscheiden, so kann man statt (140'') auch schreiben

$$\alpha = \frac{\pi l}{2 \tau \omega_m^3} (\omega_1^2 - \omega_2^2),$$

wobei ω_m einen mittleren Wert bezeichnet; verbindet man hiermit die Gleichung (125'''), so erhält man als für magnetisch-aktive Medien gültig

$$140''') \qquad \alpha = \frac{\pi l b_3'}{\tau \omega_m^3},$$

zieht man die Gleichungen (136') heran, so ergiebt sich als für natürlich-aktive Medien gültig

$$140'''') \qquad \alpha = \frac{\pi l c'}{\tau \omega_m^2} = \frac{c l}{2 \omega_m^2}.$$

Da b_3 und c durch Reihen nach fallenden geraden Potenzen von τ dargestellt werden, so ist die Drehung von der Farbe abhängig, und zwar folgt sie bei magnetisch und bei natürlich aktiven Medien etwas verschiedenen Gesetzen.[57]) —

Beobachtungen über die Drehung der Polarisationsebene in einer Platte aus einem aktiven Körper, besonders wenn, wie vorstehend angenommen, die darin fortgepflanzten Wellen zirkular schwingen, sind mit einer ziemlich bedeutenden Genauigkeit anzustellen möglich, da man den Winkel α durch Steigerung der Dicke l der Platte, soweit nicht praktische Schwierigkeiten eintreten, beliebig groß machen kann. Demgemäß stellen sie die klassische Methode nicht nur zur Aufsuchung der Aktivität überhaupt, sondern auch zur Bestimmung ihrer Parameter b_3, resp. b, und c dar, mit denen α durch die Formeln (140''') und (140'''') in einfachste Verbindung gebracht ist.

Bezüglich der so erhaltenen Resultate sei nur erwähnt, daß magnetisch aktive Körper verschiedenster Art sowohl mit positivem, als mit negativem Parameter b aufgefunden sind, die also, wenn das Licht der lokalen magnetischen Axe parallel verläuft, seine Polarisationsebene in positivem resp. in negativem Sinne drehen. Analoges gilt bei den natürlich aktiven Körpern bezüglich des Vorzeichens von c; dabei mag erwähnt werden, daß einer und derselben Substanz, welche in krystallinischem Zustand natürliche Aktivität zeigt, die eine oder die andere Drehungsrichtung entspricht, je nachdem der Krystall die eine oder die andere der korrespondierenden enantiomorphen Formen besitzt[58]); daß aber die Drehung, welche dieselbe Substanz im amorphen Zustand, z. B. in einer Lösung hervorbringt,

von der vorgenannten nach Richtung und Größe unabhängig zu sein scheint.[59]) —

Fängt man die aus der Platte austretende Welle mit einem Analysator auf, dessen Polarisationsebene den Winkel β mit der XZ-Ebene einschließt, so ist die durchgehende Komponente $\mathfrak{q}_d$ bei Vernachlässigung der Schwächungen durch Reflexion gegeben durch

$$\mathfrak{q}_d = \mathfrak{u}_d \cos\beta + \mathfrak{v}_d \sin\beta\,;$$

ihre resultierende reelle Amplitude A folgt aus

$$\left.\begin{aligned} A^2 = E_1^2\ (\cos^2\beta + \vartheta^2\sin^2\beta) + E_2^2\,(\vartheta^2\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ + E_1\,E_2(2\,\vartheta\cos 2\,\beta\cos\varDelta + (1+\vartheta^2)\sin 2\,\beta\sin\varDelta)\,, \end{aligned}\right\} \quad 141)$$

worin $\varDelta$ dieselbe Bedeutung hat, wie oben.

Diese Gleichung bildet die Grundlage für die Theorie der Erscheinungen, die Platten aktiver Medien im Polarisationsapparat zeigen. Man kann sie ähnlich, wie die analoge Formel (110), die sich auf inaktive Medien bezieht, auch anwenden auf die Teile einer aus dem Körper hergestellten Kugelschale, die vom Centrum her mit polarisiertem Licht beleuchtet wird, und damit die Brücke schlagen zu einer angenäherten Theorie der an ebenen Platten im konvergenten Licht wahrnehmbaren Phänomene.[60]) Dabei ist dann die von Ort zu Ort auf der Kugelschale veränderliche Lage des XY-Koordinatensystemes und der gleichfalls veränderliche Wert der Geschwindigkeiten ω_1, ω_2, wie des Amplitudenverhältnisses ϑ in Rechnung zu ziehen. Die Resultate werden außerordentlich kompliziert, aber die Erscheinungen unterscheiden sich nur in der Nähe der optischen Axen erheblich von denjenigen, welche bei inaktiven Krystallen zu beobachten sind.

Auf die Richtung einer optischen Axe selbst angewandt vereinfacht sich die Formel (141); hier ist nach S. 697 $\vartheta = 1$, $d_1 = d_2 = 0$, $E_1 = E_2 = \frac{1}{2}E$, und man erhält sogleich

$$A^2 = E^2\cos^2\left(\beta - \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1)\right) = E^2\cos^2(\beta - \alpha)\,, \qquad 141')$$

wie dies leicht auch direkt zu gewinnen ist.

Fällt weißes Licht ein, so ergiebt sich für die durchgehende Intensität

$$I_d = \sum I_n \cos^2(\beta - \alpha_n)\,, \qquad 141'')$$

wobei der Index n sich auf die verschiedenen Bestandteile bezieht. Das austretende Licht ist somit gefärbt, und man erkennt leicht, daß die Färbungen, die allgemein von dem Azimut β abhängen, bei zwei um $\pm 90^0$ verschiedenen Stellungen des Analysators zu einander komplementär sind.

§ 21. Einfluß von Oberflächenschichten auf die Phänomene der Reflexion und der Brechung, insbesondere an den Grenzen isotroper Medien.

Nach den Entwickelungen der vorigen Paragraphen sind von den verschiedenen Formen der Grenzbedingungen für durchsichtige Medien nur die für inaktive Krystalle gültigen, als deren speziellsten und einfachsten Fall wir die auf isotrope Medien bezüglichen betrachten, einer Prüfung durch die Beobachtung fähig. Es ist nun nicht ohne Bedeutung, daß sie durch mit feinsten Mitteln vorgenommene Messungen eine allseitige strenge Bestätigung nicht gefunden haben.

Die gewöhnliche Anordnung der Beobachtungen ist die, daß eine ebene Welle lineär polarisierten Lichtes innerhalb eines isotropen Mediums auf die ebene Grenze nach einem anderen isotropen oder nach einem krystallinischen Medium auffällt, und daß die Natur der gebrochenen, insbesondere aber die der zurückgeworfenen Welle mit Kompensator und Analysator untersucht wird. Nach der Theorie sollen dann beide Wellen bei allen Einfallswinkeln gleichfalls lineär polarisiert sein; die Erfahrung zeigt aber, daß die reflektierte Welle stets, die gebrochene wenigstens dann, wenn das zweite Medium gleichfalls isotrop ist, eine elliptische Polarisation besitzt. Diese Abweichung macht sich insbesondere geltend, wenn der Einfallswinkel wachsend dem S. 622 und 627 definierten Polarisationswinkel nahe kommt; hier nimmt das Axenverhältnis der Polarisationsellipse im reflektierten Licht von einem zunächst unmerklichen Wert ziemlich rasch bis zu einem Maximum zu, das sehr nahezu beim Polarisationswinkel selbst erreicht wird, um darauf schnell wieder bis auf eine unmerkliche Größe abzunehmen. Die große Axe der Polarisationsellipse fällt jederzeit nahezu in die Richtung der durch die Theorie verlangten lineären Polarisation; sie liegt also beim Polarisationswinkel in der Einfallsebene, was einer Phasendifferenz der beiden Komponenten der Schwingung von $\frac{1}{2}\pi$ entspricht.

Diese merkwürdige Differenz zwischen der Beobachtung und der Theorie, die an sich geeignet wäre, Bedenken gegen die gesamten Grundlagen der letzteren zu erregen, läßt sich aber mit größter Wahrscheinlichkeit dadurch erklären, daß nur allein die für die Ableitung der Grenzbedingungen zu Grunde gelegte Annahme über das Verhalten der sich berührenden beiden Körper (h) und (i) nächst

der Grenze o_{hi} in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, daß nämlich der Übergang von dem einen homogenen Teil zum andern nicht innerhalb einer Schicht stattfindet, deren Dicke als unmerklich betrachtet werden darf. In der That ist es wohl einleuchtend, daß bei den Lichtbewegungen, welche merkliche Wechsel der Zustände im Bereiche eines Zehntausendstelmillimeters zur Folge haben, Übergangsschichten noch spezifische Wirkungen äußern können, die bei Vorgängen gröberer Art, wie z. B. bei den praktisch herstellbaren elektromagnetischen Schwingungen, ohne Einfluß sind.

Für die Richtigkeit einer solchen Auffassung spricht von vornherein eine Anzahl qualitativer Beobachtungen, so insbesondere die überaus große Einwirkung minimaler Verunreinigungen der Grenzflächen auf das Verhalten des reflektierten Lichtes. Oberflächen von möglichster Reinheit, wie dieselben z. B. durch Spaltung an gewissen Krystallen hergestellt werden können, veranlassen im frischen Zustande nur eine sehr geringe Ellipticität; es genügt aber schon die bloße Einwirkung der Luft, um sie binnen kurzer Zeit so zu verändern, daß die Ellipticität das Vielfache des anfänglichen Betrages erreicht. —

Bei der näheren Untersuchung der optischen Wirkung von Oberflächenschichten wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß es sich um eine Grenze zwischen zwei isotropen Körpern handelt, da dieser schon genügt, um das Charakteristische der Wirkung hervortreten zu lassen, überdies bei weitem am genauesten studiert ist. Ferner schicken wir einer allgemeineren Theorie die Behandlung eines speziellen Falles von besonderem Interesse voraus, der darin besteht, daß die Oberflächenschicht im wesentlichen als eine homogene Haut einer fremden und gleichfalls isotropen Substanz angesehen werden kann, der gegenüber die Inhomogenitäten an den Zwischengrenzen nicht in Betracht kommen; man kann sich vorstellen, daß unter Umständen das Polieren eines festen Körpers einen derartigen Überzug bewirkt. Für die dann eintretenden Vorgänge liefern die Resultate des § 15 über die Reflexion und die Brechung an einer planparallelen Schicht eines durchsichtigen Mediums direkt die Theorie.

Insbesondere erhält man aus den Formeln (103″), wenn man die Dicke der Zwischenschicht klein genug annimmt, um die Quadrate der Ausdrücke

$$L_{,} = \frac{2\pi\gamma_{,} l}{\tau\,\omega_{,}}, \quad L_{,,} = \frac{2\pi\gamma_{,,} l}{\tau\,\omega_{,,}}$$

neben Eins zu vernachlässigen:

142) $$\begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{E} \dfrac{(\varrho + \varrho') + i(\varrho - \varrho') L_,}{(1 + \varrho\varrho') + i(1 - \varrho\varrho') L_,}, \\ \mathfrak{D} = \mathfrak{E} \dfrac{\delta\delta' (1 + i L_{,,})}{(1 + \varrho\varrho') + i(1 - \varrho\varrho') L_,}. \end{cases}$$

Da bei verschwindender Dicke l der Zwischenschicht, und somit verschwindenden $L_,$ und $L_{,,}$ die Reflexion und die Brechung direkt an der Grenze der Medien (0) und (2) stattfindet, so müssen, was auch die Ausrechnung zeigt,

142′) $$\frac{\varrho + \varrho'}{1 + \varrho\varrho'} = \varrho'', \quad \frac{\delta\delta'}{1 + \varrho\varrho'} = \delta''$$

die Schwächungen angeben, die theoretisch bei der Reflexion und der Brechung an dieser Grenze eintreten würden.

Vernachlässigt man die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man nunmehr

142″) $$\begin{cases} \mathfrak{R} = \mathfrak{E}\left(\varrho'' - \dfrac{2 i \varrho' (1 - \varrho^2) L_,}{(1 + \varrho\varrho')^2}\right) = R' + i R'', \\ \mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,\delta'' \left(1 + i \dfrac{(1 + \varrho\varrho') L_{,,} - (1 - \varrho\varrho') L_,}{1 + \varrho\varrho'}\right) = D' + i D'', \end{cases}$$

wobei R', R'', D', D'' die früheren Bezeichnungen sind.

Für die Phasendifferenz $\varDelta$ der Komponenten parallel und normal zur Einfallsebene, die aus einfallendem lineär polarisierten Licht entstehen, findet man, wenn man, wie in § 15, die Gesamtamplituden E_s, E_p, R_s, R_p einführt, bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

142‴) $$R_p R_s \cos \varDelta = R'_p R'_s + R''_p R''_s = E_p E_s \varrho''_p \varrho''_s .$$

ϱ''_s, und somit nach (142′) auch $\varrho_s + \varrho'_s$, verschwindet, wenn der Einfall unter dem Polarisationswinkel geschieht, der der Kombination der Medien (0) und (2) entspricht, und da nach (142″) zugleich

142⁗) $$R_s = - E_s \frac{2 \varrho'_s L_,}{(1 - \varrho_s^2)}, \quad R_p = E_p \varrho''_p ,$$

also von Null verschieden ist, so ergiebt sich, daß beim Polarisationswinkel bis auf eine Größe zweiter Ordnung $\varDelta = \pm \frac{1}{2}\pi$ ist. Über das Vorzeichen von $\varDelta$, und somit über die Rotationsrichtung, entscheidet nach S. 544 das Vorzeichen des Ausdruckes

$$R'_s R''_p - R'_p R''_s = + E_p E_s \frac{2 \varrho''_p \varrho'_s L_,}{(1 - \varrho_s^2)} ;$$

ist dasselbe positiv, so ist die Rotationsrichtung negativ, und umgekehrt. Da ϱ_s kleiner als Eins sein muß, so knüpft die Entscheidung an das Produkt

$$\varrho_p'' \varrho_s' = \frac{\alpha_{,,}\gamma - \alpha\gamma_{,,}}{\alpha_{,,}\gamma + \alpha\gamma_{,,}} \cdot \frac{\alpha_{,}\gamma_{,} - \alpha_{,,}\gamma_{,,}}{\alpha_{,}\gamma_{,} + \alpha_{,,}\gamma_{,,}}$$

an, von dem hinwiederum nur der Zähler, also das Aggregat

$$\sin(\varphi_{,,} - \varphi) \sin(\varphi_{,} - \varphi_{,,}) \cos(\varphi_{,} + \varphi_{,,})$$

in Betracht kommt. Wegen des vorausgesetzten Einfalles unter dem Polarisationswinkel der Kombination (0, 2) ist aber nach S. 627 $\varphi + \varphi_{,,} = \frac{1}{2}\pi$; somit lautet das vorstehende Produkt

$$\sin(\varphi_{,,} - \varphi) \sin(\varphi_{,} - \varphi_{,,}) \sin(\varphi - \varphi_{,})$$

und man erkennt, daß es positiv ist, wenn

$$\varphi \lesseqgtr \varphi_{,} \lesseqgtr \varphi_{,,},$$

negativ, wenn

$$\varphi \lesseqgtr \varphi_{,} \gtreqless \varphi_{,,}.$$

Da die Rotationsrichtung ersichtlich bei allen Einfallswinkeln die gleiche sein muß, und da die Winkel φ den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten parallel gehen, so enthält dieses Resultat einen einfachen Satz über die optische Wirkung einer homogenen Oberflächenhaut. Es wird nämlich das aus einfallendem lineär polarisierten durch Reflexion entstehende, elliptisch polarisierte Licht negativ oder positiv rotieren, je nachdem die homogene Zwischenschicht in ihrem optischen Verhalten zwischen oder außerhalb der beiden angrenzenden Medien steht.[61]) —

Wir gehen nunmehr zu dem in mancher Hinsicht allgemeineren Fall über, daß innerhalb der Grenzschicht das physikalische Verhalten des Mediums stetig variiert, wie dies insbesondere dann stattfindet, wenn fremde Körper daselbst ganz fehlen, und die Schicht nur von dem allmählichen Übergange von dem einen in den andern homogenen Teil herrührt. Man darf annehmen, daß letzteres sich an der Grenze zwischen einer Flüssigkeit und Luft und außerdem an Oberflächen fester Körper, die nur durch Spaltung hergestellt sind, sehr nahe realisiert findet.

Eine vollständige Behandlung dieses Problemes würde das Gesetz zu Grunde legen müssen, nach welchem sich der Übergang vollzieht, und würde auch in Rücksicht zu ziehen haben, daß einfallende ebene Wellen in der Übergangsschicht keineswegs wiederum ebene Wellen erregen. Beides bringt große Bedenken und Schwierigkeiten mit sich, und man wird hierdurch zu einer angenäherten Behandlung des Problemes gedrängt, die der früheren ersten als eine zweite Annäherung gegenübergestellt werden kann. Wir wollen bei ihrer Entwickelung die XY-Ebene dem betrachteten Oberflächen-

element do_{hi} parallel, etwa in die Grenze der inhomogenen Schicht nach dem homogenen Körper (h) hin legen, in welchem die einfallende Welle fortschreiten möge.

Die Hauptgleichungen für isotrope Medien nehmen nach den allgemeinen Grundsätzen des § 7 bei mit dem Ort stetig wechselndem physikalischen Verhalten die Form an

$$143)\quad u'' = \frac{\partial a\eta}{\partial z} - \frac{\partial a\zeta}{\partial y}, \quad v'' = \frac{\partial a\zeta}{\partial x} - \frac{\partial a\xi}{\partial z}, \quad w'' = \frac{\partial a\xi}{\partial y} - \frac{\partial a\eta}{\partial x};$$

$$143')\quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Multiplizieren wir die beiden ersten Formeln dieser beiden Tripel mit dz, integrieren sie über die sehr kleine Dicke l der Übergangsschicht (h, i) und bezeichnen die auf die Grenzflächen $z=0$ und $z=l$ bezüglichen Werte mit den Indices h und i, so erhalten wir:

$$143'')\quad \begin{cases} \int_0^l \left(u'' + \frac{\partial a\zeta}{\partial y}\right) dz = (\overline{a\eta})_i - (\overline{a\eta})_h, \\ \int_0^l \left(v'' - \frac{\partial a\zeta}{\partial x}\right) dz = (\overline{a\xi})_h - (\overline{a\xi})_i, \\ \int_0^l \left(\xi - \frac{\partial w}{\partial y}\right) dz = \overline{v}_h - \overline{v}_i, \quad \int_0^l \left(\eta + \frac{\partial w}{\partial x}\right) dz = \overline{u}_i - \overline{u}_h. \end{cases}$$

In erster Näherung hatten wir bisher die hierin links stehenden Integrale einfach vernachlässigt und dadurch die früheren Bedingungen

$$\overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \quad a_h\overline{\xi}_h = a_i\overline{\xi}_i, \quad a_h\overline{\eta}_h = a_i\overline{\eta}_i$$

erhalten, denen sich wegen der letzten Gleichungen der beiden Tripel (143) und (143') noch anschlossen die beiden Formeln

$$\overline{\zeta}_h = \overline{\zeta}_i, \quad \overline{w}_h = \overline{w}_i.$$

Wir werden eine zweite Näherung dadurch gewinnen können, daß wir in Übereinstimmung mit diesen Formeln in den als klein zu betrachtenden Integralen der Gleichungen (143'') u, v, w, $a\xi$, $a\eta$, ζ von z unabhängig annehmen.[62]) Berücksichtigen wir dann noch, daß a zwar mit z, nicht aber in merklicher Weise mit x und y variiert, und setzen wir abgekürzt

$$\int_0^l a\,dz = Q\omega_i^2 l, \quad \int_0^l \frac{dz}{a} = \frac{Pl}{\omega_i^2},$$

wo nunmehr P und Q reine Zahlen sind, so erhalten wir leicht das neue System:

$$\left.\begin{aligned}(\overline{a\eta})_h = (\overline{a\eta})_i - \left(\overline{u_i''} + \omega_i^2 Q \overline{\frac{\partial \zeta_i}{\partial y}}\right) l, \quad (\overline{a\xi})_h = (\overline{a\xi})_i + \left(\overline{v_i''} - \omega_i^2 Q \overline{\frac{\partial \zeta_i}{\partial x}}\right) l,\\ \bar v_h = \bar v_i + \left(\bar\xi_i P - \overline{\frac{\partial w_i}{\partial y}}\right) l, \quad \bar u_h = \bar u_i - \left(P \bar\eta_i + \overline{\frac{\partial w_i}{\partial x}}\right) l.\end{aligned}\right\} \quad 144')$$

Hierin ist rechts für die innerhalb der Schicht angenähert konstanten Ausdrücke der an der Grenze nach dem Medium (i) stattfindende Wert gesetzt, und zugleich berücksichtigt, daß $a_i = \omega_i^2$ ist.

Es ist sehr wesentlich, daß dieses System von Grenzbedingungen zwei, und nur zwei, Parameter, nämlich P und Q enthält, die in den Hauptgleichungen für homogene Körper nicht vorkommen. Hierdurch wird das Problem der Reflexion und Brechung von dem der einfachen Fortpflanzung bis zu einem gewissen Grade losgelöst, und die Prüfung der Theorie erfordert die numerische Bestimmung dieser speziellen Übergangskonstanten.

Über deren Wert gestatten die Formeln (144) einige Schlüsse; sie definieren nämlich Q als den arithmetischen Mittelwert von $a/\omega_i^2 = \omega^2/\omega_i^2 = n^2$, P als denjenigen von $\omega_i^2/a = \omega_i^2/\omega^2 = 1/n^2$, wobei n das Brechungsverhältnis des Medium (i) gegen eine Stelle in der Tiefe z der Oberflächenschicht bezeichnet. Hieraus folgt z. B., daß, wenn ω von dem Körper (h) zum Körper (i) dauernd zunimmt, $Q < 1$, $P > 1$ ist, wenn es abnimmt, $Q > 1$, $P < 1$ ist. —

Wir wollen die allgemeinen Formeln (144') auf den Fall anwenden, daß eine ebene homogene Welle in einem Medium (0) längs der XZ-Ebene auf die der XY-Ebene parallele Grenze nach einem Medium (2) fällt.

Für die normal zur Einfallsebene polarisierte Komponente erhalten wir dann bei Benutzung der früheren Bezeichnungen die Bedingungen

$$\bar v = \bar v_{\prime\prime} - P l \overline{\frac{\partial v_{\prime\prime}}{\partial z}}, \quad a \overline{\frac{\partial v}{\partial z}} = a_{\prime\prime} \overline{\frac{\partial v_{\prime\prime}}{\partial z}} - \left(\overline{\frac{\partial^2 v_{\prime\prime}}{\partial t^2}} - \omega_{\prime\prime}^2 Q \overline{\frac{\partial^2 v_{\prime\prime}}{\partial x^2}}\right) l. \quad 145)$$

Zur Integration setzen wir

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{E}_s e^{iT} + \mathfrak{R}_s e^{iT_r}, \quad \mathfrak{v}_{\prime\prime} = \mathfrak{D}_s e^{iT_d}, \quad 145')$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x + \gamma z}{\omega}\right), \quad T_r = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha x - \gamma z}{\omega}\right),\\ T_d = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha_{\prime\prime} x + \gamma_{\prime\prime} z}{\omega_{\prime\prime}}\right);\end{aligned}\right\} \quad 145'')$$

da die Dicke l der Schicht nicht ganz vernachlässigt ist, so müssen die auf der rechten Seite der Gleichungen (145) stehenden Glieder — mindestens je die ersten — statt für $z = 0$, für $z = l$ gebildet werden.

So erhält man die Bedingungen

$$\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s = \mathfrak{D}_s e^{-\frac{2\pi i \gamma_{,,} l}{\tau \omega_{,,}}} \left(1 + \frac{2\pi i l \gamma_{,,} P}{\tau \omega_{,,}}\right),$$

$$(\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\alpha\gamma = \mathfrak{D}_s \alpha_{,,}\gamma_{,,} e^{-\frac{2\pi i \gamma_{,,} l}{\tau \omega_{,,}}} \left(1 + \frac{2\pi i l}{\tau \omega_{,,} \gamma_{,,}}(1 - Q\alpha_{,,}^2)\right),$$

und wenn man die Exponentialgröße unter Annahme einer gegen die Wellenlänge in dem zweiten Medium $\lambda_{,,} = \tau\omega_{,,}$ kleinen Dicke l der Zwischenschicht entwickelt,

$$145''')\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s = \mathfrak{D}_s\left(1 + \frac{2\pi i l \gamma_{,,}}{\tau\omega_{,,}}(P-1)\right) = \mathfrak{D}_s(1 + i\mu_s), \\ (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\alpha\gamma = \mathfrak{D}_s\alpha_{,,}\gamma_{,,}\left(1 - \frac{2\pi i l \alpha_{,,}^2}{\tau\omega_{,,}\gamma_{,,}}(Q-1)\right) = \mathfrak{D}_s\alpha_{,,}\gamma_{,,}(1 - i\nu_s); \end{cases}$$

hierin sind μ_s und ν_s Abkürzungen. Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s \dfrac{\alpha\gamma(1 + i\mu_s) - \alpha_{,,}\gamma_{,,}(1 - i\nu_s)}{\alpha\gamma(1 + i\mu_s) + \alpha_{,,}\gamma_{,,}(1 - i\nu_s)}, \\ \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s \dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha\gamma(1 + i\mu_s) + \alpha_{,,}\gamma_{,,}(1 - i\nu_s)}, \end{cases}$$

oder bei Beschränkung auf die niedrigste Ordnung und unter Einführung der Abkürzung ϱ_s'' und δ_s'' von S. 702

$$145'''')\quad \begin{cases} \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s\left(\varrho_s'' + \dfrac{2i\alpha\gamma\alpha_{,,}\gamma_{,,}(\mu_s + \nu_s)}{(\alpha\gamma + \alpha_{,,}\gamma_{,,})^2}\right), \\ \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s\left(\delta_s'' - \dfrac{2i\alpha\gamma(\alpha\gamma\mu_s - \alpha_{,,}\gamma_{,,}\nu_s)}{(\alpha\gamma + \alpha_{,,}\gamma_{,,})^2}\right). — \end{cases}$$

Wenden wir uns nun zur Behandlung der Komponente, die parallel der Einfallsebene polarisiert ist, so lauten hier die Grenzbedingungen:

$$146)\quad \begin{cases} \bar{u} = \bar{u}_{,,} - \left(P\left(\dfrac{\partial \bar{u}_{,,}}{\partial z} - \dfrac{\partial \bar{w}_{,,}}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \bar{w}_{,,}}{\partial x}\right) l, \\ a\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) = a_{,,}\left(\dfrac{\partial \bar{u}_{,,}}{\partial z} - \dfrac{\partial \bar{w}_{,,}}{\partial x}\right) - \dfrac{\partial^2 \bar{u}_{,,}}{\partial t^2} l. \end{cases}$$

Zur Integration setzen wir

$$146')\quad \begin{cases} u = -\gamma(\mathfrak{E}_p e^{iT} - \mathfrak{R}_p e^{iT_r}), \quad u_{,,} = -\gamma_{,,}\mathfrak{D}_p e^{iT_d}, \\ w = +\alpha(\mathfrak{E}_p e^{iT} + \mathfrak{R}_p e^{iT_r}), \quad w_{,,} = +\alpha_{,,}\mathfrak{D}_p e^{iT_d}, \end{cases}$$

wobei die T durch (145'') definiert sind. Wir erhalten zunächst

$$(\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\gamma = \mathfrak{D}_p\gamma_{,,} e^{-\frac{2\pi i \gamma_{,,} l}{\tau\omega_{,,}}}\left(1 + \frac{2\pi i l}{\tau\omega_{,,}\gamma_{,,}}(P - \alpha_{,,}^2)\right),$$

$$(\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\alpha = \mathfrak{D}_p\alpha_{,,} e^{-\frac{2\pi i \gamma_{,,} l}{\tau\omega_{,,}}}\left(1 + \frac{2\pi i \gamma_{,,} l}{\tau\omega_{,,}}\right),$$

und bei Entwickelung der Exponentialgröße

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\gamma &= \mathfrak{D}_p \gamma_{,,} \left(1 + \frac{2\pi i l}{\tau\, \omega_{,,}\, \gamma_{,,}}(P-1)\right) = \mathfrak{D}_p \gamma_{,,} (1 + i\mu_p),\\ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\alpha &= \mathfrak{D}_p \alpha_{,,},\end{aligned}\right\} \quad 146'')$$

wobei μ_p eine Abkürzung ist. Hieraus folgt dann

$$\mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p \frac{\alpha_{,,}\gamma - \alpha\gamma_{,,}(1 + i\mu_p)}{\alpha_{,,}\gamma + \alpha\gamma_{,,}(1 + i\mu_p)},$$

$$\mathfrak{D}_p = \mathfrak{E}_p \frac{2\alpha\gamma}{\alpha_{,,}\gamma + \alpha\gamma_{,,}(1 + i\mu_p)},$$

oder bei Beschränkung auf die niedrigste Ordnung und unter Einführung der Abkürzungen ϱ_p'' und δ_p'' von S. 702

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \left(\varrho_p'' - \frac{2 i \alpha\gamma\alpha_{,,}\gamma_{,,}\mu_p}{(\alpha_{,,}\gamma + \alpha\gamma_{,,})^2}\right),\\ \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \left(\delta_p'' - \frac{2 i \alpha^2\gamma\gamma_{,,}\mu_p}{(\alpha_{,,}\gamma + \alpha\gamma_{,,})^2}\right).\end{aligned}\right\} \quad 146''')$$

Die Formeln (145'''') und (146''') sind den in (142) enthaltenen überaus ähnlich gestaltet und geben Veranlassung zu analogen Folgerungen. Soweit die ziemlich schwierigen Beobachtungen einen Schluß gestatteten, hat sich die Erfahrung mit den Resultaten der im Vorstehenden entwickelten Theorie im Einklang gezeigt.[63])

III. Kapitel.

Fortpflanzung ebener Wellen in absorbierenden Medien.

§ 22. Fortpflanzung ebener homogener Wellen in einem inaktiven absorbierenden Krystall. Isotrope absorbierende Medien. Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, Absorptionsindices und Polarisationsverhältnisse als Funktionen der Fortpflanzungsrichtung.

Für absorbierende Medien tritt nach S. 565 in der HAMILTON-schen Gleichung zu der Variation der spezifischen potentiellen Energie φ die negative Arbeit $\delta' \alpha$, die von äußeren Kräften an der Volumeneinheit geleistet wird. Ziehen wir also zunächst nur inaktive krystallinische Medien in Betracht, so ist neben den Variationen der Funktionen ψ und $\varphi = \varphi_a$, welche durch

147) $$\begin{cases} 2\psi = u'^2 + v'^2 + w'^2, \\ 2\varphi_a = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{31}\zeta\xi + 2a_{12}\xi\eta \end{cases}$$

gegeben sind, nach S. 575 zu berücksichtigen der Wert

147') $$\delta' \alpha = -\left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi'}\delta\xi + \frac{\partial \chi}{\partial \eta'}\delta\eta + \frac{\partial \chi}{\partial \zeta'}\delta\zeta\right),$$

worin bedeutet

147'') $$2\chi = m_{11}\xi'^2 + m_{22}\eta'^2 + m_{33}\zeta'^2 + 2m_{23}\eta'\zeta' + 2m_{31}\zeta'\xi' + 2m_{12}\xi'\eta'.$$

Gleich den a_{hk} sind auch die m_{hk} Funktionen der Schwingungsperiode τ von der durch (35) gegebenen Gestalt.

Wie früher für durchsichtige Krystalle die eine Oberfläche von der Gleichung (38'), so sind für absorbierende zwei dergleichen charakteristisch; wir schreiben ihre Gleichungen

148) $$\begin{cases} (x^2+y^2+z^2)^j = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \\ (x^2+y^2+z^2)^j = m_{11}x^2 + m_{22}y^2 + m_{33}z^2 + 2m_{23}yz + 2m_{31}zx + 2m_{12}xy \end{cases}$$

und behalten für die erstere aus später zu nennenden Gründen den Namen der Polarisationsfläche, für ihre Parameter den Namen der Polarisationskonstanten, für ihre Axen den Namen der Polarisationsaxen bei, während wir die letztere die Absorptions-

fläche, ihre Parameter die Absorptionskonstanten, ihre Axen die Absorptionsaxen des Krystalles nennen. Keines dieser Axensysteme ist im allgemeinen ein Symmetrieaxensystem für das gesamte optische Verhalten des Krystalles.

Fallen die Koordinatenaxen mit den Polarisations- oder mit den Absorptionsaxen zusammen, so mögen sie als die Axen X_0, Y_0, Z_0 und X_0', Y_0', Z_0' bezeichnet werden; die Gleichungen (148) nehmen dann die Formen

$$\left.\begin{array}{l}(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^j = a_1 x_0^2 + a_2 y_0^2 + a_3 z_0^2 ,\\ (x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2)^j = m_1 x_0'^2 + m_2 y_0'^2 + m_3 z_0'^2\end{array}\right\} \quad 148')$$

an, in denen die a_h und die m_h als die Hauptkonstanten der Polarisation und der Absorption bezeichnet werden mögen.

Bestimmt man die Lage der beiden Hauptaxensysteme X_0, Y_0, Z_0 und X_0', Y_0', Z_0' gegen das willkürliche System X, Y, Z durch die Schemata

$$\left.\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z\\ \hline X_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ Y_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ Z_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{array}\qquad \begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z\\ \hline X_0' & \alpha_1' & \alpha_2' & \alpha_3'\\ Y_0' & \beta_1' & \beta_2' & \beta_3'\\ Z_0' & \gamma_1' & \gamma_2' & \gamma_3' ,\end{array}\right\} \quad 148'')$$

so bestehen zwischen den verschiedenen Konstanten die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{ll} a_{11} = a_1 \alpha_1^2 + a_2 \beta_1^2 + a_3 \gamma_1^2 , & m_{11} = m_1 \alpha_1'^2 + m_2 \beta_1'^2 + m_3 \gamma_1'^2 ,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\ a_{23} = a_1 \alpha_2 \alpha_3 + a_2 \beta_2 \beta_3 + a_3 \gamma_2 \gamma_3 , & m_{23} = m_1 \alpha_2' \alpha_3' + m_2 \beta_2' \beta_3' + m_3 \gamma_2' \gamma_3' ,\\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots ,\end{array}\right\} \quad 148''')$$

Bezüglich der Lage der Absorptionsaxen in den verschiedenen Krystallsystemen gilt das auf S. 577 u. f. über die optischen Symmetrieaxen oder, wie wir jetzt besser sagen, über die Polarisationsaxen Zusammengestellte. Daraus folgt, daß im triklinen System über die gegenseitige Lage der beiden Axensysteme nach Symmetrie allgemein gar nichts ausgesagt werden kann, daß im monoklinen System je eine Axe von beiden Systemen für alle Farben in die ausgezeichnete Z-Axe fallen muß, daß aber im rhombischen System beide Axenkreuze stets zusammenfallen. Im rhomboëdrischen, im hexagonalen und im quadratischen System werden je zwei der Axen — wir wählen hierzu wieder X_0, Y_0 und X_0', Y_0' — gleichwertig, die Polarisations- und die Absorptionsfläche werden je eine Rotationsfläche, und die ausgezeichneten Z-Axen fallen zusammen. Im regulären System, wie bei isotropen Medien, ist $m_1 = m_2 = m_3$;

die beiden Flächen werden zu Kugeln, und alle Richtungen sind optisch gleichwertig.

Was das Größenverhältnis zwischen den Hauptabsorptionskonstanten m_h angeht, soweit dasselbe nicht aus den Symmetrieverhältnissen gleich Eins folgt, so zeigen sich in der Natur bei verschiedenen Krystallen eines und desselben Systemes große Verschiedenheiten. In den meisten Fällen sind allerdings, wie die Polarisations-, so auch die Absorptionskonstanten desselben Krystalles sehr nahe gleich; es giebt aber daneben Beispiele von so starker Verschiedenheit der letzteren, wie sie entfernt nicht bei ersteren vorkommen. Krystalle mit merklich verschiedenen Hauptabsorptionskonstanten nennt man, besonders wenn sie sich noch für verschiedenfarbiges Licht verschieden verhalten, pleochroitisch. Sie zeigen ganz spezifische und eigentümliche Erscheinungen, deren Erklärung wohl die interessanteste Aufgabe der Theorie bildet. —

Für die Hauptgleichungen folgt aus (147) u. f. unter Benutzung des allgemeinen Schemas von S. 576 [64])

149) $$\begin{cases} u'' = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \eta'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \zeta'}\right), \\ v'' = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \zeta'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}\right), \\ w'' = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \dfrac{\partial \chi}{\partial \eta'}\right); \end{cases}$$

ihnen ordnen sich zu die Definitionen

149′) $$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

und aus beiden folgt

149″) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Grenzbedingungen für ein der XY-Ebene paralleles Element der Grenze zwischen zwei Medien (h) und (i) aber lauten:

149‴) $$\begin{cases} \overline{u}_h = \overline{u}_i, \quad \overline{v}_h = \overline{v}_i, \\ \left(\overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}} + \overline{\dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}}\right)_h = \left(\overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}} + \overline{\dfrac{\partial \chi}{\partial \xi'}}\right)_i, \quad \left(\overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}} + \overline{\dfrac{\partial \chi}{\partial \eta'}}\right)_h = \left(\overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta}} + \overline{\dfrac{\partial \chi}{\partial \eta'}}\right)_i, \end{cases}$$

welche in Verbindung mit den letzten Gleichungen (149) und (149′) auch liefern

149⁗) $$\overline{w}_h = \overline{w}_i, \quad \overline{\zeta}_h = \overline{\zeta}_i. —$$

Um Integrale dieser Gleichungen zu finden, welche periodischen Schwingungen entsprechen, führen wir wieder jene komplexen

Exponentialfunktionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein, deren reelle und deren imaginäre Teile Lösungen für $u, v, w, \xi, \eta, \zeta$ darstellen. Wir berücksichtigen, daß dann

$$\mathfrak{x}' = \frac{2\pi i}{\tau}\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{y}' = \frac{2\pi i}{\tau}\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{z}' = \frac{2\pi i}{\tau}\mathfrak{z}$$

ist, und erhalten dadurch in leicht erkennbarer Weise Hauptgleichungen, in denen die Konstanten a_{hk} und m_{hk} nur in den Verbindungen

$$a_{hk} + \frac{2\pi i}{\tau} m_{hk} = a_{hk} + i a'_{hk} = \mathfrak{a}_{hk} \tag{150}$$

auftreten, wobei a'_{hk} und $\mathfrak{a}_{hk}$ neue Bezeichnungen sind. Führt man also ein die komplexe Funktion

$$2\mathfrak{f} = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{z}^2 + 2\mathfrak{a}_{23}\mathfrak{y}\mathfrak{z} + 2\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{z}\mathfrak{x} + 2\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \tag{150'}$$

so lauten die Hauptgleichungen

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{u}'' = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{z}}\right), \quad \mathfrak{v}'' = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{z}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}}\right), \\ \mathfrak{w}'' = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}\right); \end{array}\right\} \tag{151}$$

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}; \tag{151'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0, \tag{151''}$$

und die Grenzbedingungen werden

$$\left.\begin{array}{c} \overline{\mathfrak{u}}_h = \overline{\mathfrak{u}}_i, \quad \overline{\mathfrak{v}}_h = \overline{\mathfrak{v}}_i, \\ \left(\overline{\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}}}\right)_h = \left(\overline{\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{x}}}\right)_i, \quad \left(\overline{\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}}\right)_h = \left(\overline{\dfrac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{y}}}\right)_i, \end{array}\right\} \tag{151'''}$$

respektive

$$\overline{\mathfrak{w}}_h = \overline{\mathfrak{w}}_i, \quad \overline{\mathfrak{z}}_h = \overline{\mathfrak{z}}_i. \tag{151''''}$$

Sie stimmen sonach vollkommen mit dem System (39) bis (39'''') für durchsichtige inaktive Krystalle überein, ausgenommen, daß jetzt an Stelle der quadratischen Form φ mit r e e l l e n, eine solche mit k o m p l e x e n Koefficienten steht.

Hieraus ergiebt sich beiläufig die Verträglichkeit dieses Gleichungssystemes sowohl mit dem auf mechanischer, wie mit dem auf elektromagnetischer Grundlage abgeleiteten. Denn auch jene Systeme unterscheiden sich, wie auf S. 471 des ersten und auf S. 472 dieses Bandes erörtert ist, von den für durchsichtige Medien gültigen nur durch eine Vertauschung der reellen Parameter der Gleichungen mit komplexen. —

Wir wollen zunächst die Fortpflanzung homogener ebener Wellen einfarbigen Lichtes in einem unendlichen homogenen absorbierenden Medium betrachten, und dabei wieder, wie in § 8, dem Problem der krystallinischen Körper das isotroper vorausschicken, dessen Resultate für die Vergleichung mit später zu gewinnenden von Nutzen sein werden.

Für isotrope Körper sind alle $\mathfrak{a}_{hk}$ für $h \gtrless k$ der Null, alle $\mathfrak{a}_{kk}$ einander gleich; wir setzen $\mathfrak{a}_{hh} = \mathfrak{a} = a + ia'$ und bemerken, daß nach S. 575 die Konstante a' stets positiv sein muß.

Die Funktion $\mathfrak{f}$ gewinnt hier den Wert

$$2\,\mathfrak{f} = \mathfrak{a}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2), \tag{152}$$

und, wenn wir die Wellennormale in die Z-Axe legen, erhalten wir hieraus, da $\mathfrak{w}$ verschwindet, die Hauptgleichungen

$$\mathfrak{u}'' = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2}, \quad \mathfrak{v}'' = \mathfrak{a}\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2}. \tag{152'}$$

Zur Integration setzen wir

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{F} e^{i\mathfrak{T}}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G} e^{i\mathfrak{T}}, \tag{152''}$$

wobei

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z(1 - i\varkappa)}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\mathfrak{o}}\right) \tag{152'''}$$

ist, und erhalten für die komplexe Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$ die Beziehung

$$\mathfrak{o}^2 = \left(\frac{\omega}{1 - i\varkappa}\right)^2 = \mathfrak{a} = a + ia', \tag{153}$$

somit

$$\frac{\omega^2(1 - \varkappa^2)}{(1 + \varkappa^2)^2} = a, \quad \frac{2\omega^2\varkappa}{(1 + \varkappa^2)^2} = a'. \tag{153'}$$

Die hieraus folgende Gleichung $2\varkappa a = a'(1 - \varkappa^2)$ liefert für $\varkappa$ nur eine positive Wurzel; die zweite, negative, kommt als im Widerspruch mit der zweiten Formel (153') nicht in Betracht. Dem einen Wert für $\mathfrak{o}^2$ entspricht sonach nur einer für das Geschwindigkeitsquadrat ω^2 und einer für den Asorptionsindex $\varkappa$.

Eine Gleichung zwischen den beiden komplexen Amplituden $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ der fortgepflanzten Welle besteht nicht; es pflanzen sich sonach in dem absorbierenden isotropen Körper alle Polarisationszustände in der gleichen Weise fort. —

Die Schwächung einer Welle innerhalb des absorbierenden Medium ist nicht direkt durch $\varkappa$ bestimmt, sondern, da die reelle Amplitude mit dem Schwächungsfaktor

$$e^{-\frac{2\pi\varkappa z}{\tau\omega}}$$

proportional ist, durch den Absorptionsmodul $\nu = 2\pi\varkappa/\tau\omega$. Beachtet man, daß $\tau\omega = \lambda$ die Wellenlänge der Schwingung in dem absorbierenden Medium darstellt, so wird $\nu = 2\pi\varkappa/\lambda$, und $e^{-\nu}$ ist die auf die Länge Eins, $e^{-\varkappa}$ die auf die Länge $\lambda/2\pi$ stattfindende Schwächung der fortgepflanzten Amplituden; $e^{-2\nu}$, $e^{-2\varkappa}$ geben das Entsprechende für die Intensität. Statt der Wellenlänge im absorbierenden Körper kann man auch diejenige λ_0 im leeren Raum durch die Beziehung $\lambda = n\lambda_0$ einführen, worin $n = \omega/v$ das Verhältnis der beiderseitigen Geschwindigkeiten für homogene ebene Wellen bezeichnet.

Hiernach hat es einen klaren Sinn, wenn man die Größenordnung einer Absorption durch diejenige des Parameters $\varkappa$ charakterisiert; $\varkappa$ ist eine reine Zahl, und seine Größenordnung bezieht sich daher stets auf sein Verhältnis zu Eins.

Eine besondere praktische Wichtigkeit eignet dem Fall, daß $\varkappa$ eine Größe erster Ordnung ist, daß also der Schwächungsfaktor der Amplitude innerhalb des Weges einer Wellenlänge sich nur um eine Größe erster Ordnung von Eins unterscheidet. Dieser Fall ist bei allen Körpern, die nicht metallischen Charakter haben, realisiert, d. h., diese Körper sind in Schichten, deren Dicke von der Ordnung einer Wellenlänge ist, nahe vollständig durchsichtig. Infolge hiervon nehmen für dergleichen Medien die Gleichungen (153') bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung die einfachere Gestalt an

$$\omega^2 = a, \quad 2\omega^2\varkappa = a', \quad \text{also } \varkappa = a'/2a; \qquad 153'')$$

dieselbe zeigt, daß in der eingeführten Annäherung die Geschwindigkeit ω von der Absorption vollständig unabhängig, und $2\varkappa$ gleich dem Verhältnis der Absorptionskonstante a' zur Polarisationskonstante a ist. —

Wenden wir uns nun zur Behandlung ebener homogener Wellen einfarbigen Lichtes in einem absorbierenden Krystall, und legen wir wiederum die Z-Axe in die Wellennormale, so lauten die Hauptgleichungen, da sich $\mathfrak{w} = 0$ findet,

$$\mathfrak{u}'' = \mathfrak{a}_{22}\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2} - \mathfrak{a}_{12}\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2}, \quad \mathfrak{v}'' = \mathfrak{a}_{11}\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2} - \mathfrak{a}_{12}\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial z^2}; \qquad 154)$$

sie stimmen formal mit dem System (41) überein, doch läßt sich im allgemeinen das Koordinatensystem X, Y in der Wellenebene nicht so legen, daß $\mathfrak{a}_{12}$ verschwindet, da dessen reeller und imaginärer Teil von der Orientierung in verschiedener Weise abhängig ist. Aus letzterem Grunde besteht vielmehr eine gewisse Beziehung zu dem System (124'), welches für aktive Körper gültig ist; doch haben hier

die letzten Glieder beider Formeln kein übereinstimmendes Vorzeichen, was, wie wir sehen werden, eine wesentliche Verschiedenheit der betreffenden Vorgänge bewirkt.

Wir setzen, wie früher,

154') $$\mathfrak{u} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{K}\,e^{i\mathfrak{T}},$$

154'') $$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 = 1, \quad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z(1-i\varkappa)}{\omega}\right) = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{z}{\mathfrak{o}}\right),$$

also Lösungen, welche transversalen elliptischen Schwingungen entsprechen; dann ergiebt sich

155) $$(\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{o}^2)\,\mathfrak{F} = \mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{G}, \quad (\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{o}^2)\,\mathfrak{G} = \mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{F}.$$

woraus folgt

155') $$(\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{o}^2)(\mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{o}^2) = \mathfrak{a}_{12}^2,$$

155'') $$\frac{\mathfrak{G}^2}{\mathfrak{F}^2} + \frac{\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{22}}{\mathfrak{a}_{12}}\,\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} - 1 = 0.$$

Die erste Gleichung bestimmt zwei Werte für das Quadrat der komplexen Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$, und demnach für ω^2 und $\varkappa$, die zweite die entsprechenden für das komplexe Amplitudenverhältnis $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$; ihre Wurzeln $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{F}_2$ erfüllen die Bedingung

155''') $$\frac{\mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2} = -1, \ \text{d. h.}\ \mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{G}_1\,\mathfrak{G}_2 = 0.$$

Bedenkt man, daß nach S. 559 die reellen und die imaginären Teile der $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ den Richtungskosinus der Axen p_1', p_1'', p_2', p_2'' in den Polarisationsellipsen proportional sind, so liefert die letzte Formel

$$p_1' p_2' \cos(p_1', p_2') - p_1'' p_2'' \cos(p_1'', p_2'') = 0,$$
$$p_1' p_2'' \cos(p_1', p_2'') + p_1'' p_2' \cos(p_1'', p_2') = 0,$$

und da p_1' und p_1'', p_2' und p_2'' zu einander normal sind, so ergiebt sich, daß

$$\cos(p_1', p_2') = \cos(p_1'', p_2''), \quad \cos(p_1', p_2'') = -\cos(p_1'', p_2'),$$

und somit

$$(p_1' p_2' - p_1'' p_2'')\cos(p_1', p_2') = 0,$$
$$(p_1' p_2'' - p_2' p_1'')\cos(p_1', p_2'') = 0$$

sein muß. Diese Formeln sind aber nur dann mit einander vereinbar, wenn die Ellipsen ähnliche Gestalt und gekreuzte Lage haben. Wählt man ihre Axen zu Koordinatenaxen, so werden die beiden Verhältnisse $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{F}_2$ rein imaginär; die Produkte

ihrer reellen Faktoren ergeben also nach (155‴) den Wert plus Eins, und hieraus folgt, daß die beiden Ellipsen in der gleichen Richtung umlaufen werden, was die hier vorliegenden Vorgänge von den einigermaßen verwandten, die in § 18 und 19 behandelt sind, unterscheidet. —

Die strenge Auflösung der Gleichungen (155′) und (155″) führt auf die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{o}^2 &= \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22} \pm \sqrt{(\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{22})^2 + 4\,\mathfrak{a}_{12}^2}\right), \\ \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} &= -\frac{1}{2\,\mathfrak{a}_{12}}\left(\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{22} \pm \sqrt{(\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{22})^2 + 4\,\mathfrak{a}_{12}^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad 155''''$$

in denen sich die oberen und die unteren Vorzeichen nach (155) gegenseitig entsprechen; sie drücken die komplexen Geschwindigkeiten $\mathfrak{o}$ und die komplexen Amplitudenverhältnisse $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ durch dieselben Variabeln aus, in denen die Parameter $\mathfrak{a}_{hk}$ der Differentialgleichungen gegeben sind.

Die $\mathfrak{a}_{hk}$ sind nach der Ableitung zunächst Funktionen der Richtungen, welche die in der Wellenebene liegenden Axen X und Y besitzen; denn die a_{hk} und m_{hk} sind durch das System (148‴) mit deren Richtungskosinus gegen die Polarisations- und die Absorptionsaxen des Krystalles in Verbindung gebracht, und die a'_{hk} unterscheiden sich von den m_{hk} nur durch den hier konstanten Faktor $2\pi i/\tau$.

Offenbar ist es aber wünschenswert, an Stelle dieser Argumente die Richtungskosinus der Wellennormalen einzuführen, von denen doch in letzter Instanz die ganze Erscheinung abhängen muß. Dies gelingt nach einer schon mehrfach angewandten Methode in der That folgendermaßen.

Setzen wir, wie früher, zwischen den Hauptpolarisationskonstanten a_h die Beziehung $a_1 \gtreqless a_2 \gtreqless a_3$ fest, welche eine Beschränkung der Allgemeinheit nicht involviert, so existieren in der Ebene der willkürlich vertauschbaren Hauptpolarisationsaxen X_0 und Z_0 zwei Richtungen O' und O'' von ausgezeichneten Eigenschaften, deren Winkel o gegen $+Z_0$-Axe gegeben sind durch

$$\sin^2 o = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad \cos^2 o = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}. \qquad 156)$$

Bei durchsichtigen Krystallen sind diese Richtungen die sogenannten optischen Axen, und demgemäß auch physikalisch ausgezeichnet; bei absorbierenden Krystallen verlieren sie jene physikalischen Eigenschaften, aber sie bewahren die für uns nützlichen geometrischen, welche in Folgendem bestehen:

Es mögen die Winkel zwischen den Richtungen O', O'' und der Wellennormale r, resp. Z, mit U', U'' bezeichnet werden, der Winkel zwischen den Ebenen (Z, O') und (Z, O''), der die $+Z_0$-Axe umschließt, mit J. Legt man dann die X-Axe in die Halbierungsebene (Z, P) von J, die Y-Axe in die des Nebenwinkels $\pi - J$, — läßt man also erstere mit der Polarisationsrichtung P der ordinären, letztere mit derjenigen der extraordinären, parallel Z im nicht absorbierenden Krystall fortschreitenden Welle zusammenfallen — so gilt, falls die auf das charakterisierte System bezogenen Parameter wieder durch Klammern ausgezeichnet werden, einerseits

156′) $$(a_{12}) = 0;$$

andererseits bestimmen sich die (a_{22}) und (a_{11}), welche mit den Quadraten der Geschwindigkeiten ω_o und ω_e im durchsichtig gedachten Krystall identisch werden, zu

156″) $$\begin{cases} (a_{22}) = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \frac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U'' - U'), \\ (a_{11}) = \frac{1}{2}(a_1 + a_3) + \frac{1}{2}(a_1 - a_3)\cos(U'' + U'). \end{cases}$$

Setzt man ferner zwischen den Hauptabsorptionskonstanten a'_h die nicht beschränkende Beziehung $a'_1 \gtreqless a'_2 \gtreqless a'_3$ fest und bestimmt in der Ebene der willkürlich vertauschbaren Hauptabsorptionsaxen X'_0 und Z'_0 zwei Richtungen A' und A'' durch die Winkel o' gegen die Z'_0-Axe, gegeben durch die Beziehungen

157) $$\sin^2 o' = \frac{a'_1 - a'_2}{a'_1 - a'_3}, \quad \cos^2 o' = \frac{a'_2 - a'_3}{a'_1 - a'_3},$$

so gestatten dieselben eine ähnliche Verwendung, wie die Axen O' und O''.

Bezeichnet man nämlich die Winkel der Richtungen A', A'' gegen die Wellennormale r, resp. Z, mit W', W'', den Winkel zwischen den Ebenen (Z, A') und (Z, A''), der die Z'_0-Axe einschließt, mit J', legt man die X-Axe in die Halbierungsebene (Z, P') von J', die Y-Axe in diejenige des Nebenwinkels $\pi - J'$, dann gilt, wenn auch hier die auf das spezielle Koordinatensystem bezogenen Parameter durch Klammern ausgezeichnet werden, einerseits

157′) $$(a'_{12}) = 0,$$

andererseits werden (a'_{22}) und (a'_{11}) zu

157″) $$\begin{cases} (a'_{22}) = \frac{1}{2}(a'_1 + a'_3) + \frac{1}{2}(a'_1 - a'_3)\cos(W'' - W'), \\ (a'_{11}) = \frac{1}{2}(a'_1 + a'_3) + \frac{1}{2}(a'_1 - a'_3)\cos(W'' + W'). \end{cases}$$

Die Formeln (156″) und (157″) drücken für die durch (156′) und (157′) definierten speziellen Lagen des Koordinatensystemes X, Y

die Parameter a_{11}, a_{22} und a'_{11}, a'_{22} durch Winkel aus, welche die Richtung der Wellennormale r, resp. Z, bestimmen.

Bei der Anwendung dieser Resultate kommt aber in Betracht, daß im allgemeinen die Symmetrieaxen der Polarisations- und der Absorptionsfläche nach Richtung und Größe vollständig voneinander unabhängig sind, und daß demgemäß die oben vorausgesetzten und in der Wellenebene gelegenen Koordinatensysteme X, Y, für welche die Formeln (156'') resp. (157'') gelten, keineswegs zusammenfallen. Infolge hiervon können auch im allgemeinen diese Werte nicht nebeneinander benutzt werden, ja man wird am symmetrischsten verfahren, wenn man das Koordinatensystem X, Y in der Wellenebene beliebig läßt, also direkt keinen von beiden Ausdrücken benutzt.

Bezeichnet man dann den Winkel, den die XZ-Ebene mit der Halbierungsebene (Z, P) des Winkels J einschließt, durch χ, den mit der Halbierungsebene (Z, P') von J' durch χ', und versteht man unter (a_{11}), (a_{22}), (a'_{11}), (a'_{22}) die durch (156'') und (157'') gegebenen Ausdrücke, so gilt nach (148''') für die auf das beliebige Axensystem X, Y bezogenen Werte der a_{hk} und a'_{hk}

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} = (a_{11})\cos^2\chi + (a_{22})\sin^2\chi, \quad a_{22} = (a_{11})\sin^2\chi + (a_{22})\cos^2\chi, \\ a_{12} = \big((a_{22}) - (a_{11})\big)\cos\chi\,\sin\chi, \end{array}\right\} \quad 158)$$

$$\left.\begin{array}{c} a'_{11} = (a'_{11})\cos^2\chi' + (a'_{22})\sin^2\chi', \quad a'_{22} = (a'_{11})\sin^2\chi' + (a'_{22})\cos^2\chi', \\ a'_{12} = \big((a'_{22}) - (a'_{11})\big)\cos\chi'\sin\chi'. \end{array}\right\} \quad 158')$$

Da die (a_{hk}) und (a'_{hk}) nach (156'') und (157'') durch die Richtung der Wellennormale ausgedrückt sind, so ist jetzt gleiches auch für die Konstanten $\mathfrak{a}_{hk} = a_{hk} + i a'_{hk}$ erreicht, die in den Formeln (155'''') enthalten sind.

Wir bemerken, daß dieselben dort nur in den drei Kombinationen $\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22}$, $\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{22}$ und $\mathfrak{a}_{12}$ auftreten, daß demgemäß also auch die a_{hk} und a'_{hk} nur allein in den Gliedern $(a_{11}) + (a_{22})$, $(a'_{11}) + (a'_{22})$; $\big((a_{11}) - (a_{22})\big)(\cos^2\chi - \sin^2\chi)$, $\big((a'_{11}) - (a'_{22})\big)(\cos^2\chi' - \sin^2\chi')$; $\big((a_{22}) - (a_{11})\big)\cos\chi\,\sin\chi$, $\big((a'_{22}) - (a'_{11})\big)\cos\chi'\sin\chi'$ vorkommen. Es folgt hieraus, daß ohne Einfluß auf die Werte $\mathfrak{o}^2$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ in (155'''') die Richtungen der ausgezeichneten X- und Y-Koordinatenaxen um 90° gedreht werden dürfen. In der That bleiben bei einer Vertauschung von χ resp. χ' mit $\frac{1}{2}\pi + \chi$ resp. $\frac{1}{2}\pi + \chi'$ jene Ausdrücke ganz ungeändert, da gleichzeitig (a_{11}) und (a_{22}) einerseits, (a'_{11}) und (a'_{22}) andererseits ihre Bedeutung vertauschen. Dies Resultat ist deshalb bemerkenswert, weil es zeigt, warum die bei unseren Festsetzungen noch übrig bleibende Willkürlichkeit der Wahl zwischen

den Axen X_0, X_0' und Z_0, Z_0' auf den Inhalt der Formeln (155'''') keinen Einfluß übt. —

Die obigen relativ recht umständlichen Beziehungen lassen sich bei Krystallen des triklinen Systemes überhaupt nicht vereinfachen, da hier zwischen den Richtungen der Axen O', O'' und der A', A'' keinerlei Abhängigkeit besteht.

Bei Krystallen des monoklinen Systemes findet eine Vereinfachung dann statt, wenn die Wellennormale in die krystallographisch ausgezeichnete Ebene fällt, welche zugleich je ein Paar der X_0, Y_0, Z_0- und der X_0', Y_0', Z_0'-Axen enthalten muß, also wirklich eine optische Symmetrieebene ist. Rechnet man hier χ und χ' von dieser Ebene aus, so müssen sie entweder gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\pi$ sein; welcher Wert stattfindet, hängt von der relativen Größe der Konstanten a_h einer-, der Konstanten a_h' andererseits ab.

Ähnlich verhält es sich bei Krystallen des rhombischen Systemes für alle Richtungen, die in eine der drei ausgezeichneten Ebenen fallen, welche hier sämtlich optische Symmetrieebenen sind. Indessen wird man in diesem Falle kaum auf jene allgemeinen Entwickelungen zurückgreifen, sondern direkt an die Formeln (155) anknüpfen. Wir gehen auf diese Spezialisierungen hier aber noch nicht ein.

Bei den optisch einaxigen Krystallen, also bei den Angehörigen des rhomboëdrischen, des quadratischen und des hexagonalen Systemes haben alle Ebenen durch die ausgezeichnete Axe Z_0, resp. Z_0', den Charakter optischer Symmetrieebenen. Man wird daher passend die X-Axe des in der Wellenebene liegenden Koordinatenkreuzes in den Hauptschnitt durch die gegebene Wellennormale Z legen und erhält, falls U den Winkel zwischen der Z- und der Z_0-Richtung bezeichnet,

$$158'')\quad \begin{cases} (a_{12}) = 0, \;\; (a_{22}) = a_1, \;\; (a_{11}) = a_1 \cos^2 U + a_3 \sin^2 U, \\ (a_{12}') = 0, \;\; (a_{22}') = a_1', \;\; (a_{11}') = a_1' \cos^2 U + a_3' \sin^2 U. \end{cases}$$

Es möge betont werden, daß stets, wenn die Wellennormale in eine optische Symmetrieebene fällt — bei einaxigen Krystallen also immer —, a_{12} und a_{12}' für dasselbe Koordinatensystem X, Y verschwinden, und daher die Formeln (154) in den homogenen Wellen nicht elliptisch, sondern lineär polarisierte Schwingungen ergeben. —

Die Gleichungen (155'''') sind mit (126) und (126') durchaus konform; sie liefern aber wesentlich abweichende Resultate, weil sie komplexe, jene reelle Größen verbinden. So kann man z. B. hier

nicht schließen, daß die beiden Wurzeln für $\mathfrak{o}^2$ für keine Fortpflanzungsrichtung einander gleich werden können; denn obwohl unter dem Wurzelzeichen eine Summe von Quadraten steht, kann dieselbe hier doch verschwinden.

Hiermit hängt auch zusammen, daß die reellen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω der beiden in derselben Richtung fortschreitenden, elliptisch polarisierten Wellen einander gleich werden können, daß also absorbierende Krystalle in diesem Sinne optische Axen besitzen. Da ihre Richtungen sowohl von den Konstanten der Polarisations-, wie der Absorptionsfläche abhängen, so ist ohne Rechnung zu übersehen, daß sie im allgemeinen nicht, wie die optischen Axen durchsichtiger Medien, in einer Symmetrieebene der ersteren Fläche liegen können, und damit steht in Verbindung, daß ihre Zahl — indem man, wie S. 584, entgegengesetzte Richtungen zusammenfaßt — nicht notwendig gleich Zwei oder Eins sein muß.

Neben den Geschwindigkeiten ω bieten die Absorptionsindices $\varkappa$, oder wegen deren Auftreten in den Lösungen (154'), die Absorptionsmoduln $\nu = 2\pi\varkappa / \tau\omega$ ein besonderes Interesse. Auch sie sind Funktionen der Fortpflanzungsrichtung und für gewisse Richtungen von gleicher Größe für beide Wellen; aber diese Richtungen fallen im allgemeinen keineswegs mit den Richtungen gleicher Geschwindigkeiten zusammen, sind auch nicht einmal notwendig in gleicher Zahl vorhanden, wie jene.[65])

Die genaue und allgemeine Diskussion dieser Verhältnisse ist sehr umständlich und bietet bisher nur ein mäßiges Interesse; auf die Untersuchung vereinfachter Fälle gehen wir weiter unten ein.

Bei den Krystallgruppen, deren nicht absorbierende Angehörige optisch einaxig sind, behält die ausgezeichnete Axe auch bei auftretender Absorption den Charakter der optischen Axe; die ihr parallel fortschreitenden Wellen haben sowohl gleiche Geschwindigkeiten, als gleiche Absorptionsindices.

§ 23. Geschwindigkeiten, Absorptionsindices und Polarisationsverhältnisse bei schwacher Absorption. Spezielle Gesetze für die Umgebung einer optischen Axe.

Ein Fall von besonderer Häufigkeit und Wichtigkeit ist der, daß in einem inaktiven Krystall die Absorption hinreichend gering ist, um $\varkappa$ als eine Größe erster Ordnung betrachten und sein Quadrat neben Eins vernachlässigen zu können; ein Fall, der mit Ausnahme der Krystalle von metallischem Aussehen nahezu allgemein reali-

siert ist. Über die physikalischen Verhältnisse, welche die angeführte Vernachlässigung gestatten, ist auf S. 713 gesprochen worden.

Gehen wir auf diesen Fall nunmehr genauer ein, so empfiehlt es sich, zunächst das in der Wellenebene liegende Koordinatensystem X, Y so zu wählen, daß $a_{12} = 0$ ist, daß also die X-Axe in die Richtung der ordinären, die Y-Axe somit in die der extraordinären Polarisation bei verschwindender Absorption fällt. In diesem Falle werden die a_{11} und a_{22} nach S. 717 mit (a_{11}) und (a_{22}) identisch, und die Sonderung des Reellen und des Imaginären in der Formel (155') ergiebt bei der vorausgesetzten Vernachlässigung

$$159)\left\{\begin{aligned} &\big((a_{11}) - \omega^2\big)\big((a_{22}) - \omega^2\big) = (a'_{11} - 2\omega^2\varkappa)(a'_{22} - 2\omega^2\varkappa) - a'^2_{12},\\ &\big((a_{11}) - \omega^2\big)(a'_{22} - 2\omega^2\varkappa) + \big((a_{22}) - \omega^2\big)(a'_{11} - 2\omega^2\varkappa) = 0.\end{aligned}\right.$$

Ist $(a_{11}) - (a_{22})$ von derselben Ordnung, wie (a_{11}) und (a_{22}) selbst, so liefert die erste Gleichung, da ersichtlich a'_{11}, a'_{22} und a'_{12} die gleiche Größenordnung besitzen, wie $2\omega^2\varkappa$, bis auf Größen zweiter Ordnung exklusive die beiden Wurzeln

$$159')\qquad \omega_1^2 = (a_{22}), \quad \omega_2^2 = (a_{11});$$

ist $(a_{22}) - (a_{11})$ unendlich klein neben jedem der beiden Werte, so gilt die gleiche Beziehung nur bis auf Glieder erster Ordnung. Innerhalb dieser Annäherungen sind sonach die Geschwindigkeiten von den Absorptionsverhältnissen ganz unabhängig und allein durch Richtung und Größe der Axen der Polarisationsfläche bestimmt.

Den Richtungen der Wellennormalen, für welche $(a_{11}) = (a_{22})$ wird, und deren Zahl und Lage auf S. 584 erörtert ist, entsprechen Geschwindigkeiten, die bis auf erste Ordnung einander gleich, und zwar gleich $\sqrt{a_2}$ sind; bei durchsichtigen Krystallen ist diese Eigenschaft für die optischen Axen charakteristisch, und wir können den letzteren Namen somit auf die eben definierten Richtungen in absorbierenden Krystallen übertragen, wobei indessen zunächst dahingestellt bleibt, ob jene hier noch andere Eigenschaften mit den optischen Axen durchsichtiger Krystalle gemein haben.

Wenn $(a_{22}) - (a_{11})$ von der gleichen Ordnung ist, wie (a_{11}) und (a_{22}), so folgt aus der zweiten Gleichung (159) unter Rücksicht auf (159') die sehr einfache Beziehung

$$159'')\qquad \varkappa_1 = a'_{22}/2(a_{22}), \quad \varkappa_2 = a'_{11}/2(a_{11});$$

wenn $(a_{22}) - (a_{11})$ unendlich klein gegen (a_{22}) und (a_{11}) ist, d. h., wenn die Wellennormale einer optischen Axe unendlich nahe liegt, so wird die Gleichung zur Bestimmung von $\varkappa$ unbrauchbar, und man muß

direkt auf Formel (155′) zurückgreifen. Für die Richtungen der optischen Axen selbst erhält man daraus

$$2\,a_2\,\varkappa = a'_{11} + a'_{22} \pm \sqrt{(a'_{22} - a'_{11})^2 + 4\,a'^2_{12}}\,; \qquad 159''')$$

die beiden Wurzeln für $\varkappa$ werden also auch hier einander nicht gleich, und bei angenähert gleichen Geschwindigkeiten erleiden die parallel einer optischen Axe fortschreitenden Wellen unter Umständen sehr verschiedene Absorptionen.

Benutzt man die Ausdrücke (158′) für die a'_{hk}, so erhält man

$$\varkappa_1 = (a'_{22})/2\,a_2\,, \quad \varkappa_2 = (a'_{11})/2\,a_2\,, \qquad 159'''')$$

wobei die (a'_{hh}) sich auf das, wie S. 716, durch $(a'_{12}) = 0$ definierte Koordinatensystem beziehen. Zu dem gleichen Resultat kann man direkt aus (159‴) gelangen, indem man berücksichtigt, daß, wenn die Z-Axe in eine optische Axe fällt, für j e d e s System X, Y die Beziehung $a_{12} = 0$ gilt, und daß daher dort diese Axen so gelegt werden können, daß zugleich a_{12} und a'_{12} verschwindet. —

Die erhaltenen Ausdrücke für $\varkappa$ zeigen, daß innerhalb der eingeführten Annäherung das Gesetz für $\varkappa$, und besonders das für $2\pi\varkappa/\tau\omega = \nu$, noch immer sehr kompliziert ist, insbesondere keineswegs die Symmetrie der durch die zweite Formel (148) gegebenen Absorptionsfläche besitzt. Die letztere Symmetrie tritt aber ein, wenn man, was sehr häufig zulässig ist, in den Ausdrücken für $\varkappa$ die Abhängigkeit der Geschwindigkeit ω von der Richtung ignoriert, also statt der wechselnden eine mittlere $\omega_m = \sqrt{a_m}$ einführt. In diesem Falle hängen die Geschwindigkeiten nur von den Polarisations-, die Absorptionen nur von den Absorptionskonstanten ab. —

Betrachten wir nun unter der Voraussetzung unendlich kleiner Verhältnisse a'_h/a_k, die nach dem Vorstehenden mit der Annahme unendlich kleiner $\varkappa$ gleichwertig ist, die Formel (155″), die wir zunächst schreiben

$$((a_{22}) - (a_{11})) + i\,(a'_{22} - a'_{11}) = i\,a'_{12}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}}\right), \qquad 160)$$

und nehmen hierzu die Bedingung (155‴), so erkennen wir, daß, soweit $(a_{22}) - (a_{11})$ nicht unendlich klein ist, für die eine Wurzel notwendig $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$, für die andere $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ einen unendlich großen imaginären Anteil haben muß.

Da diese Verhältnisse mit denjenigen der komplexen Amplituden von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ identisch sind, und da wir durch Verfügung über den Nullpunkt der Zeit eine dieser Amplituden rein imaginär machen können, so wollen wir schreiben

160′) $$\frac{\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{F}_2} = \frac{G_2 + i\,G_2'}{i\,F_2'}; \quad \frac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{G}_1} = \frac{F_1 + i\,F_1'}{i\,G_1'},$$

wobei die ersten Glieder im Zähler gegen die entsprechenden im Nenner unendlich groß sein mögen. Dann liefert die Gleichung (160)

$$(a_{22}) - (a_{11}) = +\,a_{12}'\frac{G_2}{F_2'}, \quad a_{22}' - a_{11}' = +\,a_{12}'\frac{G_2'}{F_2'},$$

$$(a_{22}) - (a_{11}) = -\,a_{12}'\frac{F_1}{G_1'}, \quad a_{22}' - a_{11}' = -\,a_{12}'\frac{F_1'}{G_1'}$$

oder

160″) $$\begin{cases} \dfrac{G_1'}{F_1} = \dfrac{-a_{12}'}{(a_{22})-(a_{11})}, & \dfrac{G_1'}{F_1'} = \dfrac{-a_{12}'}{a_{22}'-a_{11}'}, \\ \dfrac{F_2'}{G_2} = \dfrac{a_{12}'}{(a_{22})-(a_{11})}, & \dfrac{F_2'}{G_2'} = \dfrac{a_{12}'}{a_{22}'-a_{11}'}, \end{cases}$$

und die Kombination dieser Beziehungen mit dem auf S. 558 u. f. allgemein über die Bestimmungsstücke der Polarisationsellipse Gesagten ergiebt, daß unter der gemachten Voraussetzung schwacher Absorption die Ellipsen Axenverhältnisse haben, die erster Ordnung sind, und daß ihre großen Axen um Winkel von derselben Ordnung gegen die X-, resp. die Y-Axe unseres Koordinatensystemes geneigt sind.

Eine gesonderte Behandlung verlangt wiederum der Fall, daß die Wellennormale, d. h. die Z-Axe, einer der Richtungen unendlich nahe kommt, die wir als optische Axen bezeichnet haben; hierfür ist nämlich (a_{11}) unendlich wenig von (a_{22}) verschieden, und die letzten Entwickelungen verlieren ihre Anwendbarkeit.

Gehen wir sogleich zu dem Grenzfall $(a_{11}) = (a_{22})$ über, so nimmt die Gleichung (160), ohne irgend welche Vernachlässigungen, die Gestalt an

160‴) $$a_{11}' - a_{22}' = a_{12}'\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{F}} - \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{G}}\right);$$

sie ergiebt, daß hier das Verhältnis $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ reell, das parallel einer optischen Axe fortgepflanzte Licht also linear polarisiert ist.

Die Polarisationsrichtung bestimmt sich durch folgende Erwägung. Nach dem auf S. 721 Gesagten ist in dem speziellen Falle, daß die Wellennormale mit einer optischen Axe zusammenfällt, a_{12} jederzeit gleich Null, und wir können das XY-System so legen, daß auch a_{12}' verschwindet; setzen wir dies als geschehen voraus, so zeigt die Gleichung (160‴), daß bei Ausschluß des Falles $a_{11}' = a_{22}'$ für die eine Welle $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$, für die andere $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ unendlich sein muß, daß also die eine in der Richtung der X-, die andere in der Richtung der Y-Axe dieses Koordinatensystemes polarisiert ist, über dessen geometrische Beziehung zu der Absorptionsfläche S. 716 gesprochen ist.

Hieraus folgt, daß bei der Annäherung an eine optische Axe die zuvor angenähert lineären Polarisationen sich allmählich in streng lineäre verwandeln, während zugleich die Polarisationsrichtungen sich aus den durch $(a_{12}) = 0$ definierten, also nur durch die Verhältnisse der Polarisationsfläche bestimmten Richtungen in solche drehen, die der Bedingung $(a'_{12}) = 0$ entsprechen und sonach nur von den Verhältnissen der Absorptionsfläche abhängen.

Demgemäß ist es auch vorteilhafter, weiterhin das Koordinatensystem (X, Y) in der Nähe einer optischen Axe nicht wie S. 720 zu bestimmen, sondern mit den Polarisationsrichtungen zu drehen; daß hierdurch die bisherigen Resultate eine Änderung nicht erleiden, ist leicht erkennbar.

Diese komplizierten Gesetze vereinfachen sich überaus im Falle einaxiger Krystalle, wo die stets streng lineäre Polarisation unter allen Umständen parallel oder normal zum Hauptschnitt stattfindet, und wo in der Richtung der optischen Axe nach (158″) sowohl die Geschwindigkeiten, als die Absorptionsindices der beiden Wellen einander gleich sind. —

Die eingeführte Annäherung ähnelt die Verhältnisse absorbierender Krystalle in hohem Maße denen in durchsichtigen Krystallen an, und es empfiehlt sich daher der größeren Anschaulichkeit halber, die bisher mit 1 bezeichnete Welle, die so viele Eigenschaften der ordinären im durchsichtigen Krystall besitzt, auch als solche zu bezeichnen und durch den Index o zu charakterisieren, die bisher mit 2 bezeichnete als extraordinäre Welle durch den Index e; es gilt dann statt (159′) und (159″)

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_o^2 = (a_{22}), & \omega_e^2 = (a_{11}), \\ \varkappa_o = a'_{22}/2(a_{22}), & \varkappa_e = a'_{11}/2(a_{11}). \end{array}\right\} \qquad 160'''')$$

Ferner gewinnen bei zweiaxigen Krystallen nun auch die am Ende des vorigen Paragraphen erhaltenen Ausdrücke für die Parameter $a_{11}, a_{22}, a'_{11}, a'_{22}$ besondere Bedeutung. Da bei endlichem $a_{11} - a_{22}$ die X-Axe in die eine der durch $(a_{12}) = 0$ definierten Richtungen, nämlich in die Halbierungsebene (Z, P) des oben eingeführten Winkels J, resp. in die Polarisationsrichtung der ordinären Welle bei verschwindender Absorption gelegt war, so ist hier der in (157‴) eingeführte Winkel χ gleich Null, also $a_{11} = (a_{11})$, $a_{22} = (a_{22})$, und das in (157⁗) auftretende χ' bezeichnet direkt den Winkel zwischen den Halbierungsebenen (Z, P) und (Z, P') der beiden S. 716 definierten Winkel J und J'. Da weiter bei stark abnehmendem $a_{11} - a_{22}$, also bei Annäherung an eine optische Axe, die X-Axe aus der Ebene (Z, P)

abweicht und sich nach der Ebene (Z, P') wendet, so nimmt zugleich χ' allmählich zu Null ab, während χ von Null aus wächst. Hiernach lassen sich alle in den Formeln auftretenden Winkelgrößen einfach veranschaulichen, wenn auch ihr analytischer Ausdruck im allgemeinen noch schwerfällig ist.

Was S. 717 bezüglich der willkürlichen Wahl der Z_0- und der Z_0'-Axe zu den strengen Formeln (155''') beigebracht ist, läßt sich auch direkt für die obigen angenäherten Werte zeigen. Eine einfache Rechnung ergiebt z. B., daß eine Vertauschung von a_1' und a_2' und somit der X_0'- und Z_0'-Richtung, die Werte von a_{11}' und a_{22}' nicht ändert, und hieraus folgt auch, daß sie auf die Werte von $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$ einen Einfluß nicht übt.

Die Resultate vereinfachen sich bedeutend, wenn man, was ein später zu erörterndes spezielles Interesse besitzt, die Verhältnisse in der Nähe einer der Axen O' oder O'' untersucht und dabei die Voraussetzung macht, daß diese Axe O' sowohl mit der anderen Axe O'', als mit jeder der Axen A' und A'' beträchtliche Winkel einschließt.

In diesem Falle sind nämlich für alle betrachteten Richtungen der Wellennormale r, resp. Z, die Halbierungsebenen (Z, P') des Winkels J' als zu einander parallel zu betrachten, und sie können somit durch den Winkel k', den die durch die Axe O' gelegte Ebene (O', P') mit der Ebene (X_0, O') einschließt, ein für alle Male angegeben werden. Fixiert man ferner, wie S. 716, die Richtung der Wellennormalen durch den Winkel U' gegen die benachbarte Axe O' und durch den Winkel h zwischen den Ebenen (r, O'), resp. (Z, O') und (X_0, O'), so schließt die Halbierungsebene (Z, P) des Winkels I ihrerseits den Winkel $\frac{1}{2}h$ mit der Ebene (X_0, O') ein. Endlich ist U'' mit $2o$ zu vertauschen, W' und W'' als konstant und U' als von erster Ordnung zu betrachten; hierdurch wird dann nach (157'') auch (a_{22}') und (a_{11}') konstant.

Für Richtungen, denen Werte $a_{11} - a_{22}$ entsprechen, welche, obwohl selbst klein, doch noch groß gegenüber den als unendlich klein vorausgesetzten a' sind, fällt die X-Axe in die Ebene (Z, P); hier ist also $\chi' = k' - \frac{1}{2}h$, und die Ausdrücke (158') gewinnen die einfache Form

$$161)\quad \begin{cases} a_{11}' = (a_{11}')\cos^2(k' - \frac{1}{2}h) + (a_{22}')\sin^2(k' - \frac{1}{2}h), \\ a_{22}' = (a_{11}')\sin^2(k' - \frac{1}{2}h) + (a_{22}')\cos^2(k' - \frac{1}{2}h), \end{cases}$$

die von dem Winkelabstand zwischen der Wellennormale und der optischen Axe O' unabhängig sind.

Bei zu Null abnehmendem $a_{11} - a_{22}$, also bei unendlicher Annäherung an die Axe O', wandert die X-Axe nach der Ebene (Z, P');

versteht man also unter k einen Winkel, der in einiger Entfernung von O' mit $\frac{1}{2}h$ identisch ist und bei gesteigerter Annäherung an O' sehr schnell, aber stetig in k' übergeht, so gilt allgemein

$$\left.\begin{aligned} a'_{11} &= (a'_{11})\cos^2(k'-k) + (a'_{22})\sin^2(k'-k), \\ a'_{22} &= (a'_{11})\sin^2(k'-k) + (a'_{22})\cos^2(k'-k). \end{aligned}\right\} \qquad 161')$$

Was nun die Absorptionsindices $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$ der beiden Wellen angeht, so kann man für ihre Berechnung nach den Gleichungen (161′) innerhalb des Bereiches, für welches die obige Entwickelung gilt, auch noch $a_{11} = a_{22} = a_2$ setzen, welche Beziehung in der optischen Axe selbst mit Strenge gilt, und erhält somit

$$\varkappa_o = a'_{22}/2\,a_2, \quad \varkappa_e = a'_{11}/2\,a_2. \qquad 161'')$$

Wir bemerken schließlich, daß innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Gleichungen (161′)

$$\varkappa_o + \varkappa_e = \frac{(a'_{11}) + (a'_{22})}{2\,a_2}, \quad \nu_o + \nu_e = \frac{\pi\,((a'_{11}) + (a'_{22}))}{\tau\,a_2^{3/2}}, \qquad 161''')$$

also von der Orientierung der Wellennormalen unabhängig ist.

Die Formeln, welche die Absorptionsindices in der Nähe der optischen Axe e i n a x i g e r Krystalle angeben, lassen sich aus den vorstehenden nicht durch Grenzübergang gewinnen, da jene ausdrücklich die endliche Größe des Winkels zwischen den beiden optischen Axen voraussetzen. Man erhält indessen direkt aus (158″), indem man in dem Ausdruck für $\varkappa_e$ statt des äußerst wenig veränderlichen Nenners den konstanten Wert $2\,a_1$ einsetzt,

$$\varkappa_o = \frac{a'_1}{2\,a_1}, \quad \varkappa_e = \frac{a'_1\cos^2 U + a'_3\sin^2 U}{2\,a_1}. \text{ — } \qquad 161'''')$$

§ 24. Angenäherte Theorie der Erscheinungen, die eine Platte aus einem schwach absorbierenden, insbesondere pleochroistischen Krystall im durchgehenden Lichte zeigt.

Die im vorigen Abschnitt erhaltenen Resultate sind von Bedeutung bei der Ableitung der Gesetze für die sehr merkwürdigen Erscheinungen, welche planparallele Platten aus einem absorbierenden Krystall im durchgehenden Lichte zeigen. Wir wenden uns jetzt zu dieser, sehen dabei aber, ähnlich wie bei dem analogen Problem für durchsichtige Krystalle, von dem Einfluß der Reflexionen an den Begrenzungen der Platte ab.[66])

Fällt eine ebene homogene Welle normal auf die Platte auf, und bezeichnen wir die komplexen Amplituden ihrer Komponenten

nach den Polarisationsrichtungen X und Y der in der Platte fortgepflanzten ordinären und extraordinären Welle mit $\mathfrak{E}_o = E_o e^{-i d_o}$ und $\mathfrak{E}_e = E_e e^{-i d_e}$, so haben die austretenden Komponenten die Amplituden

162) $$\mathfrak{D}_o = \mathfrak{E}_o e^{-i \mathfrak{L}_o}, \quad \mathfrak{D}_e = \mathfrak{E}_e e^{-i \mathfrak{L}_e},$$

wobei ist

162′) $$\mathfrak{L}_o = L_o - i L_o' = \frac{2\pi (1 - i \varkappa_o) l}{\tau \omega_o}, \quad \mathfrak{L}_e = L_e - i L_e' = \frac{2\pi (1 - i \varkappa_e) l}{\tau \omega_e}.$$

Die reellen austretenden Amplituden D_o und D_e hängen dann mit den reellen einfallenden E_o und E_e zusammen durch die Formeln

162″) $$D_o = E_o e^{-L_o'}, \quad D_e = E_e e^{-L_e'}.$$

Ist das einfallende Licht natürliches, so wechseln $\mathfrak{E}_o$ und $\mathfrak{E}_e$ zeitlich derart, daß die Mittelwerte $\mathfrak{S}\, E_o^2$ und $\mathfrak{S}\, E_e^2$ einander gleich, und zwar gleich E^2 sind, wobei $2 E^2$ den Mittelwert der einfallenden Intensität mißt, daß aber $\mathfrak{S}\, E_o E_e \cos (d_o - d_e)$ und $\mathfrak{S}\, E_o E_e \sin (d_o - d_e)$ verschwinden. Wird das austretende Licht mit bloßem Auge beobachtet, so addieren sich nach S. 541 die Intensitäten der beiden Komponenten ohne zu interferieren; es gilt hier also für den Mittelwert A der austretenden Amplitude

163) $$\mathfrak{S}\, A^2 = E^2 (e^{-2 L_o'} + e^{-2 L_e'}).$$

Ist dagegen das einfallende Licht unter dem Azimut a gegen die Polarisationsrichtung der ordinären Welle lineär polarisiert, so kann man $\mathfrak{E}_o = E \cos a$, $\mathfrak{E}_e = E \sin a$ setzen, und die schließliche Amplitude ist gegeben durch

163′) $$A^2 = E^2 (e^{-2 L_o'} \cos^2 a + e^{-2 L_e'} \sin^2 a).$$

Wird die austretende Welle mit einem Analysator aufgefangen, dessen Polarisationsebene das Azimut b hat, so gewinnen die Betrachtungen von S. 656 u. f. Anwendung. Speziell wird bei einfallendem natürlichen Licht ein Mittelwert der Amplitude beobachtet

163″) $$\mathfrak{S}\, A^2 = E^2 (e^{-2 L_o'} \cos^2 b + e^{-2 L_e'} \sin^2 b),$$

bei einfallendem, lineär nach dem Azimut a polarisierten dagegen eine Amplitude

163‴) $$\left\{ \begin{aligned} A^2 = E^2 (e^{-2 L_o'} & \cos^2 a \cos^2 b + e^{-2 L_e'} \sin^2 a \sin^2 b \\ & + 2 e^{-(L_o' + L_e')} \cos a \cos b \sin a \sin b \cos \Delta), \end{aligned} \right.$$

wobei $$\Delta = L_o - L_e + d_o - d_e.$$

Diese allgemeinen Formeln gestatten einfache Anwendungen, von denen wir einige erwähnen wollen. Die Gleichungen (163′)

und (163″) zeigen, daß es für unsere Wahrnehmung allgemein gleichgültig ist, ob die Welle vor oder nach dem Passieren der Platte einen Polarisationsapparat durchsetzt; die Intensität hängt in beiden Fällen gleichmäßig von dem Azimut des letzteren ab. In den speziellen Fällen, daß das Azimut gleich Null oder gleich $\frac{1}{2}\pi$ ist, erhält man

$$A_0^2 = E^2 e^{-2L_o'}, \quad A_{1/2\pi}^2 = E^2 e^{-2L_e'},$$

somit verschiedene Intensitäten, und bei einfallendem weißen Licht im allgemeinen auch verschiedene F a r b e n.

Läßt man also ein Strahlenbündel, das durch eine Platte aus einem absorbierenden Krystall gegangen ist, einen geeignet orientierten Kalkspat passieren und danach ins Auge gelangen, so wird sich etwa vorhandener Pleochroismus des Krystalles durch die verschiedene Färbung der beiden wahrnehmbaren Bilder anzeigen. —

Wir wollen nun, wie S. 659, annehmen, die vorausgesetzte, zunächst optisch z w e i a x i g e Krystallplatte könne als ein Stück einer Kugelschale aus dem betrachteten Krystall angesehen werden, die vom Centrum her Licht empfängt und von außen beobachtet wird, und gelangen damit zu einer angenäherten Theorie der Erscheinungen, welche Platten aus absorbierenden Krystallen im konvergenten Licht zeigen. Es sind dann in den obigen allgemeinen Gleichungen die Winkel a und b, welche gegen die von Ort zu Ort auf der Kugelschale wechselnde XZ-Ebene gerechnet sind, einheitlich auszudrücken. Dies geschieht, wenn wir uns auf die Umgebung der optischen Axe O' beschränken, sehr einfach, indem wir alle Polarisationsebenen durch ihre Winkel mit der Ebene (O', X_0) bestimmen. Da der Winkel der Ebene (O', X) mit (O', X_0) oben durch k bezeichnet ist, so wird, wenn wir die innerhalb des behandelten Gebietes konstanten Winkel zwischen den Polarisationsebenen des Polarisators, resp. des Analysators, und der Ebene (O', X_0) durch f, resp. g, bezeichnen,

$$a = f - k, \quad b = g - k; \qquad 163'''$$

in derselben Größe k ist aber durch (161′) und (161″) bereits $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$, und somit L_o' und L_e' ausgedrückt.

Von den oben aufgestellten allgemeinen Formeln (163) bis (163‴) ist die erste die e i n f a c h s t e, und die durch sie gegebenen Erscheinungen sind ganz besonders c h a r a k t e r i s t i s c h, da sie bei Beobachtung mit dem freien Auge und mit einfallendem natürlichen Licht eintreten, also unter Umständen, wo durchsichtige Krystalle sich in der Umgebung einer optischen Axe überhaupt von isotropen Körpern nicht merklich unterscheiden.

Die durch Gleichung (163) bestimmte Intensität ist von dem Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der optischen Axe nur insoweit abhängig, als derselbe auf die in L'_o und L'_e enthaltene Größe k influiert, die ja in endlicher Entfernung von der optischen Axe gleich $\frac{1}{2}h$ ist, in unendlich kleiner sehr schnell in k' übergeht. Somit ist die Intensität längs der Meridiane durch O' konstant, soweit man sich O' nicht unendlich nähert. Maxima und Minima finden nach den Werten der L', resp. der $\varkappa$, statt, wenn $\cos 2(k'-k)$ oder $\sin 2(k'-k) = 0$ ist, und zwar entspricht das Maximum den Werten $k'-k$ gleich 0, $\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\pi$, das Minimum den Werten $k'-k$ gleich $\pm\frac{1}{4}\pi$, $\pm\frac{3}{4}\pi$.

Da nun h die geographische Länge der Beobachtungsstelle gegen die Ebene (O', X_0) ist, so finden sich in merklicher Entfernung von O' die Minima in dem Meridian $h = 2k' \pm \frac{1}{2}\pi$, die Maxima in dem Meridian $h = 2k'$; das gleiche Maximum findet sich in der Richtung von O', wo $k = k'$ ist.

Gemäß diesen Resultaten nimmt man in der Umgebung einer optischen Axe O' dunkle Sektoren wahr, deren größte Tiefe sich in der Ebene durch O' findet, welche mit (O', X_0) die Winkel $2k' \pm \frac{1}{2}\pi$ einschließt; in den Ebenen, welche senkrecht zu jener stehen, wie in der Richtung von O' selbst, ist die Lichtintensität am größten.

Für alle Krystalle, mit Ausnahme sämtlicher Angehörigen des triklinen Systemes und derjenigen des monoklinen, für welche die optischen Axen nicht in der ausgezeichneten Ebene, sondern in einer dazu normalen liegen, ist nach Symmetrie der Winkel k' gleich Null oder gleich $\frac{1}{2}\pi$; bei ihnen allen liegen also die dunkeln Büschel normal zu der Ebene der optischen Axen, die ihrerseits in ihrer ganzen Ausdehnung hell erscheint.[67]) —

Ähnlich lassen sich die Formeln (163′) und (163″) diskutieren: sie stellen Erscheinungen dar, bei denen sich die Wirkungen der variabeln Polarisation denjenigen der variabeln Absorption überlagern; noch komplizierter sind die durch (163‴) beschriebenen Phänomene, wo außerdem noch die Interferenz einen Einfluß übt.

Dieser letztere verschwindet, die Erscheinungen vereinfachen sich und werden den früheren sehr ähnlich, wenn infolge der Absorption der Einfluß des Gangunterschiedes Δ auf dieselben verschwindet, d. h., wenn das letzte Glied in dem Ausdruck (163″) für A^2 als klein neben einem der beiden ersten betrachtet werden darf. Damit dies überhaupt eintreten kann, muß eine der beiden Konstanten (a'_{11}) und (a'_{22}) erheblich größer sein, als die andere; findet dies statt, so wird beim Umkreisen der optischen Axe O' bald das

eine, bald das andere der beiden ersten Glieder sehr klein, während das dritte, dessen Exponent mit $\nu_o + \nu_e$ proportional ist, nach (161''') immer klein bleibt.

Ob die Voraussetzung erfüllt ist, erkennt man an dem Nichtauftreten der nach S. 661 durch das letzte Glied in (163''') gegebenen, die Axenrichtungen O' und O'' umschließenden hellen und dunkeln Kurven; ihre Annahme beseitigt gewissermaßen die Anteile an der Erscheinung, die auch bei verschwindender Absorption übrig bleiben würden, und läßt spezifische Wirkungen des Pleochroismus allein hervortreten.

Unter der gemachten Annahme wird die Formel (163''') zu

$$A^2 = E^2(e^{-2L_o'}\cos^2 a \cos^2 b + e^{-2L_e'}\sin^2 a \sin^2 b); \qquad 164)$$

und in den beiden wichtigsten Fällen, daß Polarisator und Analysator parallel oder gekreuzt stehen, somit $a - b = 0$ oder $= \frac{1}{2}\pi$ ist, ergiebt sie

$$A_0^2 = E^2(e^{-2L_o'}\cos^4 a + e^{-2L_e'}\sin^4 a), \qquad 164')$$

$$A_{1/2\pi}^2 = E^2 \sin^2 a \cos^2 a (e^{-2L_o'} + e^{-2L_e'}). \qquad 164'')$$

Die erste dieser Formeln hat viel Ähnlichkeit mit (163'), resp. (163''), die letzte mit (163), und gleiches gilt daher auch von den Erscheinungen, die sie aussprechen. Auf die genauere Erörterung des gegenseitigen Verhältnisses können wir aber hier nicht eingehen. —

Die Gesetze der Erscheinungen, die in analoger Weise in der Umgebung der optischen Axe einaxiger Krystalle zu stande kommen, lassen sich nach dem S. 725 Bemerkten nicht aus den für zweiaxige Krystalle erhaltenen durch Grenzübergang gewinnen, sondern es sind für ihre Ableitung in die Gleichungen (163) bis (163''') die Werte für $\varkappa_o$ und $\varkappa_e$ aus (161'''') einzuführen.

Für die Diskussion sind zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Der erste tritt ein, wenn die Absorptionskonstante a_3' erheblich größer ist, als a_1'. Dann wird der Krystall längs der optischen Axe sich nahezu wie ein durchsichtiger verhalten, aber in Richtungen, die mit der letzteren mäßige Winkel einschließen, wird $\varkappa_e$ und demgemäß L_e' beträchtliche Werte besitzen. Sind dieselben so groß, daß das letzte Glied in (163''') neben dem ersten zu vernachlässigen ist, kommen also bei einfallendem lineär polarisierten Lichte die nach S. 660 von Δ abhängigen hellen und dunkeln Kreise um die optische Axe nicht zu stande, so ist umsomehr das zweite Glied zu vernachlässigen, und man erhält überaus einfach

$$A^2 = E^2 e^{-2L_o'}\cos^2 a \cos^2 b. \qquad 165)$$

Hierin bezeichnen a und b die Winkel, welche die Polarisationsebenen des Polarisators und des Analysators mit dem Hauptschnitt einschließen, der die Beobachtungsrichtung enthält.

Ist das einfallende Licht natürliches, so erhält man nach (163')

165') $$\mathfrak{S} A^2 = E^2 e^{-2L_o'} \cos^2 b,$$

beobachtet man auch ohne Analysator, so gilt nach (163)

165'') $$\mathfrak{S} A^2 = E^2 e^{-2L_o'}.$$

Der Inhalt dieser Formeln ist leicht in Worte zu fassen und wird durch die Beobachtung genau bestätigt.[68])

In dem zweiten Fall, daß a_1' an Größe a_3' erheblich übertrifft, wird, wenn die Platte hinreichend dick ist, um keine hellen und dunkeln Ringe zu zeigen, in der Richtung der optischen Axe keine merkliche Intensität hindurchgehen, da dort L_o' und L_e' sehr groß sind. Mit wachsender Neigung der Beobachtungsrichtung nimmt L_e' allmählich ab, und in gewissem Abstande wird somit nach (163''') gelten

165''') $$A^2 = E^2 e^{-2L_e'} \sin^2 a \sin^2 b.$$

Diese Formel ist mit (165) gleich gestaltet und gestattet analoge Folgerungen; nur nehmen die zu den Polarisationsebenen von Polarisator und Analysator normalen Richtungen jetzt dieselbe Stelle ein, wie zuvor jene Richtungen selbst, und umgekehrt.

Die durch die letzte Formel dargestellten Erscheinungen werden erst in größerem Abstande von der optischen Axe merklich, wie die durch die füheren gegebenen, und sind daher nicht so auffällig.[69])

§ 25. Die allgemeinen Gleichungen für die Fortpflanzung ebener inhomogener Wellen in absorbierenden Medien. Die geometrischen Gesetze der Reflexion und Brechung in den Zwischengrenzen absorbierender Medien. Spezielle Fälle.

Um zu allgemeineren Resultaten zu gelangen, knüpfen wir an den Ausdruck (150') für die Funktion $\mathfrak{f}$ an, welche bei absorbierenden Medien an die Stelle der potentiellen Energie φ trat. Da sie nicht reelle, sondern komplexe Parameter enthält, so ist es nicht möglich, durch Einführung eines reellen Hauptaxensystemes, wie S. 578 die a_{23}, a_{31}, a_{12}, so nunmehr die $\mathfrak{a}_{23}$, $\mathfrak{a}_{31}$, $\mathfrak{a}_{13}$ zum Verschwinden zu bringen; dagegen gelingt dies bei Benutzung eines Systemes komplexer Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, das charakterisiert werden mag durch das Faktorenschema:

$$\left.\begin{array}{c|ccc} & X & Y & Z \\ \hline \mathfrak{X} & \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{Y} & \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{Z} & \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 ; \end{array}\right\} \tag{166)}$$

in ihm erfüllen die $\mathfrak{A}_h$, $\mathfrak{B}_h$, $\mathfrak{C}_h$ die gewöhnlichen Orthogonalitätsbedingungen und sind somit als komplexe Richtungskosinus des Systemes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu bezeichnen.[70])

Nimmt, auf dieses System bezogen, die Funktion $\mathfrak{f}$ die Form

$$2\,\mathfrak{f} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{z}^2 \tag{166')}$$

an, so gilt für das reelle System X, Y, Z

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{C}_1^2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{a}_{23} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{a}_3\,\mathfrak{C}_2\,\mathfrak{C}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{166'')}$$

und die Hauptgleichungen (151) lauten

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{u}'' = \mathfrak{a}_2 \dfrac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\,\mathfrak{Z}} - \mathfrak{a}_3 \dfrac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial\,\mathfrak{Y}}, \quad \mathfrak{v}'' = \mathfrak{a}_3 \dfrac{\partial\,\mathfrak{z}}{\partial\,\mathfrak{X}} - \mathfrak{a}_1 \dfrac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial\,\mathfrak{Z}}, \\ \mathfrak{w}'' = \mathfrak{a}_1 \dfrac{\partial\,\mathfrak{x}}{\partial\,\mathfrak{Y}} - \mathfrak{a}_2 \dfrac{\partial\,\mathfrak{y}}{\partial\,\mathfrak{X}}. \end{array}\right\} \tag{166''')}$$

Diese Formeln lassen sich durch ähnliche Ansätze für $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ integrieren, als die, von denen auf S. 630 ausgegangen ist.

Wir setzen also

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{F}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{G}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{w} = \mathfrak{H}\,\mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{R}\,e^{i\mathfrak{T}}, \tag{167)}$$

wobei

$$\mathfrak{F}^2 + \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2 = 1, \quad \mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{r}}{\omega}\right), \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{a}\,x + \mathfrak{b}\,y + \mathfrak{c}\,z \tag{167')}$$

ist. Führen wir dann statt x, y, z die komplexen Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ein, so erhalten wir zunächst

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{a}'\,\mathfrak{X} + \mathfrak{b}'\,\mathfrak{Y} + \mathfrak{c}'\,\mathfrak{Z},$$

wobei

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{A}_3,$$
$$\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{B}_3,$$
$$\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{C}_3$$

ist, und wenn wir

$$\frac{\omega^2}{\mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{b}'^2 + \mathfrak{c}'^2} = \mathfrak{o}^2, \quad \frac{\mathfrak{a}'^2}{\mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{b}'^2 + \mathfrak{c}'^2} = \mathfrak{A}'^2, \dots \tag{167'')}$$

setzen, so wird

167‴) $$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{o}}\right), \quad \text{wobei } \mathfrak{N}' = \mathfrak{A}'\mathfrak{X} + \mathfrak{B}'\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}'\mathfrak{Z}.$$

Hierdurch ist die formale Übereinstimmung mit dem Ansatz auf S. 630 hergestellt, nur stehen hier die komplexen Richtungskosinus $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ an Stelle der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dort. Es läßt sich also ein komplexer Hilfsvektor $\mathfrak{d}$ einführen, dessen Richtungskosinus lauten

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H}\mathfrak{B}' - \mathfrak{G}\mathfrak{C}', \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{F}\mathfrak{C}' - \mathfrak{H}\mathfrak{A}', \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{G}\mathfrak{A}' - \mathfrak{F}\mathfrak{B}',$$

und es gilt dann nach (87′) das fundamentale System

168) $$(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{L} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}', \quad (\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\mathfrak{B}', \quad (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{N} = \mathfrak{D}\mathfrak{C}',$$

wobei abgekürzt

168′) $$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{A}' \mathfrak{L} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}' \mathfrak{M} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{C}' \mathfrak{N} = \mathfrak{D}$$

gesetzt ist. Aus ihm folgt sogleich

168″) $$\begin{cases} 0 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{L}\mathfrak{F} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{M}\mathfrak{G} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{N}\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{o}^2 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{N}^2, \end{cases}$$

168‴) $$0 = \frac{\mathfrak{A}'^2}{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\mathfrak{C}'^2}{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{o}^2},$$

was mit den Beziehungen (87‴) übereinstimmt.

Die Gleichung (168‴) bestimmt die komplexe Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$ als Funktion der komplexen Richtungskosinus von $\mathfrak{N}'$; aber diese höchst kompliziert definierten Größen werden bei speziellen Problemen nur selten wirklich direkt gegeben sein, und somit besitzt die äußerlich elegante und einfache Formel selten praktische Bedeutung.

Sie erleidet eine wesentliche Vereinfachung, wenn die komplexen Koordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in reelle übergehen, d. h., wenn die Polarisations- und die Absorptionsaxen zusammenfallen, wie das in allen Krystallsystemen mit Ausnahme des triklinen und des monoklinen stattfindet. Hier wird denn auch $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$. Ist überdies die fortgepflanzte Welle h o m o g e n, so werden auch noch $\mathfrak{A} = \alpha$, $\mathfrak{B} = \beta$, $\mathfrak{C} = \gamma$, d. h. gleich den reellen Richtungskosinus der zusammenfallenden Normalen r und r', und $\mathfrak{o}$ wird zu $\omega/(1 - i\varkappa)$. Demgemäß nehmen hier die Formeln (168) die Gestalt an

169) $$(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{L} = \mathfrak{D}\alpha, \quad (\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\beta, \quad (\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{o}^2)\mathfrak{N} = \mathfrak{D}\gamma,$$

und (168‴) lautet

169′) $$\frac{\alpha^2}{\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\beta^2}{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{o}^2} + \frac{\gamma^2}{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{o}^2} = 0.$$

Der allgemeinste Fall, auf den diese Beziehung Anwendung findet, ist der eines Krystalles aus dem rhombischen System. Liegt

die Wellennormale speziell in einer der Symmetrieebenen, so lassen sich die beiden Wurzeln $\mathfrak{o}^2$ sondern und lauten

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für die } YZ\text{-Ebene} & \mathfrak{o}_1^2 = \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{o}_2^2 = \mathfrak{a}_2\gamma^2 + \mathfrak{a}_3\beta^2, \\ \text{für die } ZX\text{-Ebene} & \mathfrak{o}_1^2 = \mathfrak{a}_2, & \mathfrak{o}_2^2 = \mathfrak{a}_3\alpha^2 + \mathfrak{a}_1\gamma^2, \\ \text{für die } XY\text{-Ebene} & \mathfrak{o}_1^2 = \mathfrak{a}_3, & \mathfrak{o}_2^2 = \mathfrak{a}_1\beta^2 + \mathfrak{a}_2\alpha^2; \end{array}\right\} \qquad 169'')$$

wegen

$$\mathfrak{o}^2 = \frac{\omega^2(1 - \varkappa^2 + 2i\varkappa)}{(1+\varkappa^2)^2}$$

folgt hieraus, daß in jeder dieser Ebenen eine Welle sowohl konstante Geschwindigkeit ω, als konstanten Absorptionsindex $\varkappa$ besitzt. Außerdem erkennt man, daß die drei $\mathfrak{a}_h$ die Quadrate der komplexen Geschwindigkeiten $\mathfrak{o}$ für die sechs sich parallel den Symmetrieaxen fortpflanzenden Wellen angeben; je zwei von letzteren besitzen sonach gleiche reelle Geschwindigkeiten ω und gleiche Absorptionsindices $\varkappa$.

Will man die eine der fortgepflanzten homogenen Wellen als ordinäre, die andere als extraordinäre bezeichnen, so wird man diese Namen darnach verteilen, welche Natur die einzelne Welle bei verschwindender Absorption annimmt; es kommt dann das S. 593 über diese Frage Gesagte zur Anwendung.

Läßt man den zweiaxigen Krystall dadurch zu einem einaxigen werden, daß man $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ macht, so ergiebt sich für diesen direkt

$$\mathfrak{o}_o^2 = \mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{o}_e^2 = \mathfrak{a}_1\gamma^2 + \mathfrak{a}_3(\alpha^2 + \beta^2), \qquad 169''')$$

was mit dem in (158'') gegebenen Resultat übereinstimmt. —

Die Sonderung des Reellen und des Imaginären in den vorstehenden Formeln liefert im allgemeinen wenig übersichtliche Resultate; nur die Fälle der Gleichungen (169'') und (169'''), wo die beiden Wurzeln für $\mathfrak{o}^2$ in rationaler Form dargestellt sind, bilden eine Ausnahme. Überhaupt hat die hier gewählte Ausdrucksweise mehr allgemein theoretisches, als speziell praktisches Interesse.

Auch die für schwache Absorption vereinfachten Gesetze gewinnt man in anschaulicherer Form auf dem in den vorigen Paragraphen eingeschlagenen Wege. Doch möge, um ein Beispiel zu geben, angeführt werden, daß man bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf a_h'/a_k, resp. auf $\varkappa$, aus der für rhombische Krystalle geltenden Formel (169') erhält:

$$\frac{\alpha^2}{a_1 - \omega^2} + \frac{\beta^2}{a_2 - \omega^2} + \frac{\gamma^2}{a_3 - \omega^2} = 0, \qquad 170)$$

$$2\varkappa\omega^2 = \frac{\alpha^2[(a_2 - \omega^2)a_3' + (a_3 - \omega^2)a_2'] + \dots}{\alpha^2(a_2 + a_3 - 2\omega^2) + \dots}. \qquad 170')$$

Die erste dieser Gleichungen, verglichen mit (48''), zeigt, daß, bis auf die angegebene Ordnung — über eine Ausnahme ist S. 720 u. f. gesprochen — das Gesetz für ω^2 von der Absorption unabhängig ist; die zweite giebt, wenn man eine der Wurzeln für ω^2 aus der ersteren einsetzt, direkt $\varkappa$ als Funktion der Richtungskosinus α, β, γ der Wellennormalen. Durch Anwendung auf eine Symmetrieebene, z. B. die YZ-Ebene, erhält man in Übereinstimmung mit (169'')

170'') $$\omega_1^2 = a_1, \quad \omega_2^2 = a_2\gamma^2 + a_3\beta^2,$$

170''') $$2\varkappa_1 = \frac{a'_1}{a_1}, \quad 2\varkappa_2 = \frac{a'_2\gamma^2 + a'_3\beta^2}{a_2\gamma^2 + a_3\beta^2}. —$$

Was die den fortgepflanzten Wellenebenen zugehörigen Strahlen angeht, so sind bei homogenen Wellen, die sich vollständig durch die Richtungskosinus ihrer Normalen bestimmen, die auf S. 595 u. f. im Falle durchsichtiger Medien angewandten Überlegungen anwendbar und ergeben zu jeder Wellennormalen im allgemeinen zwei nach Richtung und Geschwindigkeit bestimmte Strahlen. Ihre Richtungen stimmen aber hier nicht mit denjenigen der bezüglichen Energieströmungen überein, denn letztere sind nicht zeitlich konstant, sondern oscillieren, spezielle Fälle ausgenommen, um je eine konstante mittlere Richtung. Indessen hat die Untersuchung dieser Verhältnisse kein praktisches Interesse, da in allen Fällen, wo die Absorption stark genug ist, um das Gesetz für die Geschwindigkeiten der Wellenebenen zu beeinflussen, eine Beobachtung über die Fortpflanzung von Strahlen in dem Medium ausgeschlossen ist, im gegenteiligen Falle aber mit der Normalenfläche N auch Richtung und Geschwindigkeit der Strahlen von der Absorption unabhängig wird. —

Gehen wir nun zu dem Problem der Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an der ebenen Grenze zweier absorbierender Medien (0) und (1) über, so folgt, wie bei durchsichtigen Medien, auch hier ein Teil der bezüglichen Gesetze schon allein aus der Thatsache, daß die Grenzbedingungen homogene lineäre Beziehungen zwischen den Schwingungsvektoren darstellen. Legen wir nämlich wiederum die XY-Ebene in die Grenze und setzen die Schwingungsvektoren in den verschiedenen Wellen proportional mit

$$e^{i\mathfrak{T}_h}, \quad \text{wobei } \mathfrak{T}_h = \frac{2\pi}{\tau_h}\left(t - \frac{\mathfrak{A}_h x + \mathfrak{B}_h y + \mathfrak{C}_h z}{\mathfrak{o}_h}\right),$$

so ergiebt sich hieraus, daß für alle aus einer einfallenden entstehenden Wellen sowohl τ_h, als auch $\mathfrak{A}_h/\mathfrak{o}_h$ und $\mathfrak{B}_h/\mathfrak{o}_h$ den gleichen Wert haben muß. Wegen der Bedeutung der Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{o}$ gilt dann gleiches für

$$\frac{\alpha_h}{\omega_h}, \quad \frac{\beta_h}{\omega_h}, \quad \frac{\varkappa_h \alpha'_h}{\omega_h}, \quad \frac{\varkappa_h \beta'_h}{\omega_h};$$

es ist hierbei aber zu berücksichtigen, daß jetzt sowohl bei krystallinischen, als bei isotropen Medien ω und $\varkappa$ von den Richtungskosinus α, β und α', β' abhängig sind.

Der bei weitem wichtigste Fall ist der, daß für eine, etwa die einfallende Welle die Ebenen konstanter Phase und konstanter Amplitude beide normal zu derselben Ebene durch das Einfallslot stehen; wählt man die letztere zur XZ-Ebene, so ist für jene Welle, und demgemäß für alle mit ihr in Verbindung stehenden, $\beta = \beta' = 0$; es liegen also für alle Wellen r und r' gleichfalls in der XZ-Ebene, und es haben für alle α_h / ω_h und $\varkappa_h \alpha'_h / \omega_h$ die gleichen Werte. Diesen Satz wollen wir als das Grundgesetz der Reflexion und der Brechung in dem hervorgehobenen und weiterhin allein vorausgesetzten Falle bezeichnen.[71]) —

Für die weitere Entwickelung der Theorie, und speziell der Gesetze über die Richtungen von Wellennormalen und Schwingungsvektoren in den reflektierten und gebrochenen Wellen, ist die im Anfang dieses Paragraphen gewählte Darstellung aus demselben Grunde nicht brauchbar, aus welchem im Falle durchsichtiger Krystalle die Einführung der optischen Symmetrierichtungen als Koordinatenaxen ausgeschlossen war; die benutzten speziellen komplexen Axen fallen eben im allgemeinen für die beiden durch die Grenze geschiedenen Medien nicht zusammen. Dagegen gestatten die Formeln auf S. 633 u. f., die für das Problem der Reflexion und Brechung ebener inhomogener Wellen an der Zwischengrenze durchsichtiger Medien entwickelt waren, die unmittelbare Übertragung auf unseren Fall, der sich nur durch das Auftreten der komplexen Parameter $\mathfrak{a}_{hk}$ an Stelle der reellen a_{hk} von dem früheren unterscheidet.

So liefert die Übertragung des Systemes (89) die Hauptgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{u}'' &= \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{z}),\\
\mathfrak{v}'' &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{a}_{31}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_{32}\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{z}) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_{12}\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_{13}\mathfrak{z}),\\
\mathfrak{w}'' &= \qquad\qquad - \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{a}_{21}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{y} + \mathfrak{a}_{23}\mathfrak{z}),
\end{aligned}\right\} \quad 171)$$

wobei

$$\mathfrak{x} = -\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial x}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x} \qquad 171')$$

ist, und die letzte Gleichung auch durch

171'') $$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial z} = 0$$

ersetzt werden kann.

Wir behalten die Ansätze (167) bei, nehmen aber

171''') $$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{o}}\right),$$

wobei $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\,x + \mathfrak{C}\,z$,

171'''') $$\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2}, \quad \mathfrak{C}^2 = \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2}, \quad \mathfrak{o}^2 = \frac{\omega^2}{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2}$$

und $\mathfrak{a} = \alpha - i\varkappa\alpha'$, $\mathfrak{c} = \gamma - i\varkappa\gamma'$ ist.

Den Gleichungen (90'') und (90'''') entsprechen dann unmittelbar die Formeln

172) $$(\mathfrak{o}^2 - \mathfrak{a}_{22})(\mathfrak{o}^2 - \mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{a}_{33}\,\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{a}_{31}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}) = (\mathfrak{a}_{23}\,\mathfrak{A} - \mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{C})^2,$$

172') $$\operatorname{tg}\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{o}^2 - \mathfrak{a}_{22}}{\mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{a}_{23}\,\mathfrak{A}},$$

wobei wieder

172'') $$\mathfrak{F} = \mathfrak{C}\cos\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{G} = \sin\mathfrak{d}, \quad \mathfrak{H} = -\,\mathfrak{A}\cos\mathfrak{d}$$

gesetzt ist, also $\mathfrak{d}$ das komplexe Azimut der Schwingung gegen die Einfallsebene bezeichnet.

Im Falle der Reflexion und Brechung hat für alle erregten Wellen $\mathfrak{A}/\mathfrak{o}$ den für die einfallende Welle vorgeschriebenen Wert; bezeichnen wir denselben wieder mit $1/\mathfrak{k}$ und setzen auch $\mathfrak{C}/\mathfrak{A} = \mathfrak{e}$, so sind die $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{d}$ für die reflektierten und die gebrochenen Wellen bestimmt durch die Formeln

172''') $$(\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{e}^2 - 2\mathfrak{a}_{13}\mathfrak{e} + \mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{k}^2)(\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{k}^2) = (\mathfrak{a}_{12}\mathfrak{e} - \mathfrak{a}_{23})^2(1 + \mathfrak{e}^2),$$

172'''') $$\operatorname{tg}\mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{k}^2 - \mathfrak{a}_{22} - \mathfrak{a}_{22}\,\mathfrak{e}^2}{(\mathfrak{a}_{12}\,\mathfrak{e} - \mathfrak{a}_{23})\sqrt{1 + \mathfrak{e}^2}},$$

die im ersten Fall für das Medium (0), im zweiten für (1) gebildet zu denken sind. Welche Wurzeln für $\mathfrak{e}$ zu wählen sind, würde auch hier in zweifelhaften Fällen durch Untersuchung des Energiestromes, der ihnen entspricht, zu entscheiden sein; im allgemeinen wird zu ihrer Bestimmung die Bemerkung ausreichen, daß keine reflektierte oder gebrochene Welle eine mit dem Abstand von der Grenze unendlich wachsende Amplitude besitzen darf. —

Bei weitem das größte Interesse bietet der Fall, daß das Medium (0) durchsichtig und die einfallende Welle homogen ist. Dann ist für dieselbe

$$\mathfrak{A} = \alpha, \quad \mathfrak{C} = \gamma, \quad \mathfrak{o} = \omega,$$

also $\mathfrak{k}$ reell gleich k, und das Brechungsgesetz verlangt, daß $\mathfrak{A}/\mathfrak{o}$

auch für das zweite Medium reell, also α' gleich Null, somit γ' gleich Eins sein muß. Charakterisieren wir wieder das zweite Medium durch den Index $_,$, so wird hiernach

$$\mathfrak{a}_, = \alpha_, , \quad \mathfrak{c}_, = \gamma_, - i\varkappa_, , \quad \mathfrak{e}_, = (\gamma_, - i\varkappa_,)/\alpha_, ,$$

und die Berechnung von $\mathfrak{e}_,$ aus der Gleichung (172‴) bestimmt zugleich $\gamma_,/\alpha_,$ und $\varkappa_,/\alpha_,$.

Ist außerdem das erste Medium isotrop, so wird für die reflektierten Wellen $\alpha_r = \alpha$, $\gamma_r = -\gamma$, $\omega_r = \omega$; außerdem kann man ihre Schwingungen als resp. parallel und normal zur Einfallsebene lineär polarisiert annehmen, d. h. für die eine $\mathfrak{d}$ gleich Null, für die andere $\mathfrak{d}$ gleich $\frac{1}{2}\pi$ setzen. —

Die Verhältnisse werden die denkbar einfachsten, wenn auch noch das zweite Medium isotrop ist; wegen des reellen $\mathfrak{k} = k$ liefert hier die Gleichung (172‴)

$$\mathfrak{e}_,^2 = \left(\frac{\gamma_, - i\varkappa_,}{\alpha_,}\right)^2 = \frac{k^2 - \mathfrak{a}_,}{\mathfrak{a}_,} = \frac{a_, k^2 - (a_,^2 + a_,'^2) - i a_,' k^2}{a_,^2 + a_,'^2}, \tag{173}$$

aus welcher folgt

$$\frac{\gamma_,^2 - \varkappa_,^2}{\alpha_,^2} = \frac{a_, k^2 - (a_,^2 + a_,'^2)}{a_,^2 + a_,'^2}, \quad \frac{2\gamma_,\varkappa_,}{\alpha_,^2} = \frac{a_,' k^2}{a_,^2 + a_,'^2}; \tag{173'}$$

die Elimination von $\varkappa_,$ ergiebt eine Relation zwischen dem Einfalls- und dem Brechungswinkel, welche durch die Konstanten a, $a_,$ und $a_,'$ beider Medien vermittelt wird, und damit das eigentliche Brechungsgesetz, das wir in der früheren Abkürzung $\gamma_,/\alpha_, = e_,$ schreiben

$$e_,^4 + \left(1 - \frac{a_, k^2}{a_,^2 + a_,'^2}\right) e_,^2 = \frac{a_,'^2 k^4}{4(a_,^2 + a_,'^2)^2}. \tag{173''}$$

Wir bemerken, daß die Gleichung in Bezug auf $e_,^2$ quadratisch ist, daß sie aber nur eine positive, und somit brauchbare Wurzel besitzt; ferner, daß, weil jedem reellen Wert von $e_,$ ein reeller Brechungswinkel zugehört, etwas der totalen Reflexion Analoges an der Grenze nach einem absorbierenden isotropen Medium nicht eintreten kann.

Bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung in Bezug auf das Verhältnis $a_,'/a_,$ ist das rechts stehende Glied zu vernachlässigen und die Klammer links mit $(1 - k^2/a_,)$ zu vertauschen; dadurch wird das Brechungsgesetz mit dem für durchsichtige Medien geltenden identisch, im allgemeinen Falle weicht es mehr oder weniger davon ab. Hieraus folgt ohne weiteres, daß, wenn man, wie bei durchsichtigen Medien, das Verhältnis der Geschwindigkeit v im leeren Raum zu der ω für ebene homogene Wellen im absorbierenden

Körper als den Brechungsindex n des letzteren bezeichnet, n sich streng genommen aus Messungen der Ablenkung durch ein Prisma nicht mittels der Formeln für durchsichtige Medien berechnen läßt.

Für den speziellen Fall, daß die das Prisma passierende Welle auf die zweite Fläche desselben **normal** auffällt, ist das Gesetz der Ablenkung ohne weiteres aus Gleichung (173″) abzuleiten, denn beim normalen Auffall ergiebt das allgemeine Brechungsgesetz von S. 735, solange nicht eine der Geschwindigkeiten ω und $\omega_{,}$ unendlich klein ist, mit Notwendigkeit normalen Austritt, und die gesamte Ablenkung ist sonach gleich dem Winkel zwischen der auf die erste Fläche einfallenden und der ebenda gebrochenen Wellennormale. Analoges gilt, wenn die Welle normal durch die erste Fläche tritt.[72])

§ 26. Die Gesetze der Amplituden bei der Reflexion und Brechung ebener Wellen an der ebenen Grenze zwischen zwei absorbierenden Medien. Das eine Medium ist durchsichtig und isotrop; beide Medien sind isotrop. Der Fall schwacher Absorption und der Fall der Metallreflexion.

Die Grenzbedingungen für eine mit der XY-Ebene zusammenfallende Zwischengrenze zwischen zwei absorbierenden Medien nehmen, falls diese Medien, wie früher, mit (0) und (1) bezeichnet werden, und die einfallende Welle parallel der Y-Axe konstante Amplitude und konstante Phase besitzt, nach S. 711 in der zumeist in diesem Kapitel benutzten komplexen Form die Gestalt an

$$
174)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{u}} = \overline{\mathfrak{u}}_{,}, \quad \overline{\mathfrak{v}} = \overline{\mathfrak{v}}_{,}, \quad \overline{\mathfrak{w}} = \overline{\mathfrak{w}}_{,}, \\ \left[\mathfrak{a}_{11} \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{v}}}{\partial z} + \mathfrak{a}_{12} \left(\dfrac{\partial \overline{\mathfrak{w}}}{\partial x} - \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{u}}}{\partial z}\right) - \mathfrak{a}_{13} \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{v}}}{\partial x}\right] \\ = \left[\mathfrak{a}_{11} \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{v}}}{\partial z} + \mathfrak{a}_{12} \left(\dfrac{\partial \overline{\mathfrak{w}}}{\partial x} - \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{u}}}{\partial z}\right) - \mathfrak{a}_{13} \dfrac{\partial \overline{\mathfrak{v}}}{\partial x}\right]_{,}. \end{cases}
$$

Um sie der obigen Annahme gemäß zu befriedigen, setzen wir für die einfallenden, wie die gebrochenen und die reflektierten Wellen

$$
174')\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_h = \mathfrak{F}_h \mathfrak{p}_h, \quad \mathfrak{v}_h = \mathfrak{G}_h \mathfrak{p}_h, \quad \mathfrak{w}_h = \mathfrak{H}_h \mathfrak{p}_h, \quad \mathfrak{p}_h = \mathfrak{R}_h e^{i \mathfrak{T}_h}, \\ \mathfrak{F}_h^2 + \mathfrak{G}_h^2 + \mathfrak{H}_h^2 = 1, \quad \mathfrak{T}_h = \dfrac{2\pi}{\tau}\left(t - \dfrac{\mathfrak{a}_h x + \mathfrak{c}_h z}{\omega_h}\right) = \dfrac{2\pi}{\tau}\left(t - \dfrac{\mathfrak{A}_h x + \mathfrak{C}_h z}{\mathfrak{o}_h}\right), \end{cases}
$$

wobei die $\mathfrak{A}_h / \mathfrak{o}_h$ für alle Wellen, die aus derselben einfallenden entspringen, den gleichen Wert haben. Da die Konstanten $\mathfrak{a}_{hk}$ der letzten Grenzbedingung (174) komplex sind, so gilt gleiches von den Verhältnissen der $\mathfrak{R}_h$; die Reflexion und die Brechung an der Grenze

absorbierender Medien ist somit stets mit Phasenänderung verbunden, und einfallendes lineär polarisiertes Licht wird durch sie im allgemeinen elliptisch polarisiert.

Die Einführung der Ansätze (174′) in (174) liefert das System[73])

$$\left.\begin{aligned} &\sum(\mathfrak{K}\mathfrak{F}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{F})_1,\ \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{G}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{G})_1,\ \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{H}) = \sum(\mathfrak{K}\mathfrak{H})_1,\\ &\sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{o}}\Big(\mathfrak{G}\,(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{a}_{12}\,(\mathfrak{F}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\,\mathfrak{A})\Big)\right]\\ = &\sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{o}}\Big(\mathfrak{G}\,(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{a}_{12}\,(\mathfrak{F}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{H}\,\mathfrak{A})\Big)\right]_1, \end{aligned}\right\} \quad 174'')$$

wobei die Summen links sich auf alle im Medium (0), die rechts auf alle im Medium (1) fortschreitenden Wellen beziehen. Bei Einführung des komplexen Azimutes $\mathfrak{d}_h$ und bei Benutzung der Proportionalität zwischen den $\mathfrak{o}_h$ und den $\mathfrak{A}_h$ erhält man die Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\sum(\mathfrak{K}\,\mathfrak{C}\cos\mathfrak{d}) = \sum(\mathfrak{K}\,\mathfrak{C}\cos\mathfrak{d})_1,\\ &\sum(\mathfrak{K}\sin\mathfrak{d}) \quad = \sum(\mathfrak{K}\sin\mathfrak{d})_1,\\ &\sum(\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}\cos\mathfrak{d}) = \sum(\mathfrak{K}\,\mathfrak{A}\cos\mathfrak{d})_1,\\ &\sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}\,(\sin\mathfrak{d}\,(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}) + \mathfrak{a}_{12}\cos\mathfrak{d})\right]\\ = &\sum\left[\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}\,(\sin\mathfrak{d}\,(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}) + \mathfrak{a}_{12}\cos\mathfrak{d})\right]_1, \end{aligned}\right\} \quad 174''')$$

die auch im allgemeinsten Falle die vier komplexen Amplituden $\mathfrak{K}$ der reflektierten und der gebrochenen Wellen zu bestimmen gestatten. —

Wir wenden uns sogleich zu dem wichtigsten Falle, daß das erste Medium **isotrop** und **durchsichtig** und die einfallende Welle **homogen** ist. Indem wir dabei die S. 637 u. f. gemachten Schlußreihen anwenden, gelangen wir ohne weiteres zu dem Formelsystem

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\,\gamma &= \mathfrak{D}_o\,\mathfrak{C}_o\cos\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e\,\mathfrak{C}_e\cos\mathfrak{d}_e,\\ (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\,\alpha &= \mathfrak{D}_o\,\mathfrak{A}_o\cos\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e\,\mathfrak{A}_e\cos\mathfrak{d}_e,\\ (\mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s) \quad &= \mathfrak{D}_o\sin\mathfrak{d}_o + \mathfrak{D}_e\sin\mathfrak{d}_e,\\ a\,(\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\,\frac{\gamma}{\alpha} &= \frac{\mathfrak{D}_o}{\mathfrak{A}_o}\Big[(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C}_o - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}_o)\sin\mathfrak{d}_o + \mathfrak{a}_{12}\cos\mathfrak{d}_o\Big]\\ &\quad + \frac{\mathfrak{D}_e}{\mathfrak{A}_e}\Big[(\mathfrak{a}_{11}\,\mathfrak{C}_e - \mathfrak{a}_{13}\,\mathfrak{A}_e)\sin\mathfrak{d}_e + \mathfrak{a}_{12}\cos\mathfrak{d}_e\Big], \end{aligned}\right\} \quad 174'''')$$

in dem die neu eingeführten Größen die a. a. O. festgesetzte und durch die Bezeichnung hervorgehobene Bedeutung besitzen; a ist die aus den $\mathfrak{a}_{hh}$ durch den Übergang zu einem durchsichtigen isotropen Körper resultierende Konstante.

Über die nächste Verwertung dieser Formeln ist das S. 620

Mitgeteilte maßgebend; doch sind die Verhältnisse dadurch kompliziert, daß auch bei reellen $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_p$ alle $\mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{D}_o$, $\mathfrak{D}_e$ komplex werden, und demzufolge die Anwendung der Resultate noch die Sonderung des Reellen und des Imaginären verlangt. Eine weitere Verfolgung dieses Problemes bietet nur ein spezielles Interesse; die dargestellten Erscheinungen sind auch nicht so wesentlich von den bei isotropen Medien wahrnehmbaren verschieden, daß das nähere Eingehen sich lohnte.

Indessen ist zu erwähnen, daß, abweichend von den analogen Vorgängen bei durchsichtigen Krystallen, die Erscheinungen der Reflexion hier ein wesentliches *praktisches* Interesse stets dann erhalten, wenn die Absorption so stark ist, daß eine Bestimmung der optischen Konstanten der Krystalle durch die Beobachtung des *durchgehenden* Lichtes schwierig oder unmöglich wird. Daß das Verhalten des reflektierten Lichtes sowohl von den Polarisations-, als von den Absorptionskonstanten des Krystalles abhängt, geht schon aus den obigen Grenzbedingungen hervor und wird weiter unten bei dem durchgeführten Beispiel *isotroper* absorbierender Körper noch deutlicher werden; in der That gestattet seine Beobachtung auch bei Krystallen die Bestimmung sämtlicher Konstanten.[74]) —

Das Problem des Überganges ebener Wellen zwischen zwei *isotropen* Medien wollen wir zunächst allgemein in Angriff nehmen, also *beide* Körper als absorbierend voraussetzen. Wir erhalten dann aus (174‴), indem wir beide Medien in der S. 618 u. f. erörterten Weise als Grenzfälle einaxiger Krystalle behandeln, deren optische Axen in das Einfallslot fallen, und indem wir demgemäß das Azimut $\mathfrak{d}$ für alle Wellen reell und entweder gleich 0 oder gleich $\frac{1}{2}\pi$ annehmen, das System

$$175)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{E}_p - \mathfrak{R}_p)\,\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_p\,\mathfrak{C}_,, & (\mathfrak{E}_p + \mathfrak{R}_p)\,\mathfrak{A} \;= \mathfrak{D}_p\,\mathfrak{A}_,, \\ \mathfrak{E}_s + \mathfrak{R}_s \quad = \mathfrak{D}_s \quad, & (\mathfrak{E}_s - \mathfrak{R}_s)\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_s\,\mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,, \end{cases}$$

wobei die Sinus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_,$ der komplexen Einfalls- und Brechungswinkel durch das Brechungsgesetz $\mathfrak{A}^2/\mathfrak{a} = \mathfrak{A}_,^2/\mathfrak{a}$, miteinander in Verbindung stehen. Die Auflösung dieser Gleichungen liefert

$$175')\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_p = \mathfrak{E}_p\,\dfrac{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s\,\dfrac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}, \\ \mathfrak{D}_p = \mathfrak{E}_p\,\dfrac{2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_,}, & \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s\,\dfrac{2\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{A}_,\mathfrak{C}_,}; \end{cases}$$

was *formal* mit dem System (95′) für die Reflexion nicht homogener Wellen an der Zwischengrenze zweier durchsichtiger isotroper Körper übereinstimmt, sich aber von ihm *wesentlich* dadurch unterscheidet,

daß das frühere Brechungsgesetz reelle, das jetzige aber komplexe Parameter enthält.

Indem man $\mathfrak{A} = \sin \mathfrak{f}$, $\mathfrak{C} = \cos \mathfrak{f}$, $\mathfrak{A}_, = \sin \mathfrak{f}_,$, $\mathfrak{C}_, = \cos \mathfrak{f}_,$ setzt, erhält man auch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_p &= -\,\mathfrak{E}_p \frac{\sin(\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_,)}{\sin(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}_,)}, \quad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s \frac{\operatorname{tg}(\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_,)}{\operatorname{tg}(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}_,)}, \\ \mathfrak{D}_p &= \quad \mathfrak{E}_p \frac{\sin 2\mathfrak{f}}{\sin(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}_,)}, \quad \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s \frac{\sin 2\mathfrak{f}}{\sin(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}_,)\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_,)}. \end{aligned}\right\} \quad 175'')$$

Ist das erste Medium durchsichtig, so ist $\mathfrak{a}$ mit a, $\mathfrak{A}$ mit α, $\mathfrak{C}$ mit γ, $\mathfrak{f}$ mit φ zu vertauschen, und es gilt

$$\mathfrak{A}_, = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\,\alpha, \quad \mathfrak{C}_, = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{a}_,}{a}\,\alpha^2}.$$

Die Resultate (175′) nehmen dann die Form an

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{\gamma\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}} - \sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}{\gamma\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}} + \sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}, \quad \mathfrak{R}_s = \mathfrak{E}_s \frac{\gamma - \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}{\gamma + \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}, \\ \mathfrak{D}_p &= \mathfrak{E}_p \frac{2\gamma}{\gamma\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}} + \sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}, \quad \mathfrak{D}_s = \mathfrak{E}_s \frac{2\gamma}{\gamma + \sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\sqrt{1-\frac{\mathfrak{a}_,}{a}\alpha^2}}. \end{aligned}\right\} \quad 175''')$$

Von diesen Ausdrücken besitzen das bei weitem größte praktische Interesse die auf die reflektierte Welle bezüglichen, und wir beschränken uns weiterhin auf deren alleinige Betrachtung.

Setzen wir

$$\frac{\mathfrak{R}_p}{\mathfrak{E}_p} = \operatorname{tg}\vartheta_p\, e^{i d_p}, \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{E}_s} = \operatorname{tg}\vartheta_s\, e^{i d_s}, \quad \frac{\mathfrak{R}_s}{\mathfrak{R}_p} = \operatorname{tg}\vartheta_r\, e^{i d_r}, \qquad 176)$$

so bezeichnet in jeder Formel das betreffende d die Beschleunigung der Welle, deren Amplitude links im Zähler steht, gegen die, deren Amplitude sich im Nenner findet; $\operatorname{tg}\vartheta$ bezeichnet zunächst das Verhältnis der reellen Amplituden, welche den links stehenden komplexen entsprechen, und die ϑ sind im allgemeinen nur Hilfsgrößen; jedoch hat ϑ_r noch die bestimmte und praktisch wichtige Bedeutung des Azimutes, welches der durch Kompensation der Beschleunigung d_r hergestellten lineären Polarisation der reflektierten Welle zugehört. d_r und $\operatorname{tg}\vartheta_r$ bestimmen nach den Formeln (20″) den Polarisationszustand der reflektierten Welle vollständig; die Verhältnisse werden am einfachsten, wenn $\mathfrak{E}_s/\mathfrak{E}_p = 1$, das einfallende Licht also nach dem Azimut $\frac{1}{4}\pi$ lineär polarisiert ist, und wir wollen diesen Fall weiterhin realisiert annehmen.

Die Berechnung der ϑ und d aus den Werten (175‴) für $\mathfrak{R}_p/\mathfrak{E}_p, \dots$ geschieht vorteilhaft durch Vermittelung dreier Paare von Hilfsgrößen P und Q, die dadurch definiert sind, daß

176′) $$\frac{1 + \operatorname{tg}\vartheta\, e^{id}}{1 - \operatorname{tg}\vartheta\, e^{id}} = \frac{e^{iQ}}{\operatorname{tg} P}$$

gesetzt wird; da diese Formel mit

176″) $$\frac{\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta \sin d}{1 - \sin 2\vartheta \cos d} = \frac{\cos Q + i \sin Q}{\operatorname{tg} P}$$

identisch ist, so ergiebt sich einerseits

176‴) $$\operatorname{tg} Q = \sin d \operatorname{tg} 2\vartheta, \quad \cos 2P = \cos d \sin 2\vartheta,$$

andererseits

176⁗) $$\operatorname{tg} d = \sin Q \operatorname{tg} 2P, \quad \cos 2\vartheta = \cos Q \sin 2P.$$

Die Werte (175‴) führen nun sogleich auf folgende relativ einfache Beziehungen

177) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{e^{iQ_p}}{\operatorname{tg} P_p} = \frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{a}_,}{a}\sin^2\varphi}}, \quad \frac{e^{iQ_s}}{\operatorname{tg} P_s} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{a}_,}{a}\sin^2\varphi}}, \\ &\frac{e^{iQ_r}}{\operatorname{tg} P_r} = \frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_,}{a}}\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{a}_,}{a}\sin^2\varphi}}, \end{aligned}\right.$$

aus denen die P und Q sich streng berechnen lassen. —

Wir betrachten nur zwei wichtige Spezialfälle, in denen eine angenäherte und einfache Bestimmung von P und Q möglich ist, und die zugleich die bei weitem wichtigsten von der Natur gebotenen Vorkommnisse umfassen.

Zunächst nehmen wir an, daß die Absorption gering genug sei, um $\varkappa_,^2$ resp. $(a_,'/a_,)^2$ neben Eins vernachlässigen zu können. Man erhält dann aus den Formeln (177) für die Q je eine Größe erster Ordnung, für die P aber je denselben Wert, wie bei verschwindender Absorption. Verbindet man dies mit den Formeln (176⁗), so ergiebt sich auch d von erster Ordnung, solange $\operatorname{tg} 2P$ endlich ist, dagegen ϑ von gleicher Größe, wie bei verschwindender Absorption; es werden also zwar die Phasen, nicht aber die Amplituden durch die geringe Absorption beeinflußt.

Speziell für Q_r und P_r finden sich die Beziehungen

$$\frac{\cos Q_r}{\operatorname{tg} P_r} = \frac{\sqrt{\frac{a_,}{a}} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - \frac{a_,}{a} \sin^2 \varphi}}, \quad \frac{\sin Q_r}{\operatorname{tg} P_r} = \frac{\frac{a_,'}{a} \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi}{2 \sqrt{\frac{a_,}{a} \left(1 - \frac{a_,}{a} \sin^2 \varphi\right)^3}}, \qquad 177')$$

wobei $a/a_, = \sin^2 \varphi / \sin^2 \varphi_,$, also $1 - (a_,/a) \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi_,$ ist, unter $\varphi_,$ den φ zugehörigen Brechungswinkel verstanden. Da $\cos Q_r$ nur um eine Größe zweiter Ordnung von Eins verschieden ist, so gilt auch

$$\operatorname{tg} P_r = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_, \operatorname{tg} \varphi}, \quad \sin Q_r = \frac{a_,'}{2 a_, \cos^2 \varphi_,},$$

und hieraus folgt schließlich

$$\operatorname{tg} d_r = -\frac{a_,' \sin 2\varphi \operatorname{tg} \varphi_,}{2 a_, \cos(\varphi + \varphi_,) \cos(\varphi - \varphi_,)}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_r = -\frac{\cos(\varphi + \varphi_,)}{\cos(\varphi - \varphi_,)}. \qquad 177'')$$

Die relative Verzögerung $-d_r$ der beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene, die bei kleinen Einfallswinkeln von erster Ordnung ist, steigt also in der Nähe des Polarisationswinkels φ', für den $\varphi' + \varphi_,' = \frac{1}{2}\pi$ ist, schnell an, erreicht bei dem Polarisationswinkel den Betrag $\frac{1}{2}\pi$ und nähert sich weiterhin erst schnell, dann allmählich dem Wert π, der streng bei streifendem Einfall stattfindet.

Dies Verhalten erinnert sehr an das im Anfang von § 21 beschriebene, und man möchte daher zunächst geneigt sein, zur Erklärung der dort erwähnten Beobachtungen eine geringe Absorption in den scheinbar durchsichtigen Körpern heranzuziehen. Indessen wird ein solches Verfahren durch die Thatsache unzulässig, daß die zur Darstellung der Reflexionsbeobachtungen a n z u n e h m e n d e Absorption viel größer ausfällt, als sie in Wirklichkeit v o r h a n d e n ist.[75]) —

Diesem ersten Fall, in dem die allgemeinen Gleichungen sich vereinfachen, fügen wir als zweiten den an, der eintritt, wenn $a_,^2 + a_,'^2$ neben a^2 vernachlässigt werden kann, wenn also die in allen Werten (177) auftretende Wurzelgröße

$$1 / \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{a}_,}{a} \sin^2 \varphi} = 1 + \frac{\mathfrak{a}_,}{2a} \sin^2 \varphi \qquad 178)$$

gesetzt werden kann. Die Bedeutung dieser Annahme tritt hervor, wenn man berücksichtigt, daß die komplexe Geschwindigkeit $\mathfrak{o}_,$ einer homogenen Welle im absorbierenden Medium durch $\mathfrak{a}_, = \mathfrak{o}_,^2$, die reelle $\omega_,$ durch $\omega_, = \mathfrak{o}_,(1 - i\varkappa_,)$ gegeben ist, und daß für das durchsichtige Medium gilt $\omega^2 = a$. Bezeichnet man also das B r e c h u n g s v e r h ä l t n i s $\omega/\omega_,$, wie früher, durch n_{10}, wobei zu beachten, daß n_{10} sich durch die B r e c h u n g s i n d i c e s n und $n_,$ der Medien (0) und (1)

gemäß der Formel $n_{10} = n_, / n$ ausdrückt, so ergiebt sich aus der Beziehung $\mathfrak{a}_, / a = \mathfrak{o}_,^2 / \omega^2$

$$\frac{a_,}{a} = \frac{1 - \varkappa_,^2}{n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)^2}, \quad \frac{a_,'}{a} = \frac{2\varkappa_,}{n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)^2},$$

und die oben eingeführte Annahme verlangt, daß Eins neben $n_{10}^4 (1 + \varkappa_,^2)^2$ zu vernachlässigen sei. Es mag bemerkt werden, daß laut der Beobachtung und unter Berücksichtigung der immerhin mäßigen Genauigkeit der Messungen, auf die unsere Formeln Anwendung finden, dieses Verhältnis bei den Körpern von metallischem Aussehen sehr nahezu stattfindet, und zwar bei häufig sehr kleinem n_{10} wesentlich infolge des beträchtlichen Wertes von $\varkappa_,$.

Die Auflösung der Gleichungen (177) unter den vorausgesetzten Vernachlässigungen ergiebt für diesen Fall der sogenannten Metallreflexion die folgenden Gesetze, die wir als bis auf zweite Ordnung genau betrachten wollen[76]):

$$178') \quad \begin{cases} \operatorname{tg} P_p = \frac{n_{10}\sqrt{1 + \varkappa_,^2}}{\cos\varphi}\left(1 - \frac{1 - \varkappa_,^2}{2 n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)^2} \sin^2\varphi\right), \\ \operatorname{tg} Q_p = \varkappa_, \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)}\right); \end{cases}$$

$$178'') \quad \begin{cases} \operatorname{tg} P_s = \frac{1}{n_{10}\cos\varphi\sqrt{1 + \varkappa_,^2}}\left(1 - \frac{1 - \varkappa_,^2}{2 n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)^2} \sin^2\varphi\right), \\ \operatorname{tg} Q_s = -\varkappa_, \left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)}\right); \end{cases}$$

$$178''') \quad \begin{cases} \operatorname{tg} P_r = \frac{n_{10}\sqrt{1 + \varkappa_,^2}}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}\left(1 - \frac{1 - \varkappa_,^2}{2 n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)^2} \sin^2\varphi\right), \\ \operatorname{tg} Q_r = \varkappa_, \left(1 + \frac{\sin^2\varphi}{n_{10}^2 (1 + \varkappa_,^2)}\right). \end{cases}$$

Handelt es sich nur um die Beurteilung des Verlaufes der einzelnen Funktionen, so kann man in den Klammern rechts auch noch je das zweite Glied, als von erster Ordnung, neben dem ersten vernachlässigen und erhält dabei um so strengere Werte, je kleiner der Einfallswinkel φ ist. In diesem Falle werden die Q sämtlich zu Konstanten, nämlich die tg Q resp. gleich $\pm \varkappa_,$, und der Verlauf der Größen d und ϑ läßt sich, als von den P allein abhängig, leicht diskutieren.

Da mit von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsendem Einfallswinkel P_p von einem gewissen positiven und $\frac{1}{4}\pi$ überschreitenden Ausgangswert bis $\frac{1}{2}\pi$ zunimmt, und da $0 < Q_p < \frac{1}{2}\pi$ ist, so geht gleichzeitig d_p von einer positiven und $\frac{1}{2}\pi$ überschreitenden unteren Grenze bis π; aus einem

ähnlichen Grunde folgt, daß zugleich d_s von einem negativen und über $-\frac{1}{2}\pi$ liegenden Ausgangswert bis $-\pi$ fällt. P_r geht von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0, gleichzeitig also d_r von π bis 0.

Daß die Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene sich bei normalem Einfall anscheinend nicht gleich verhalten, hängt ersichtlich ebenso mit dem Sinne zusammen, in welchem ihre Amplituden positiv gerechnet werden, wie die S. 627 besprochene scheinbare Drehung lineär polarisierten Lichtes bei normaler Reflexion. Da eine Umkehrung der Richtung eines Schwingungsvektors mit einer Änderung seiner Phase um π äquivalent ist, so muß, wenn man bei normalem Einfall die beiden Komponenten in gleichem Sinne rechnet, d_s mit $\pi + d_s$ vertauscht werden; dann ergiebt sich in der That auch die gleiche Verzögerung.

Den Einfallswinkel $\varphi = \varphi'$, bei dem d_r den Wert $\frac{1}{2}\pi$ passiert, nennt man den Haupteinfallswinkel; nach der zweiten Formel (176‴) ist für ihn $2P_r = \frac{1}{2}\pi$, also $\operatorname{tg} P_r = 1$. Man erhält hiernach in erster Näherung aus (178‴)

$$\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi' = n_{10}\sqrt{1+\varkappa_{,}^2},$$

somit $\cos^2\varphi'$ als von erster Ordnung, und unter Benutzung dieses Resultates in zweiter Näherung

$$\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi' = n_{10}\sqrt{1+\varkappa_{,}^2}\left(1-\frac{1-\varkappa_{,}^2}{2n_{10}^2(1+\varkappa_{,}^2)^2}\right). \qquad 179)$$

Das dem speziellen Wert $\varphi = \varphi'$ entsprechende Hauptazimut ϑ_r' folgt aus der zweiten Formel (176⁗), wenn in ihr $\sin 2P$ mit Eins vertauscht wird, gleich $\frac{1}{2}Q_r$; somit gilt nach (178″) in zweiter Annäherung

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_r' = \varkappa_{,}\left(1+\frac{1}{n_{10}^2(1+\varkappa_{,}^2)}\right). \qquad 179')$$

Die Werte φ' und ϑ' können bei Beschränkung auf die erste Annäherung in den Formeln (178‴) statt n_{10} und $\varkappa_{,}$ eingeführt werden; man erhält nämlich sofort

$$\operatorname{tg} P_r = \frac{\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi'}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}, \quad Q_r = 2\vartheta_r',$$

und wenn man diese Resultate in (176⁗) einsetzt, ergeben sich die folgenden bequemen Näherungsformeln für d_r und ϑ_r[77])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} d_r &= \sin 2\vartheta_r' \operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi'}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}\right), \\ \cos 2\vartheta_r &= \cos 2\vartheta_r' \sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi' \operatorname{tg}\varphi'}{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \qquad 179'')$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt direkt, daß ϑ_r' der Minimalwert von ϑ_r ist; der Umstand, daß derselbe unter dem Haupteinfallswinkel φ' eintritt, bei dem gleichzeitig die relative Beschleunigung $d_r = \frac{1}{2}\pi$ ist, stellt diesen Winkel in eine auffallende Parallele zu dem bei durchsichtigen Medien eingeführten Polarisationswinkel φ'; er geht in der That bei verschwindender Absorption in jenen über.

Will man für einen beliebigen Einfallswinkel direkt die $\operatorname{tg}\vartheta$ berechnen, welche nach S. 741 eine wichtige physikalische Bedeutung haben, so ist zu benutzen, daß nach (176''')

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 P - 2\operatorname{tg} P\cos Q}{1 + \operatorname{tg}^2 P + 2\operatorname{tg} P\cos Q}$$

wird, und in erster Annäherung für alle Q gilt

$$\cos Q = \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa_{,}^2}}.$$

Man erhält hiernach leicht

$$179''')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{R_p^2}{E_p^2} &= \operatorname{tg}^2\vartheta_p = \frac{\cos^2\varphi + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) - 2n_{10}\cos\varphi}{\cos^2\varphi + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) + 2n_{10}\cos\varphi},\\ \frac{R_s^2}{E_s^2} &= \operatorname{tg}^2\vartheta_s = \frac{1 + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2)\cos^2\varphi - 2n_{10}\cos\varphi}{1 + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2)\cos^2\varphi + 2n_{10}\cos\varphi},\\ \frac{R_s^2}{R_p^2} &= \operatorname{tg}^2\vartheta_r = \frac{E_s^2}{E_p^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\varphi + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) - 2n_{10}\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi}{\sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\varphi + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) + 2n_{10}\sin\varphi\operatorname{tg}\varphi}; \end{aligned}\right.$$

diese Formeln geben die absoluten und die relativen Schwächungsverhältnisse bei der Metallreflexion an; die letzte zeigt insbesondere, daß die Komponente senkrecht zur Einfallsebene eine stärkere Schwächung erfährt, als die parallel dazu. Für normalen Einfall gilt streng

$$179'''')\quad \frac{R^2}{E^2} = \frac{1 + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) - 2n_{10}}{1 + n_{10}^2(1 + \varkappa_{,}^2) + 2n_{10}} = \frac{n^2 + n_{,}^2(1 + \varkappa_{,}^2) - 2nn_{,}}{n^2 + n_{,}^2(1 + \varkappa_{,}^2) + 2nn_{,}},$$

und diese, der Kombination der beiden Medien individuelle Konstante wird ihr Reflexionsvermögen genannt.

Was die Bestimmung der Parameter n_{10}, resp. $n_{,}$, und $\varkappa$, aus den Beobachtungen über d_r und ϑ_r, resp. über P_r und Q_r, angeht, so geschieht dieselbe auf Grund der Formeln (178''') am besten durch successive Annäherung.[78]) Es möge erwähnt werden, daß sich so für einige Metalle Brechungsindices $n_{,}$, d. h. Brechungsverhältnisse n_{10} gegen den leeren oder den Luftraum ergeben, die erheblich kleiner als Eins sind; dieses unerwartete Resultat, das die Lichtgeschwindigkeit in ihnen größer, als die im leeren Raume stattfindende, erweist, ist durch Prismenbeobachtungen nach der S. 738 angedeu-

teten Methode vollständig bestätigt worden.[79]) Die Konstante $\varkappa_,$ variiert für verschiedene Metalle zwischen 1,5 und 20, das für den Absorptionsmodul $v_,$ maßgebende Produkt $n_, \varkappa_,$ von 2,5 bis 5,5. —

An diese Betrachtung über die Reflexion und Brechung an einer ebenen Grenze zwischen zwei absorbierenden Medien läßt sich nun leicht die Behandlung von Reflexion und Brechung an einer Lamelle eines absorbierenden Mediums schließen.[80]) Wir beschränken uns darauf, zu bemerken, daß die Formeln, welche im Eingang von § 15 zu dem analogen Problem einer durchsichtigen isotropen Platte abgeleitet wurden, derartig gefaßt sind, daß sie durch bloße Vertauschung der reellen Konstanten $a, a_,, a_{,,}$ für die drei in Betracht kommenden Körper mit komplexen $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_,, \mathfrak{a}_{,,}$ das neue Problem mit umfassen. Speziell bleiben die Fundamentalformeln (102) und (102′) durchaus gültig, und die in den letzteren vorkommenden Abkürzungen $\mathfrak{e}_,$ und $\mathfrak{e}_{,,}$ haben die durch (98″″) angebene Bedeutung.

Von einer Entwickelung dieser komplexen Formeln zum Zweck der Ableitung der Gesetze für bestimmte Erscheinungen in reeller Form muß hier abgesehen werden, da der Gegenstand ein so allgemeines Interesse, wie die Vorgänge bei durchsichtigen Platten, nicht besitzt.

§ 27. Erweiterung der Theorie durch Heranziehung neuer Schwingungsvektoren. Die selektive Absorption und die anomale Dispersion. Der Einfluß der Translation eines Medium auf die Lichtbewegung. Absorbierende aktive Körper.

Die Geschwindigkeiten ω in durchsichtigen und in absorbierenden Medien und die Absorptionsindices $\varkappa$ in letzteren sind zwar durch die in § 7 auseinandergesetzten Überlegungen a's Funktionen der Periode, und somit der Farbe des fortgepflanzten Lichtes erhalten, die eine große Allgemeinheit besitzen; trotzdem scheint es aber nicht möglich, durch sie die speziellen und merkwürdigen Erscheinungen darzustellen, welche Körper mit sogenannter selektiver Absorption zeigen, d. h. Körper, die nur Licht von einer oder mehreren eng begrenzten Perioden, dieses aber außerordentlich stark absorbieren.

Die in verschiedenen Gebieten der Physik, besonders in der Lehre von der elektrischen Induktion, betrachteten Erscheinungen der Resonanz, bei denen aus einem Gemisch von Schwingungen verschiedener Perioden die allein in merklicher Weise verschwinden, deren Periode mit derjenigen der Eigenschwingungen eines von ihnen getroffenen und gedämpfter Schwingungen fähigen Systems übereinstimmen, legen die Vermutung nahe, daß jene selektive Absorption

auf einen analogen Vorgang zurückgeführt werden könne. In der That gelangt man zu mit der Erfahrung auffallend verwandten Gesetzen, wenn man neben dem bisherigen Polarisationsvektor p, — mit dem der Hilfsvektor d in rein geometrischem Zusammenhang stand —, noch weitere Vektoren P_h einführt, die Eigenschwingungen ausführen können, und sie mit p in eine solche Wechselwirkung setzt, daß eine Schwingung von p erzwungene Schwingungen der P_h zur Folge hat.

Beziehungen, die dieses leisten, sind in mannigfacher Art aufzustellen möglich[81]); bei der Auswahl kann man sich von speziellen Vorstellungen über den Mechanismus des Vorganges leiten lassen, z. B. an die S. 465 erörterten elektromagnetischen Resonatoren anknüpfen; entscheidend wird aber immer nur die Übereinstimmung der Resultate mit den Beobachtungen sein. In Bezug hierauf ist besonders in Betracht zu ziehen, daß die Hauptgleichungen auch nach der Erweiterung bei Anwendung auf periodische Schwingungen die früher erhaltene und durch die Beobachtungen so genau bestätigte Form bewahren müssen, und daß nur die Abhängigkeit ihrer Parameter von der Periode der Schwingung geändert werden darf; nach der benutzten Ableitung der Grenzbedingungen aus den Hauptgleichungen haben dann mit letzteren auch die ersteren die frühere Gestalt.

Da Erscheinungen der Dispersion und der Absorption im leeren Raume nicht auftreten, so kann man die neuen Vektoren P_h als eine Folge der Anwesenheit ponderabler Materie ansehen, und es liegt nahe, in sie die gesamte Wirkung der letzteren auf die Lichtbewegung derart hineinzulegen, daß die Gleichungen sich auf die für den leeren Raum geltenden reduzieren, wenn jene Vektoren verschwinden. Wir wollen demgemäß verfahren, weil sich dabei der Einfluß der neuen Vektoren auf die Gesetze der Erscheinungen am reinsten darstellt. —

Den Ausgangspunkt bildet für uns wiederum die Hamilton'sche Gleichung (25″)

180) $$\int_{t_0}^{t_1} d\,t \int \big(\delta(\varphi - \psi) - \delta'\alpha\big)\, dk = 0,$$

in der nun aber die abhängigen Variabeln nicht nur durch die Komponenten u, v, w des Polarisationsvektors p, sondern auch durch die Komponenten U_h, V_h, W_h der neuen Vektoren P_h dargestellt werden; daneben wollen wir als bequeme Abkürzungen die Komponenten ξ, η, ζ des rein geometrischen Hilfsvektors d führen. Wir beschränken uns auf den Fall eines physikalisch in Bezug auf die Koordinatenebenen symmetrischen Mediums.

Für den leeren Raum war nach S. 561

$$2\psi_0 = u'^2 + v'^2 + w'^2, \quad 2\varphi_0 = v^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \qquad 180')$$

und diese Glieder sind hier als erste Teile von ψ und φ beizubehalten. Die Ergänzungsglieder müssen, um die Superposition verschiedener Wellen zu gestatten, homogene Funktionen zweiten Grades der Vektorkomponenten sein und nach dem Obigen mit den U_h, V_h, W_h verschwinden. Wir können sie, wie früher gezeigt, in beliebiger Weise der potentiellen oder der kinetischen Energie zuordnen und uns dabei nur durch das Streben nach Anschaulichkeit leiten lassen.

Anteile der ψ und φ, die für sich allein genommen Eigenschwingungen der Vektoren P_h ergeben, liefern die Ansätze

$$\left.\begin{aligned} 2\psi_1 &= \sum(U_h'^2 + V_h'^2 + W_h'^2), \\ 2\varphi_1 &= \sum\left(d_h^{(1)} U_h^2 + d_h^{(2)} V_h^2 + d_h^{(3)} W_h^2\right), \end{aligned}\right\} \qquad 180'')$$

wobei die $d_h^{(j)}$ Konstanten bezeichnen, aber von konstanten Faktoren in ψ_1 abgesehen werden kann, da über die Natur der Komponenten U_h, V_h, W_h keinerlei beschränkende Annahmen getroffen sind.

Die Wechselwirkung zwischen den Vektoren P_h und p können wir durch ein von diesen beiden Vektoren abhängiges Glied φ_2 einführen, dessen denkbar einfachste, mit den Grundsätzen von S. 568 vereinbare Form sein wird

$$\varphi_2 = \sum(e_h^{(1)} U_h \xi + e_h^{(2)} V_h \eta + e_h^{(3)} W_h \zeta). \qquad 180''')$$

Endlich kann die dämpfende Wirkung auf die Vektoren P_h in einfachster Weise durch den Ansatz

$$-\delta' \alpha = \sum(f_h^{(1)} U_h' \delta U_h + f_h^{(2)} V_h' \delta V_h + f_h^{(3)} W_h' \delta W_h) \qquad 180'''')$$

ausgedrückt werden; $e_h^{(j)}$ und $f_h^{(j)}$ sind dabei wiederum Konstanten.

Diese Ausdrücke führen bei Einsetzung in die Hamilton'sche Gleichung (180) zu den folgenden Formeln

$$u'' = \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad v'' = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial \Xi}{\partial x}, \quad w'' = \frac{\partial \Xi}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad 181)$$

wobei

$$\Xi = v^2\xi + \Sigma e_h^{(1)} U_h, \quad H = v^2\eta + \Sigma e_h^{(2)} V_h, \quad Z = v^2\zeta + \Sigma e_h^{(3)} W_h \qquad 181')$$

ist; außerdem zu

$$\left.\begin{aligned} U_h'' + d_h^{(1)} U_h + f_h^{(1)} U_h' + e_h^{(1)} \xi &= 0, \\ V_h'' + d_h^{(2)} V_h + f_h^{(2)} V_h' + e_h^{(2)} \eta &= 0, \\ W_h'' + d_h^{(3)} W_h + f_h^{(3)} W_h' + e_h^{(3)} \zeta &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 181'')$$

Im Falle periodischer Schwingungen, wo wir uns der komplexen Funktionen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{U}_h$, $\mathfrak{V}_h$, $\mathfrak{W}_h$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bedienen, giebt das letzte Tripel

$$181''')\qquad \mathfrak{U}_h\left(d_h^{(1)} - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 + \frac{2\pi i}{\tau} f_h^{(1)}\right) + e_h^{(1)}\mathfrak{x} = 0, \ldots$$

und es wird bei Einführung der Abkürzung $\tau/2\pi = \vartheta$ nach (181)

$$181'''')\qquad \mathfrak{X} = \left(v^2 - \sum \frac{(e_h^{(1)}\vartheta)^2}{d_h^{(1)}\vartheta^2 - 1 + i f_h^{(1)}\vartheta}\right)\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{x}, \ldots$$

worin $\mathfrak{a}_1$ eine neue Bezeichnung ist. Die Gleichungen (181) nehmen sonach die Gestalt an

$$\mathfrak{u}'' = \mathfrak{a}_2\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \mathfrak{a}_3\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}, \quad \mathfrak{v}'' = \mathfrak{a}_3\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \mathfrak{a}_1\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}, \quad \mathfrak{w}'' = \mathfrak{a}_1\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \mathfrak{a}_2\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x},$$

welche nach S. 732 für absorbierende Krystalle von der vorausgesetzten Symmetrie charakteristisch ist. Ein Unterschied von der früher benutzten liegt nur in der Art der Abhängigkeit zwischen den $\mathfrak{a}_h$ und der Periode τ; im übrigen bleiben alle früher gezogenen Folgerungen ungeändert in Kraft.

Die Konstanten $\mathfrak{a}_j$ bestimmen nach der hier gültigen Formel (169') den Wert der komplexen Geschwindigkeit $\mathfrak{o}$, und hierdurch auch die reelle Geschwindigkeit ω und den Absorptionsindex $\varkappa$; um die Wirkung der erweiterten Theorie auf diese Größen klarzustellen, genügt es, den Fall eines isotropen Mediums zu betrachten, wo alle $\mathfrak{a}_j$ einander gleich sind, und wo gilt

$$182)\qquad \mathfrak{o}^2 = v^2 - \sum \frac{(e_h\vartheta)^2}{d_h\vartheta^2 - 1 + i f_h\vartheta}.$$

Ist nur ein Vektor P vorhanden, so wird noch einfacher, falls man die Konstanten d_h, e_h, f_h durch andere q, ϑ_0, $\vartheta_\prime$ anschaulicher ausdrückt,

$$182')\qquad \mathfrak{o}^2 = v^2\left(1 - \frac{q^2\vartheta^2}{\vartheta^2 - \vartheta_0^2 + i\vartheta\vartheta_\prime}\right).$$

Da $\mathfrak{o} = \omega/(1 - i\varkappa)$ ist, so folgt hieraus:

$$182'')\qquad \begin{cases} \dfrac{\omega^2(1-\varkappa^2)}{(1+\varkappa^2)^2} = v^2\left(1 - \dfrac{q^2\vartheta^2(\vartheta^2 - \vartheta_0^2)}{(\vartheta^2 - \vartheta_0^2)^2 + \vartheta^2\vartheta_\prime^2}\right), \\[2ex] \dfrac{2\omega^2\varkappa}{(1+\varkappa^2)^2} = \dfrac{v^2 q^2\vartheta^3\vartheta_\prime}{(\vartheta^2 - \vartheta_0^2)^2 + \vartheta^2\vartheta_\prime^2}. \end{cases}$$

Ist $\vartheta_\prime$ klein gegen ϑ_0, so nimmt der erste dieser Ausdrücke seine extremen Werte bei $\vartheta^2 = \vartheta_0^2 \pm \vartheta_0\vartheta_\prime$ an, und man übersieht den ganzen Verlauf beider Funktionen aus der folgenden Zusammen-

stellung einander entsprechender Werte, in denen bereits die in Bezug auf $\vartheta_, / \vartheta_0$ quadratischen Glieder beseitigt sind:

$$\begin{array}{llll} \vartheta^2 = 0, & \vartheta_0^2 - \vartheta_0 \vartheta_,, & \vartheta_0^2 + \vartheta_0 \vartheta_,, & \infty, \\ \frac{\omega^2 (1 - \varkappa^2)}{(1 + \varkappa^2)^2} = v^2, & v^2 \left(1 + \frac{q^2 \vartheta_0}{2 \vartheta_,}\right), & v^2 \left(1 - \frac{q^2 \vartheta_0}{2 \vartheta_,}\right), & v^2 (1 - q^2), \\ \frac{2 \omega^2 \varkappa}{(1 + \varkappa^2)^2} = 0, & \frac{v^2 q^2 \vartheta_0}{2 \vartheta_,}, & \frac{v^2 q^2 \vartheta_0}{2 \vartheta_,}, & 0. \end{array}$$

Man erkennt, daß $\omega^2 (1 - \varkappa^2)/(1 + \varkappa^2)^2$ von v^2 aus wächst bis in die Nähe von $\vartheta = \vartheta_0$, dann schnell abfällt und weiter allmählich wieder ansteigt, ohne den Ausgangswert zu erreichen; $2 \omega^2 \varkappa/(1 + \varkappa^2)^2$ ist gleichzeitig sehr klein und erhebt sich nur in der Nähe von $\vartheta = \vartheta_0$ zu einem beträchtlichen Wert. Man wird daher mit Ausnahme dieses Bereiches $\varkappa^2$ neben Eins vernachlässigen können und erhält dann durch das zuerst Gesagte direkt den Verlauf von ω^2 angegeben, woraus auch der von $n^2 = v^2/\omega^2$ folgt.

Die Theorie ergiebt somit bei Benutzung eines einzigen Vektors P eine merkliche Absorption nur in der Umgebung einer ganz bestimmten singulären Periode $\tau_0 = 2\pi \vartheta_0$, und Brechungsindices, die beim Überschreiten dieses Bereiches überaus schnell von kleinen auf große Werte springen. Das erstere entspricht dem im Eingang als selektive Absorption bezeichneten Vorgang, das letztere erklärt die nach der Erfahrung hiermit häufig, vielleicht immer, verbundene Erscheinung der anomalen Dispersion, welche darin besteht, daß ein Prisma aus dem betrachteten Medium kein normales Spektrum liefert, bei welchem rotes Licht am wenigsten, violettes am meisten abgelenkt erscheint, sondern vielmehr eines, bei welchem der Teil des Spektrums, der die Farben von rot bis zu der selektiv absorbierten enthält, im Sinne stärkerer Ablenkung über den Rest hinaus verlegt erscheint. [82])

Es ist leicht zu übersehen, wie die Gesetze sich komplizieren, wenn statt nur eines Vektors P deren mehrere vorhanden sind; ein jeder von ihnen wird eine singuläre Periode τ_h — und somit einen Wert $\vartheta_h = \tau_h / 2\pi$ — bestimmen, in deren Umgebung der Verlauf mit dem oben erörterten übereinstimmt, und der im Spektrum ein Absorptionsstreifen entspricht.

Liegen diese singulären Perioden τ_h sämtlich weit außerhalb des Bereiches der optischen Wahrnehmbarkeit, so kann in der Formel (181'') $\vartheta^2 \vartheta_,^2$ neben $(\vartheta^2 - \vartheta_h^2)^2$ vernachlässigt werden, und man erhält im ganzen sichtbaren Spektrum eine nur unmerkliche Absorption und zugleich

182''') $$\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{1}{n^2} = 1 - \sum \frac{q_h^2 \vartheta^2}{\vartheta^2 - \vartheta_h^2};$$

dieser Ausdruck stellt ein sehr allgemeines Dispersionsgesetz dar und giebt bei anscheinend durchsichtigen Medien die Beobachtungen mit großer Genauigkeit wieder, wenn man von der Summe auch nur ein oder zwei Glieder beibehält.[83]) —

Statt des oben S. 749 eingeführten Ansatzes für die zwischen den Vektoren P_h und p stattfindende Wechselwirkung kann man natürlich auch andere anwenden; unter diesen zeichnet sich einer durch eine eigentümliche Folgerung aus, die er gestattet, und er mag aus diesem Grunde noch angeführt werden. Setzt man

183) $$\varphi_2 = \sum (g_h^{(1)} U_h' u' + g_h^{(2)} V_h' v' + g_h^{(3)} W_h' w'),$$

so treten an Stelle der Gleichungen (181) jetzt die anderen

183') $$U = v^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots$$

wobei bezeichnet

183'') $$U = u'' - \sum g_h^{(1)} U_h'', \ldots$$

und an Stelle von (181'') bei Beschränkung auf durchsichtige Medien

183''') $$U_h'' + d_h^{(1)} U_h - g_h^{(1)} u'' = 0, \ldots .$$

Bei periodischen Schwingungen giebt letzteres

183'''') $$U_h'' (d_h^{(1)} \vartheta^2 - 1) = - g_h^{(1)} u'', \ldots$$

also folgt nach (183')

$$u'' n_1^2 = v^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots$$

wobei

184') $$n_1^2 = 1 + \sum \frac{(g_h^{(1)})^2}{d_h^{(1)} \vartheta^2 - 1}, \ldots;$$

es ist leicht zu zeigen, daß dies System mit dem obigen wesentlich gleichwertig ist, und daß die n_j die Hauptbrechungsindices des Krystalles darstellen.

Bei isotropen Medien sind die n_j einander gleich, und wir haben, indem wir, wie früher, $\omega^2 = v^2/n^2 = a$ setzen,

184'') $$u'' = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots$$

184''') $$n^2 = 1 + \sum \frac{g_h^2}{d_h \vartheta^2 - 1}. —$$

Wir wollen nunmehr annehmen, daß das ponderable Medium, innerhalb dessen die Fortpflanzung der Schwingungen stattfindet,

selbst mit einer Geschwindigkeit Ω in der Richtung s fortschreite. Es wird sich dann, da wir uns die Vektoren P_h an der Materie haftend denken, an der betrachteten Stelle des Raumes jedes der P_h nicht nur deswegen mit der Zeit ändern, weil Schwingungen stattfinden, sondern auch, weil in folgenden Zeitmomenten immer andere ponderable Teile an jene Stelle gelangen, deren P_h im allgemeinen andere Amplituden und Phasen besitzen. Die ganze Änderung von $U_h, \ldots$ wird sonach durch $(U_h' + \Omega\,\partial U_h / \partial s), \ldots$ gegeben sein.[84] Es erscheint plausibel, daß die Wechselwirkung zwischen den P_h und p in dem vorausgesetzten Falle nicht von den partiellen, sondern von den totalen Änderungen der U_h, V_h, W_h abhängt, und daß man somit statt (183) setzen darf

$$\varphi_2 = \sum\left[g_h^{(1)}\left(U_h' + \Omega\frac{\partial U_h}{\partial s}\right)u' + g_h^{(2)}\left(V_h' + \Omega\frac{\partial V_h}{\partial s}\right)v' + g_h^{(3)}\left(W_h' + \Omega\frac{\partial W_h}{\partial s}\right)w'\right]. \tag{185}$$

Wenden wir diesen Ansatz auf den Fall eines durchsichtigen Mediums an, so erhalten wir

$$U = v^2\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots \tag{185'}$$

wobei

$$U = u'' - \sum g_h^{(1)}\left(U_h'' + \Omega\frac{\partial U_h'}{\partial s}\right), \ldots \tag{185''}$$

ist, und außerdem gilt

$$U_h'' + d_h^{(1)} U_h = g_h^{(1)}\left(u'' + \Omega\frac{\partial u'}{\partial s}\right), \ldots \tag{185'''}$$

Bei periodischen Schwingungen in ebenen Wellen giebt dies

$$\left.\begin{aligned} U &= u'' - \sum g_h^{(1)} U_h''\left(1 - \frac{\Omega c}{\omega}\right), \ldots \\ U_h''(d_h^{(1)}\vartheta^2 - 1) &= -g_h^{(1)} u''\left(1 - \frac{\Omega c}{\omega}\right), \ldots \end{aligned}\right\} \tag{185''''}$$

wobei c den Cosinus des Winkels zwischen der Wellennormalen und der Richtung von Ω bezeichnet.

Die Formeln (185'''') unterscheiden sich nur dadurch von (183''''), daß die $g_h^{(j)}$ mit $g_h^{(j)}(1 - \Omega c/\omega)$ vertauscht sind; es werden sonach auch die aus letzteren folgenden (184), ... in Geltung bleiben, wenn man diese Vertauschung vornimmt, d. h. die Ausdrücke $n_j^2 - 1$ mit dem Faktor $(1 - \Omega c/\omega)$ multipliziert.

Dies Resultat wollen wir für isotrope Medien noch auf eine andere Form bringen. Wir können nämlich nach (185') und (185''') bei Rücksicht auf (184''') und auf die Kleinheit von Ω/ω schreiben

$$u''\left(1 - \frac{2\,\Omega\,c}{\omega}\,\frac{(n^2-1)}{n^2}\right) = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots; \tag{186}$$

weiter ist aber $u''c/\omega = -\partial u'/\partial s$, und wir erhalten somit

186′) $$u'' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) - 2a'\frac{\partial u'}{\partial s}, \ldots$$

wobei

186″) $$a' = \Omega\frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Vergleichen wir diese Formeln mit (122) und (122‴), so erkennen wir, daß der hier eingeschlagene Weg zu denselben Differentialgleichungen führt, die wir auf S. 677 zur Erklärung der Vorgänge in bewegten Medien angesetzt hatten, überdies aber den damals willkürlich gelassenen Parameter a' ebenso bestimmt, wie dies der Beobachtung entspricht. —

Wie oben für durchsichtige und für absorbierende inaktive Krystalle gezeigt, so ist es auch möglich, für die Lichtbewegung in magnetisch und in natürlich aktiven Körpern auf der oben benutzten Grundlage die Differentialgleichungen zu erhalten, nämlich, da der leere Raum keine Aktivität zeigt, deren Zustandekommen allein durch geeignete neue Vektoren P_h zu bewirken, die mit dem Polarisationsvektor p in Wechselwirkung gesetzt werden.

Wir haben früher diesen Weg nicht eingeschlagen, weil bei dem Problem der aktiven Körper dieselben Willkürlichkeiten auftreten, die bei Aufstellung der Gleichungen für die selektiv absorbierenden erwähnt worden sind, und weil der Unterschied der Resultate von den früher in ziemlieh zwingender Weise erhaltenen allein in dem Gesetz liegen kann, welches die Parameter der Differentialgleichungen für einfarbiges Licht mit der Periode τ verbindet. Da hier Widersprüche zwischen den früheren Resultaten und der Beobachtung nicht wahrgenommen sind, so würde der neue Weg dem oben benutzten gegenüber erst dann gewichtige Vorteile bieten, wenn über das Wesen der verschiedenen Schwingungsvektoren und über den Mechanismus ihrer Wechselwirkung wohlbegründete und der Theorie zugängliche Vorstellungen gewonnen wären. Anders natürlich, wo, wie im Falle der selektiven Absorption, die früheren Grundlagen zu spezielle Gesetze liefern, um alle Beobachtungen zu erklären. In dieser Richtung ist noch zu erwähnen, daß die Gesetze der Reflexion an den Oberflächen der stark magnetisierbaren Metalle, wenn sich dieselben in einem Magnetfelde befinden, durch Einfügung der Glieder, welche geeignet schienen, die magnetische Aktivität durchsichtiger Körper zu erklären, in die Gleichungen (149) für absorbierende Medien nicht im Einklang mit der Beobachtung zu gewinnen sind.[85])

Ob schon die Hauptgleichungen nicht der Erfahrung entsprechen, hat die Beobachtung direkt zu entscheiden nicht vermocht; letztere zeigt vielmehr bei Benutzung dünner Metallschichten die Erscheinungen der Drehung der Polarisationsebene durchgehenden Lichtes ganz in der S. 696 u. f. erörterten Weise. Sie hat auch festgestellt, daß die Drehung, und somit der für diese maßgebende Parameter, nicht der magnetischen Feldstärke, sondern dem durch sie bewirkten lokalen Moment proportional ist, und wir haben darauf im Voraus Bezug genommen, indem wir S. 572 und 619 den für die magnetische Aktivität maßgebenden Vektor mit dem lokalen Moment proportional und in naturgemäßer Folge hiervon der lokalen magnetischen Axe parallel annahmen.

Da aber die Grenzbedingungen bisher stets aus den Hauptgleichungen gewonnen sind, und da nicht einzusehen ist, warum dieser Weg in dem speziellen vorliegenden Problem aufhören sollte, gangbar zu sein, so spricht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Korrektur schon an den Hauptgleichungen anzubringen ist. Bei der hier vorliegenden Unbestimmtheit des Problems genüge es, zu bemerken, daß, ohne die Grundlagen zu verlassen, auf denen hier gebaut ist, eine Verallgemeinerung der Formeln dadurch gewonnen werden kann, daß die bei der allgemeinen Betrachtung des § 7 zunächst ausgeschlossenen beiden Ansätze (27‴) und (34′) herangezogen werden. Da durch sie eine ganze Zahl neuer Konstanten in die Theorie eingeführt wird, so scheint es höchst wahrscheinlich, daß eine solche Ergänzung zu einer Übereinstimmung mit der Beobachtung führen würde. Die bezügliche Untersuchung ist bisher noch nicht durchgeführt.

IV. Kapitel.

Allgemeinere Schwingungsvorgänge, insbesondere in durchsichtigen isotropen Medien.

§ 28. Theorie des leuchtenden Punktes; der spezielle Fall der Rotation und derjenige der geradlinigen Oscillation. Zusammenwirken mehrerer diskreter leuchtender Punkte. Sogenannte einfache Interferenzerscheinungen.

Gegenüber der großen Anzahl von beobachtbaren Erscheinungen, die auf der Fortpflanzung, der Reflexion und der Brechung ebener Wellen beruhen, überrascht zunächst die geringe Mannigfaltigkeit derjenigen, die sich faktisch auf Schwingungsvorgänge allgemeinerer Art gründen. Ihre relative Seltenheit beruht zum nicht geringen Teile darauf, daß, wie sich zeigen läßt, wegen der außerordentlichen Kleinheit der Wellenlänge die beobachtbaren Teile anders gestalteter Wellenflächen stets sehr nahe dasselbe Schwingungsgesetz befolgen, wie Teile ebener Wellen, wenn ihre Krümmungsradien auch nur wenige Millimeter betragen. So konnten beispielsweise die Gesetze der Interferenzerscheinungen, welche Platten aus krystallinischer Substanz im konvergenten Lichte, also bei einfallenden Kugelwellen zeigen, in großer Annäherung auf Grund allein der über die Fortpflanzung ebener Wellen gefundenen Resultate abgeleitet werden.

Daher haben denn auch die genauen Gesetze für die Ausbreitung von Kugelwellen in einem isotropen Körper keineswegs die Tragweite, die man von vornherein vermuten möchte. Immerhin spielen sie bei einer wichtigen Klasse von optischen Phänomenen eine Rolle und stehen außerdem in einer direkten Beziehung zu der Theorie der Lichtquellen, die wir als leuchtende Punkte bezeichnet und im Eingang dieses Teiles vorausgesetzt haben; deshalb scheint ihre Behandlung gerechtfertigt, und dies umsomehr, als sie Gelegenheit giebt, eine andere Methode der Darstellung, als früher in ähnlichen Fällen benutzt ist, zur Anwendung zu bringen.

Als **leuchtend** werden wir vom Standpunkt der Theorie aus einen Teil k des von Schwingungen durchzogenen Raumes dann bezeichnen, wenn durch seine Oberfläche eine Energieausströmung mit positiver Gesamtsumme stattfindet; als **leuchtenden Punkt** bezeichnen wir ihn insbesondere dann, wenn er bei unendlich kleinem Volumen in der Zeiteinheit einen endlichen Energiebetrag aussendet.

Damit letzteres möglich sei, muß in ihm der Schwingungsvektor unendlich groß werden, und wir werden ihn daher nicht direkt in Betracht ziehen können, sondern durch eine kleine geschlossene Fläche — etwa eine Kugel von dem sehr kleinen Radius R — umgrenzen müssen, an der der Schwingungsvektor so vorgeschrieben ist, daß er mit verschwindender Größe des umschlossenen Raumes selbst unendlich wird.

Da jede auf der Kugelfläche stetig vorgeschriebene Verteilung von Werten der Polarisationsvektoren p oder d mit abnehmender Größe der Kugelfläche nur dann stetig bleibt, wenn sie sich auf ein dort konstantes p oder konstantes d reduziert, so können wir von Anfang an die eine oder die andere dieser Größen auf der Kugel vom Radius R konstant vorgeschrieben denken. Fassen wir p als die mechanische Verrückung eines Punktes des Mediums auf, so sind hiermit die beiden Fälle der geradlinigen und der rotierenden Oscillation der starr gedachten Kugel eingeführt, aus denen sich alle anderen Bewegungen derselben zusammensetzen lassen. [86])

Wir betrachten ein unendliches homogenes, isotropes und durchsichtiges Medium, für das also gilt

$$u'' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots, \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots, \tag{187}$$

und legen den Koordinatenanfang in den leuchtenden Punkt.

Zur Behandlung der von ihm ausgehenden Schwingungen setzen wir

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{187'}$$

und genügen dadurch den Hauptgleichungen für isotrope Medien, wenn

$$\Delta T = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta U, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta V, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta W, \tag{187''}$$

und $\omega^2 = a$, d. h. gleich der optischen Konstante des Mediums ist. —

Um zunächst eine beliebige **rotierende** Bewegung im leuchtenden **Punkt** zu erhalten, setzen wir

188) $$T = 0, \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = \frac{1}{r} K(r - \omega t),$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Entfernung von dem Koordinatenanfang bezeichnet. Es wird dann

$$u = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{y}{r}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial r} \frac{x}{r}, \quad w = 0,$$

der Vektor p führt also überall eine Drehung vom Betrage $\partial W / r \partial r$ um die Z-Axe aus; soll dies an der Oberfläche der oben vorausgesetzten Kugel nach dem Gesetz

188') $$\frac{1}{R} \overline{\frac{\partial W}{\partial r}} = k(t)$$

geschehen, so muss, da $\omega \partial K / \partial r = - \partial K / \partial t$ ist, daselbst gelten

188'') $$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \frac{\omega}{R} \overline{K} = - \omega R^2 k(t).$$

Hieraus folgt bei geeigneter Bestimmung der Integrationskonstanten

188''') $$\overline{K} = K(R - \omega t) = - \omega R^2 e^{-\frac{\omega t}{R}} \int_{t_0}^{t} e^{\frac{\omega \vartheta}{R}} k(\vartheta)\, d\vartheta,$$

also

188'''') $$W = - \frac{\omega R^2}{r} e^{-\frac{R - r + \omega t}{R}} \int_{t_0}^{t + \frac{R - r}{\omega}} e^{\frac{\omega \vartheta}{R}} k(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Verschwindet $k(t)$ für $t \leqq t_0$, so ist für $t = t_0$ und $r > R$ hiernach W und $\partial W / \partial t$ gleich Null; die Lösung setzt also voraus, daß zur Zeit $t = t_0$ im ganzen äußeren Raume Ruhe und Gleichgewicht herrscht, und giebt die Wirkung der dann beginnenden Vibration in der Kugel.

Läßt man den Zeitpunkt t_0 nach $-\infty$ rücken und die Rotation an der Kugel seitdem periodisch stattfinden, etwa nach dem Gesetz

189) $$k(t) = \frac{\lambda a}{2 \pi R^2} \sin \frac{2 \pi t}{\tau},$$

worin $\lambda = \omega \tau$ die Wellenlänge ebener Wellen von der Periode τ bezeichnet, so ist auch im ganzen äußeren Raume die Bewegung periodisch, und man erhält direkt aus (188''), indem man

189') $$\overline{K} = A' \sin \frac{2 \pi t}{\tau} + A'' \cos \frac{2 \pi t}{\tau}$$

setzt:

$$A' = -\frac{a R \lambda^3}{2\pi(4\pi^2 R^2 + \lambda^2)}, \quad A'' = +\frac{a R^2 2\pi \lambda^2}{2\pi(4\pi^2 R^2 + \lambda^2)}; \qquad 189'')$$

ist R auch gegen λ sehr klein, so überwiegt in K das erste Glied weit das zweite, und es wird

$$A' = -\frac{a \lambda R}{2\pi}, \quad W = -\frac{a \lambda R}{2\pi r} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right). \qquad 189''')$$

Für Entfernungen r, die groß gegen λ sind, ergiebt dies

$$u = +\frac{a y R}{r^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \quad v = -\frac{a x R}{r^2} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \qquad 189'''')$$

und somit bis auf die Amplitude, deren Veränderlichkeit in Praxi wenig in Betracht kommt, dasselbe Gesetz, wie es einer parallel mit r fortschreitenden, lineär polarisierten, ebenen Welle entspricht. —

Zu einer geradlinigen Oscillation im leuchtenden Punkt gelangt man durch den Ansatz

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\partial P}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad W = 0, \quad T = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ P &= \frac{1}{r} G(r - \omega t), \qquad Q = \frac{H(t)}{r}. \end{aligned}\right\} \qquad 190)$$

Hier ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial x \partial z} = \frac{x z}{r^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{3}{r^3} H\right), \\ v &= \frac{\partial^2 (P+Q)}{\partial y \partial z} = \frac{y z}{r^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{3}{r^3} H\right), \\ w &= \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \\ &= \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{3}{r^3} H\right) - \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^3} H\right); \end{aligned}\right\} \qquad 190')$$

soll für $r = R$ nun $u = 0$, $v = 0$, $w = g(t)$ sein, wie dies einer Oscillation parallel der Z-Axe entspricht, so muß gelten

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}} - \frac{1}{R}\overline{\frac{\partial P}{\partial r}} + \frac{3}{R^3} H &= 0, \\ \overline{\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}} + \frac{1}{R}\overline{\frac{\partial P}{\partial r}} + \frac{1}{R^3} H &= -g(t). \end{aligned}\right\} \qquad 190'')$$

Hieraus folgt

$$2\,\overline{\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}} + \frac{4}{R}\overline{\frac{\partial P}{\partial r}} = -3 g(t),$$

oder auch nach Einsetzen des Wertes von P und bei Berücksichtigung der Beziehung $\omega^2 \partial^2 G / \partial r^2 = \partial^2 G / \partial t^2$

$$\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} = -\frac{3}{2}\omega^2 R\, g(t), \qquad 190''')$$

außerdem

190'''') $$3\overline{G} + 3\frac{R}{\omega}\frac{\partial \overline{G}}{\partial t} + \frac{R^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \overline{G}}{\partial t^2} + 3H = 0.$$

Die Integration ergiebt bei geeigneter Bestimmung der Konstanten

191) $$\overline{G} = G(R - \omega t) = -\frac{3}{2} R\omega^2 \int_{t_0}^{t} d\Theta \int_0^{\Theta} g(\vartheta)\, d\vartheta,$$

also

191') $$P = \frac{1}{r}\cdot G(r - \omega t) = -\frac{3}{2}\frac{R\omega^2}{r}\int_{t_0}^{t+\frac{R-r}{\omega}} d\Theta \int_0^{\Theta} g(\vartheta)\, d\vartheta;$$

ferner

191'') $$Q = \frac{H}{r} = \frac{3}{2}\frac{R\omega^2}{r}\left\{\int_{t_0}^{t} d\Theta \int_0^{\Theta} g(\vartheta)\, d\vartheta + \frac{R}{\omega}\int_0^{t} g(\vartheta)\, d\vartheta + \frac{1}{3}\frac{R^2}{\omega^2} g(t)\right\}.$$

Ist $g(t)$ gleich Null für $t \leqq t_0$, so verschwindet für $t = 0$ und $r > R$ sowohl P und Q, als $\partial P/\partial t$ und $\partial Q/\partial t$; die Lösung entspricht also dem Fall, daß zur Zeit $t = t_0$ im Raume außerhalb der Kugel Ruhe und Gleichgewicht herrscht, und bestimmt die Wirkung der dann beginnenden Bewegung des leuchtenden Punktes.

Läßt man $t_0 = -\infty$ werden und die Oscillation der Kugel periodisch stattfinden, etwa nach dem Gesetz

192) $$g(t) = b \sin\frac{2\pi t}{\tau},$$

so findet die Bewegung im ganzen Raume periodisch statt.

Setzt man

$$\overline{G} = B \sin\frac{2\pi t}{\tau},$$

so folgt aus (190''') direkt

192') $$B = \frac{3\lambda^2 R b}{8\pi^2}, \quad P = \frac{3\lambda^2 R b}{8\pi^2 r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right);$$

macht man

$$H = B' \sin\frac{2\pi t}{\tau} + B'' \cos\frac{2\pi t}{\tau},$$

so ergiebt sich aus (190'''')

192'') $$B' = -\frac{1}{2} b R^3\left(\frac{3\lambda^2}{4\pi^2 R^2} - 1\right), \quad B'' = -\frac{3\lambda R^2 b}{4\pi},$$

also bei gegen λ unendlich kleinem R

192''') $$Q = \frac{H}{r} = -\frac{3\lambda^2 R b}{8\pi^2 r}\sin\frac{2\pi t}{\tau}.$$

Ein besonderes Interesse dieser Resultate liegt darin, daß sie an einem physikalisch möglichen Beispiele zeigen, wie mit den Grundgleichungen für die Lichtbewegung in einem isotropen Medium Wellen vereinbar sind, die sich mit unendlich großer Geschwindigkeit fortpflanzen; denn da Q in allen Entfernungen dieselbe Phase besitzt, so repräsentieren die von Q abhängigen Anteile an u, v, w in der That Schwingungen von der genannten Eigenschaft. Berechnet man u, v, w nach den Formeln (187) und (190), so erkennt man allerdings, daß die Anteile mit unendlich großer Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine indirekt mit r^3 proportionale Amplitude besitzen, während in den Anteilen mit endlicher Geschwindigkeit Glieder enthalten sind, die wie $1/r$ abnehmen; infolgedessen sind jene merkwürdigen Wellen in allen Entfernungen, die groß gegen die Wellenlänge sind, unmerklich.

Natürlich ist an sich eine solche unendliche Geschwindigkeit auch bei ebenen Wellen möglich; aus der Beziehung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

folgt nämlich für eine longitudinale und der XY-Ebene parallele Welle $\partial w / \partial z = 0$, also w gleich einer Funktion von t allein. Indessen erfordert die Erhaltung einer solchen Bewegung, wovon man sich leicht überzeugt, pro Flächeneinheit der Welle und pro Zeiteinheit eine unendliche Arbeit; diese Schwingung darf somit als physikalisch unmöglich bezeichnet werden, während ein ähnlicher Einwand gegen die oben besprochene nicht zu erheben ist.

In gegen λ großen Entfernungen bleibt von den allgemeinen Ausdrücken allein übrig

$$U = -\frac{3\lambda R b y}{4\pi r^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \quad V = +\frac{3\lambda R b x}{4\pi r^2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right),$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{3}{2}\frac{bRxz}{r^3}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \quad v = -\frac{3}{2}\frac{bRyz}{r^3}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right), \\ w &= +\frac{3}{2}\frac{bR(x^2+y^2)}{r^3}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right); \end{aligned}\right\} \quad 193)$$

das letztere System stimmt wiederum bis auf die Werte der Amplituden mit dem Gesetz für eine längs r in ebener Welle sich fortpflanzende lineär polarisierte Schwingung überein.

Führt man den Winkel ϑ zwischen der Richtung von r und von z ein, so erhält man durch die obigen Ausdrücke dargestellt eine Komponente n normal und eine w parallel zur Z-Axe, gegeben durch

193′)
$$\left\{\begin{aligned} n &= -\frac{3}{2}\frac{b\,R\cos\vartheta\sin\vartheta}{r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right),\\ w &= +\frac{3}{2}\frac{b\,R\sin^2\vartheta}{r}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right);\end{aligned}\right.$$

zugleich folgt aus (189′′′′) eine Komponente normal zum Meridian, in positiver Richtung drehend,

193″)
$$m = -\frac{a\,R\sin\vartheta}{r}\cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right).$$

Diese letzte Formel ist bereits in den S. 456 dieses Bandes gewonnenen Gleichungen (268′) für die Verteilung der elektrischen und magnetischen Kräfte um eine geradlinige elektrische Schwingung als dritte enthalten; in der That folgt aus dem S. 579 Gesagten, daß die Komponenten A, B, C, M der magnetischen Kraft dort mit den Verhältnissen u'/v, v'/v, w'/v, m'/v hier, die Komponenten X, Y, Z der elektrischen Kraft dort mit den Verhältnissen $\omega^2\xi/v^2$, $\omega^2\eta/v^2$, $\omega^2\zeta/v^2$ hier identifiziert werden dürfen, daß also die dort im Koordinatenanfang vorausgesetzte geradlinige elektrische Schwingung mit einem Wirbel der magnetischen Kraft äquivalent ist.

Die beiden vorhergehenden Formeln lassen sich mit den S. 456 gefundenen nicht direkt in Parallele stellen, wohl aber mit dem zu (268′) analogen System, das einer geradlinigen magnetischen Schwingung entspricht und sich von (268′) nur durch die wechselseitige Vertauschung der elektrischen und der magnetischen Kräfte und durch die Umkehrung des Vorzeichens in der letzten dieser Formeln unterscheidet; in ihm korrespondieren somit die zwei ersten Formeln mit den obigen Gleichungen (193′).

Wegen dieser Beziehungen darf man also aus den obigen Resultaten unter anderem schließen, daß theoretisch Anordnungen denkbar sind, die elektromagnetische Wellen veranlassen, welche sich mit unendlicher Geschwindigkeit fortpflanzen; ob diese Anordnungen praktisch herstellbar sind, ist allerdings eine andere Frage. —

Was im Vorstehenden für Kugelwellen gezeigt ist, gilt nun offenbar auch für beliebige, wie sie aus Kugelwellen durch Reflexion und Brechung an irgendwie stetig gekrümmten Grenzflächen zwischen verschiedenen isotropen Medien hergestellt werden können. Auch hier werden in Bereichen, die klein gegen die Krümmungsradien der Wellenfläche an der betrachteten Stelle sind, immer sehr nahe dieselben Formeln gelten, wie für ebene, eventuell inhomogene Wellen.

Wesentlich neue Erscheinungen, die man als durch Beugung oder Diffraktion bewirkt bezeichnet, stellen sich dagegen überall da ein, wo eine Welle seitlich begrenzt ist, im allgemeinsten

Falle dadurch, daß ein Teil von ihr anderen Bedingungen unterworfen wird, als der Rest, ein Teil etwa durch Reflexion oder Brechung abgelenkt, oder durch Absorption vernichtet wird. In Bezug auf diesen Fall ist schon früher bemerkt worden, daß angenähert die Richtung des Energiestromes, der vor der Einführung jener Veränderung stattfindet, die Begrenzung der im homogenen Medium weiter fortschreitenden Welle zu bestimmen gestattet; aber diese Regel ist nach ihrer ganzen Ableitung eine sehr unsichere und offenbar stets dann unrichtig, wenn durch die eingeführten neuen Umstände der Energiefluß geändert wird, wie das im allgemeinen stets geschieht.

Die strenge Durchführung hierher gehöriger Probleme stößt auf große analytische Schwierigkeiten und ist nur erst in höchst speziellen Fällen gelungen; einer von diesen soll im nächsten Paragraphen besprochen werden; eine merkwürdige Methode, angenäherte Lösungen mit großer Leichtigkeit zu erhalten, wird der darauffolgende Abschnitt bringen.

Hier mag nur noch eine Bemerkung über die Ausbreitung der Schwingungen angefügt werden, die mehreren gleichzeitig vorhandenen, und zwar gleichfarbigen Lichtpunkten ihren Ursprung verdanken.

Faßt man jeden dieser Lichtpunkte als eine kleine Kugel auf, längs deren Oberfläche p und d konstante, aber mit der Zeit in gegebener Weise wechselnde Werte besitzen, so wird das Problem der gleichzeitig von mehreren Punkten ausgehenden Schwingungen keineswegs durch einfache Superposition der jedem einzelnen für sich entsprechenden Bewegungen gelöst, sondern jede einzelne Kugel wirkt für die von jeder anderen ausgesandte Bewegung ebenso reflektierend, als wenn an ihr p und d dauernd gleich Null vorgeschrieben wären. Indessen nehmen diese reflektierten Bewegungen, wie man leicht sieht, mit der Größe der Kugel selbst schnell ab und können daher, wenn man die Entfernungen der Kugeln von einander und von dem betrachteten Punkt als groß gegen ihre Radien ansieht, für die Betrachtung vernachlässigt werden.

In diesem Falle nimmt die nach der untersuchten Stelle von allen leuchtenden Punkten (h) ausgesandte Bewegung die Form an

$$\left.\begin{aligned} u &= \sum \frac{F_h}{r_h} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_h}{\lambda}\right) + a_h\right), \\ v &= \sum \frac{G_h}{r_h} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_h}{\lambda}\right) + b_h\right), \\ w &= \sum \frac{H_h}{r_h} \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r_h}{\lambda}\right) + c_h\right), \end{aligned}\right\} \qquad 193'')$$

worin die F_h, G_h, H_h und a_h, b_h, c_h Konstanten, die r_h aber die Entfernungen der leuchtenden Punkte bezeichnen; ihr entspricht eine Intensitätsgröße

$$193'''') \quad \left\{ \begin{aligned} D^2 = &\left(\sum \frac{F_h}{r_h} \sin A_h\right)^2 + \left(\sum \frac{F_h}{r_h} \cos A_h\right)^2, \\ &+ \left(\sum \frac{G_h}{r_h} \sin B_h\right)^2 + \left(\sum \frac{G_h}{r_h} \cos B_h\right)^2, \\ &+ \left(\sum \frac{H_h}{r_h} \sin C_h\right)^2 + \left(\sum \frac{H_h}{r_h} \cos C_h\right)^2, \end{aligned} \right.$$

wobei kurz gesetzt ist

$$\frac{2\pi r_h}{\lambda} - a_h = A_h, \quad \frac{2\pi r_h}{\lambda} - b_h = B_h, \quad \frac{2\pi r_h}{\lambda} - c_h = C_h.$$

Daß dabei, wenn α_h, β_h, γ_h die Richtungskosinus von r_h bezeichnen, nach den Formeln (187) die Bedingungen

$$F_h \alpha_h + G_h \beta_h + H_h \gamma_h = 0$$

erfüllt sein müssen, kommt für die Berechnung von D^2 nicht in Betracht. —

Wir verfolgen genauer nur ein einfaches Beispiel.

Es seien zwei gleichfarbige und in gleicher Phase schwingende Lichtpunkte (1) und (2) vorhanden, und es sei das Koordinatensystem X, Y, Z so gelegt, daß ihre Koordinaten lauten

$$x_1 = +e, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = l,$$
$$x_2 = -e, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = l;$$

dabei sei λ sehr klein gegen e und e sehr klein gegen l. Untersucht werde der Zustand in einem Punkte der XY-Ebene, und zwar sei x und y gleichfalls sehr klein gegen l.

In diesem Falle kann in den bezüglichen Nennern der Gleichung (193'''') $r_1 = r_2$ gesetzt werden, und man erhält sehr einfach

$$D^2 = \frac{1}{r^2}\left(F_1^2 + F_2^2 + G_1^2 + G_2^2 + 2(F_1 F_2 + G_1 G_2) \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right),$$

wobei noch

$$r_1 - r_2 = -\frac{2ex}{l}$$

gesetzt werden kann. Dieser Ausdruck nimmt Maxima und Minima an, wenn nicht $F_1 F_2 + G_1 G_2 = 0$, d. h., wenn nicht die beiden Punkte so schwingen, daß ihre Schwingungskomponenten nach der XY-Ebene stets zu einander normal sind. Die Maxima sind gegeben durch $4ex/\lambda l = 2h$, die Minima durch $4ex/\lambda l = 2h + 1$, wobei $h = 1, 2, \ldots$; auf einem in die XY-Ebene gebrachten Schirm würden sich also

bei homogenem Licht helle und dunkle, bei weißem aber farbige, sogenannte Interferenzstreifen normal zur X-Axe zeigen, die in erster Annäherung geradlinig verlaufen. Die Bedingungen dieses Experimentes sind unter anderem angenähert verwirklicht bei der S. 527 erwähnten von Th. Young herrührenden Anordnung; auf die ebenda hervorgehobene prinzipielle Schwierigkeit kommen wir weiter unten noch zurück. —

An dieses Experiment knüpfen wir noch eine wichtige allgemeine Bemerkung. Die Erfahrung zeigt, daß, wenn wir hier oder bei ähnlichen, später zu besprechenden Vorgängen den die Interferenzen auffangenden Schirm beseitigen und dafür seine Ebene mit dem nach den Lichtpunkten hin gerichteten und eventuell mit einer Lupe bewaffneten Auge fixieren, sich uns dieselbe Interferenzerscheinung zeigt, wie zuvor auf dem auffangenden Schirm. Dies Resultat ist insofern der Erklärung bedürftig, als es sich in den vorausgesetzten Fällen nicht, wie früher, um eine fortschreitende Welle handelt, die ihre Intensität längs jeder Normalen beibehält, sondern um mehrere sich durchdringende, die an jeder Stelle andere Intensitäten ergeben.

Nach dem S. 530 Gesagten hat man sich vorzustellen, daß die im fixierten Punkt P scheinbar interferierenden Wellen sich in Wirklichkeit ohne Wechselwirkung kreuzen, dann die verschiedenen von Kugelflächen gegeneinander begrenzten Medien der Lupe und des Auges durchsetzen und schließlich auf der Netzhaut zur Wirkung kommen. Indem man die Elemente der nach Phase und Amplitude nicht streng verfolgbaren Wellen als Stücke e b e n e r h o m o g e n e r Wellen behandelt und ihren Normalen die Bedeutung von Strahlen beilegt, kann man durch eine einfache geometrische Betrachtung nachweisen, daß die in dem Punkt P sich durchkreuzenden Bewegungen mit derselben Phasendifferenz auf der Netzhaut anlangen, die sie in P besaßen. Da überdies die verschiedenen Elemente auf die einzelnen Zwischengrenzen unter nicht allzu großen Winkeln auffallen, und da somit ihre Amplituden durch die Zusammenwirkung aller erlittenen Brechungen nahezu in gleichem Verhältnis geschwächt werden, so ist es plausibel, daß die relativen Intensitäten des Netzhautbildes denen der korrespondierenden Punkte eines auf einem Schirm aufgefangenen Bildes nahe gleich sind.

§ 29. Eine absolut reflektierende Halbebene in dem unendlichen durchsichtigen isotropen Medium. Eine absolut schwarze Halbebene. Einfallende ebene Wellen, parallel oder normal zum Schirmrand polarisiert.

Wenden wir uns nunmehr zu den schon oben signalisierten Fällen, in denen einem Teil einer fortschreitenden Welle andere Bedingungen dargeboten werden, als dem Rest, so sind die Differentialgleichungen und die Grenzbedingungen des Problemes, da absorbierende magnetisch aktive Körper als ohne praktisches Interesse hierbei ausgeschlossen werden dürfen, mit vollständiger Sicherheit aufzustellen. Die Lichtquelle wird entweder punktförmig und im Endlichen liegend angenommen werden, und dann nach dem Inhalt des vorigen Paragraphen in Rechnung zu ziehen sein; oder sie wird ins Unendliche gerückt, und dann durch die Festsetzung einer aus dem Unendlichen kommenden ebenen Welle vertreten werden.

Die Behandlung spezieller Fälle ist sonach eine ausschließlich mathematische Aufgabe, und nur mathematische Schwierigkeiten sind es, die sich ihrer Durchführung entgegenstellen.

Bisher ist ihre vollständige Überwindung erst in einem einzigen Falle gelungen[87], der, obwohl der Fragestellung nach ziemlich einfach, immer noch so kompliziert ist, daß wir uns hier nur auf die kurze Wiedergabe eines noch weiter vereinfachten Problemes beschränken müssen.

Die Hauptgleichungen nehmen ihre einfachste Gestalt für die isotropen durchsichtigen Medien an; indem wir ein solches weiterhin voraussetzen, müssen wir wiederum das System zu Grunde legen

$$194)\qquad u'' = a\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \ldots; \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \ldots.$$

Die Grenzbedingungen können vereinfacht werden durch die Wahl einmal der G e s t a l t, und sodann der N a t u r der Begrenzung. In Bezug auf e r s t e r e setzen wir fest, daß das homogene isotrope Medium, in dem die Lichtquelle liegt, den ganzen Raum erfüllt mit Ausnahme einer auch gegen die Wellenlänge unendlich dünnen ebenen Platte, welche die Hälfte der XY-Ebene bedeckt, für die $x > 0$ ist, welche also durch die Y-Axe begrenzt wird. In Bezug auf l e t z t e r e setzen wir fest, daß die Substanz der Platte isotrop, absorbierend, und daß ihre charakteristische Konstante a_i' unendlich groß sei.

Da die allgemeinen Bedingungen für eine der XY-Ebene parallele

Grenze zwischen einem durchsichtigen und einem absorbierenden, isotropen Medium lauten

$$\begin{gathered} \overline{u} = \overline{u_{,}}, \quad \overline{v} = \overline{v_{,}}, \quad \overline{w} = \overline{w_{,}}, \\ a\,\overline{\xi} = a_{,}\,\overline{\xi_{,}} + a_{,}'\,\overline{\xi_{,}'}, \quad a\,\overline{\eta} = a_{,}\,\overline{\eta_{,}} + a_{,}'\,\overline{\eta_{,}'}, \quad \overline{\zeta} = \overline{\zeta_{,}}, \end{gathered} \tag{194'}$$

so folgt aus unendlichem $a_{,}'$ verschwindendes $\overline{\xi_{,}'}$ und $\overline{\eta_{,}'}$, also zeitlich konstantes $\overline{\xi_{,}}$ und $\overline{\eta_{,}}$, und somit konstantes $\overline{\xi}$ und $\overline{\eta}$, was wir für unseren Fall periodischer Schwingungen auch durch $\overline{\xi}=0$, $\overline{\eta}=0$ ersetzen können.

Weiter wollen wir bestimmen, daß die Lichtquelle eine zur Y-Axe parallele und in ihrer ganzen Ausdehnung gleichmäßig oscillierende Gerade ist. Dann verlangt die Symmetrie, daß der Schwingungszustand allenthalben von der Y-Koordinate unabhängig ist, und die Betrachtung kann sich auf die XZ-Ebene beschränken.

Die Wellenflächen, in denen die Phasen konstant sind, haben cylindrische Gestalt, und ihre Spuren in der XZ-Ebene mögen als Wellenlinien bezeichnet werden.

In Bezug auf den Schwingungszustand der Lichtquelle beschränken wir uns auf zwei einfache spezielle Fälle, welche den im vorigen Abschnitt behandelten entsprechen, indem wir annehmen, daß entweder der Polarisationsvektor p oder der Hilfsvektor d der Y-Axe parallel liegt; letzteres ergiebt die Lage von p überall normal zu Y. Im ersteren Falle lauten die Bedingungen, die wir sogleich für komplexe Lösungen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{y}$ schreiben,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial t^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{v}}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z} = 0 \text{ für } z = 0, \quad x > 0,$$

im letzteren

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} = \omega^2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial z^2}\right), \quad \mathfrak{y} = 0 \text{ für } z = 0, \quad x > 0. \tag{194''}$$

Da die Grenzbedingungen denen durchaus konform sind, die in der Potentialtheorie bei ähnlichen Begrenzungen mit Hilfe des Spiegelungsverfahrens befriedigt werden können, so liegt es nahe, auch hier diesen Kunstgriff anzuwenden. Dabei ist übrigens von vornherein klar, daß, weil die ganze unendliche Ebene den Schwingungen offen steht, die durch die Hauptgleichungen in (194″) postuliert werden, die Methode der Spiegelung nur unter Heranziehung einer mehrwertigen Lösung, also auch einer mehrblätterigen Ebene ausführbar ist. Für das vorliegende Problem genügt eine zweiwertige Lösung, also eine zweiblätterige Riemann'sche Fläche, die ersichtlich in dem, den Rand des Schirmes repräsentierenden Koordinaten-

anfang der XZ-Ebene einen einfachen Windungspunkt besitzt. Sieht man die positive X-Axe als den Verzweigungsschnitt an, der die beiden Blätter trennt, so ist das eine — sagen wir das obere — Blatt der Ort, wo sich der physikalische Vorgang abspielt, das andere — also untere — der Ort des zur Konstruktion der Lösung dienenden Spiegelbildes. —

Es handelt sich nunmehr zunächst um eine Hilfsfunktion, nämlich um eine partikuläre komplexe Lösung der Hauptgleichung

$$194''') \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = \omega^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} \right),$$

welche auf dieser RIEMANN'schen Fläche der von einem Punkte ausgehenden periodischen Schwingung entspricht; wir bemerken aber, daß man einer solchen Lösung mit großer Wahrscheinlichkeit auch die folgende selbständige physikalische Bedeutung geben kann.

Mehrfach ist in diesem Teil von absolut schwarzen Körpern gesprochen, welche die Eigenschaft haben, auffallende Wellen weder zu reflektieren, noch durchzulassen. Die Grenzbedingungen für absorbierende Medien zeigen, daß die absolut schwarzen Körper aus jenen durch Grenzübergang nicht zu gewinnen sind. Dagegen dürfte es möglich sein, wenigstens angenähert, einen unendlich dünnen Schirm aus einem solchen Körper als Verzweigungsschnitt in einem mehrfach zusammenhängenden Raume aufzufassen, der somit auffallenden Schwingungen den vollständigen Austritt aus dem einen, dem physikalischen, Raume gestattet; und dies ganz besonders, wenn die mit den beiden Seiten des Schnittes zusammenhängenden Hilfsräume unter sich nicht in Verbindung stehen. Letzteres würde in unserem Falle eine RIEMANN'sche Fläche mit unendlich vielen Blättern erfordern; indessen dürfte schon eine zweiblätterige, wie sie hier vorausgesetzt ist, ein nahe richtiges Resultat liefern, weil die Bewegung, die über das zweite Blatt hinweg nach einer vollen Umkreisung des Windungspunktes in das erste zurückgelangt, nach der unmittelbaren Anschauung jederzeit nur sehr schwach sein kann.

Hiernach würde die zunächst aufzustellende Hilfslösung zugleich eine angenäherte Theorie der Beugung durch einen absolut schwarzen, die Halbebene bedeckenden Schirm liefern. —

Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Lichtquelle längs einer mit der $+X$-Axe in der ZX-Ebene den Winkel φ' einschließenden Geraden nach $-\infty$ gerückt wird, daß also bei Abwesenheit des Schirmes ebene Wellen fortschreiten würden, deren Normale den Winkel φ' mit der $+X$-Richtung einschließt. In diesem Falle ist eine Lösung für $\mathfrak{F}$ gegeben durch

$$\mathfrak{F} = K\sqrt{\frac{i}{\pi}}\, e^{i\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \gamma\right)} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\xi^2} d\xi, \tag{195}$$

wobei

$$\gamma = \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\varphi - \varphi'), \quad \sigma = \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi') \tag{195'}$$

ist, und K eine reelle Konstante bezeichnet.

Diese Lösung ist nicht auf der schlichten Ebene, wohl aber auf der oben eingeführten Riemann'schen Fläche einwertig, da sie von $\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ abhängt, also erst bei zweimaliger Umkreisung des Koordinatenanfangs zum Ausgangswert zurückkehrt.

Für die nächste Diskussion ist es vorteilhaft, die beiden Blätter der Riemann'schen Fläche nicht durch die Spuren der $+X$-Axe, sondern durch die Geraden $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = \varphi' \pm 2\pi$ gegeneinander abzugrenzen und den Radiusvektor r durch den Winkel $\psi = \varphi - \varphi'$ gegen dieselbe zu bestimmen; das obere Blatt sei dabei das, für welches $\varphi' < \varphi < \varphi' + 2\pi$, also $0 < \psi < 2\pi$ und $0 < \sigma < \infty$, das untere das, für welches $\varphi' > \varphi > \varphi' - 2\pi$, also $0 > \psi > -2\pi$ und $0 > \sigma > -\infty$ ist. Dann ist im oberen Blatt $\sin \frac{1}{2}\psi$ positiv, im unteren negativ, und es wird, wenn wir den betrachteten Punkt ins Unendliche rücken, d. h. $r = \infty$ setzen, σ im oberen Blatt gleich $+\infty$, im unteren gleich $-\infty$; beachtet man noch, daß

$$\sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^2} d\xi = 1, \quad \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-i\xi^2} d\xi = 0 \tag{195''}$$

ist, so erkennt man, daß für $r = \infty$ im oberen Blatte

$$\mathfrak{F}_\infty = K e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r \cos\psi}{\lambda}\right)},$$

im unteren $\mathfrak{F}_\infty$ aber gleich Null ist. Wegen dieses Verhaltens wollen wir anschaulicher bei der zuletzt eingeführten Abgrenzung das obere Blatt das beleuchtete oder helle, das untere das beschattete oder dunkle, die Gerade $\psi = 0$, welche den Verzweigungsschnitt bildet, die Schattengrenze nennen. —

Die Diskussion der Lösung (195') knüpfen wir passend an den Wert ihrer komplexen Amplitude $\mathfrak{A}$ an; schreiben wir dieselbe

$$\mathfrak{A} = K\sqrt{\frac{i}{\pi}}\, e^{-i\gamma} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\xi^2} d\xi = K\sqrt{\frac{i}{2}}\,(F + iF'), \tag{195'''}$$

wobei F, F' neue Bezeichnungen sind, so ist die reelle Amplitude A und die Beschleunigung d der Schwingung gegeben durch

$$195'''')\quad A^2 = \tfrac{1}{2} K^2 (F^2 + F'^2), \quad \operatorname{tg} d = \frac{F + F'}{F - F'}, \quad \operatorname{tg}(d - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{F'}{F}.$$

Bei einfallendem einfarbigen Licht ist die beobachtbare Intensität mit A^2 proportional; bei einfallendem mehrfarbigen Licht müssen die Bestandteile einzeln behandelt und die resultierenden Intensitäten superponiert werden. Da A^2 von der Periode τ abhängig ist, so ist das Mischungsverhältnis des gebeugten Lichtes im allgemeinen von dem des einfallenden verschieden; bei einfallendem weißen Licht wird also eine — im vorliegenden Falle übrigens nur schwach — gefärbte Erscheinung wahrgenommen werden.

Um $\mathfrak{A}$ in übersichtliche Form zu bringen, führen wir ein das Integral

$$196)\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\sigma e^{-i\xi^2} d\xi = \mathfrak{J}(\sigma)$$

und bemerken, daß gilt

$$196')\quad F + iF' = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-i\gamma} \int_{-\infty}^\sigma e^{-i\xi^2} d\xi = e^{-i\gamma}\left(\mathfrak{J}(\infty) \pm \mathfrak{J}(\sigma)\right),$$

je nachdem $\sigma \gtreqless 0$ ist.

Setzt man $\xi^2 = \eta$ und berücksichtigt, daß

$$196'')\quad \int_0^\infty \frac{e^{-\eta\zeta} d\zeta}{\sqrt{\zeta}} = \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}$$

ist, so erhält man leicht

$$196''')\quad \mathfrak{J}(\sigma) = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\pi\sqrt{2\zeta}} \int_0^{\sigma^2} e^{-(i+\zeta)\eta} d\eta = \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\pi\sqrt{2\zeta}} \, \frac{1 - e^{-(i+\zeta)\sigma^2}}{i + \zeta},$$

oder indem man einführt

$$197)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\sigma^2}\sqrt{\zeta}\, d\zeta}{\pi(1+\zeta^2)\sqrt{2}} = G(\sigma^2) = G, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\sigma^2} d\zeta}{\pi(1+\zeta^2)\sqrt{2\zeta}} = H(\sigma^2) = H$$

und benutzt, daß

$$197')\quad G(0) = H(0) = \tfrac{1}{2}, \quad G(\infty) = H(\infty) = 0,$$

ist, auch

$$197'')\quad \mathfrak{J}(\sigma) = \tfrac{1}{2}(1 - i) - e^{-i\sigma^2}(G - iH) \quad \text{und}$$

$$197''')\quad \mathfrak{J}(\infty) = \tfrac{1}{2}(1 - i).$$

Die Funktionen G und H haben einen sehr einfachen Verlauf; sie sind für alle σ positiv und fallen, wenn dessen absoluter Wert wächst; für mäßige Werte σ sind sie bereits unmerklich klein, und zwar gilt dies von G früher, als von H.

Bei Anwendung der Werte (197″) und (197‴) und unter Berücksichtigung von

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} r \cos\psi, \quad \gamma + \sigma^2 = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

ergiebt sich schließlich aus (196′):

für $-2\pi < \psi < 0$, d. h. für $\sigma < 0$,

$$F + iF' = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}(G - iH). \tag{198}$$

für $0 < \psi < +2\pi$, d. h. für $\sigma > 0$,

$$F + iF' = (1 - i)\, e^{-\frac{2\pi i r \cos\psi}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}(G - iH). \tag{198′}$$

Man bemerkt, daß, wenn G und H Konstanten wären, die Formel (198) eine vom Schirmrande ausgehende Cylinderwelle bestimmter Art, (198′) aber die Superposition einer solchen mit einer parallel der Schattengrenze fortschreitenden ebenen Welle darstellen würde, und da H und G in einiger Entfernung vom Rande jedenfalls viel langsamer variieren, als die in sie multiplizierte Exponentialgröße, so wird dort die Bewegung in Wirklichkeit mit der genannten eine gewisse Ähnlichkeit haben. Zu demselben Resultat führt auch die strenge Analyse.

Aus den Ausdrücken (198) und (198′) folgt nämlich:

für $-2\pi < \psi < 0$, d. h. für $\sigma < 0$,

$$\left.\begin{aligned} F &= G \cos\frac{2\pi r}{\lambda} - H \sin\frac{2\pi r}{\lambda}, \\ F' &= -G \sin\frac{2\pi r}{\lambda} - H \cos\frac{2\pi r}{\lambda}; \end{aligned}\right\} \tag{198″}$$

für $0 < \psi < 2\pi$, d. h. für $\sigma > 0$,

$$\left.\begin{aligned} F &= \cos\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - \sin\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - G\cos\frac{2\pi r}{\lambda} + H\sin\frac{2\pi r}{\lambda}, \\ F' &= -\cos\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - \sin\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} + G\sin\frac{2\pi r}{\lambda} + H\cos\frac{2\pi r}{\lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{198‴}$$

Nach dem S. 767 Gesagten lauten die Gleichungen der Wellenlinien, wenn die k_h Konstanten bezeichnen:

für $-2\pi < \psi < 0$, d. h. für $\sigma < 0$,

$$k_1 = \frac{G\sin\frac{2\pi r}{\lambda} + H\cos\frac{2\pi r}{\lambda}}{G\cos\frac{2\pi r}{\lambda} - H\sin\frac{2\pi r}{\lambda}}, \tag{199}$$

für $0 < \psi < 2\pi$, d. h. für $\sigma > 0$,

$$199') \quad k_2 = \frac{\cos\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} + \sin\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - G\sin\frac{2\pi r}{\lambda} - H\cos\frac{2\pi r}{\lambda}}{\cos\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - \sin\frac{2\pi r\cos\psi}{\lambda} - G\cos\frac{2\pi r}{\lambda} + H\sin\frac{2\pi r}{\lambda}}.$$

Da für große σ^2 sowohl G, als H sehr klein, aber G erheblich kleiner, als H ist, so wird Formel (199) für sehr große negative σ mit $r = \text{Const.}$, (199') für sehr große positive σ mit $r\cos\psi = \text{Const.}$ äquivalent. σ wird mit ψ zu Null in dem Verzweigungsschnitt, der das helle und das dunkle Blatt trennt; in angemessener Entfernung davon sind also die Wellenlinien im hellen Blatt Gerade, die normal auf jenem Schnitt stehen, im dunkeln Blatt Kreise um den Koordinatenanfang, d. h. um den Windungspunkt als Centrum; in der Nähe des Schnittes weichen sie mit mehr oder weniger starken Kräuselungen von dieser Gestalt ab. Faßt man dies zusammen, so erkennt man, daß die ursprünglich geradlinige und nur im hellen Blatt fortlaufende Welle beim Überschreiten des Windungspunktes eine Schleife in das dunkle Blatt aussendet, die sich dort mehr und mehr ausbreitet, während sie längs der Schattengrenze mit der weiter im hellen Blatt wesentlich in geradliniger Form fortschreitenden Wellenlinie verbunden bleibt.

Für die reelle Amplitude A erhält man nach (195''''):

für $-2\pi < \psi < 0$, d. h. für $\sigma < 0$,

$$199'') \quad A^2 = \tfrac{1}{2}K^2(G^2 + H^2),$$

für $0 < \psi < 2\pi$, d. h. für $\sigma > 0$,

$$199''') \quad A^2 = \tfrac{1}{2}K^2\left[\left(G - \sqrt{2}\sin(\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\pi)\right)^2 + \left(H - \sqrt{2}\cos(\sigma^2 + \tfrac{1}{4}\pi)\right)^2\right];$$

sie ist also eine Funktion von σ^2 allein. Die Kurven $\sigma^2 = \text{Const.}$ sind gegeben durch

$$r(1 - \cos\psi) = k,$$

wobei k eine positive Konstante bezeichnet, also wenn man $r\cos\psi = x_,$, $r\sin\psi = z_,$ setzt, durch

$$z_,^2 = k(k + 2x_,);$$

sie sind also Parabeln um die $X_,$-Axe, die sich nach deren positiver Seite hin öffnen, die ihre Brennpunkte in der Schirmkante und ihre Scheitel bei $x_, = -\frac{1}{2}k$ haben; zu ihnen zählt die unendlich ferne Gerade, welche die e i n f a l l e n d e Welle darstellt. Die orthogonalen Trajektorien dieses Systems haben die Gleichung

$$r(1 + \cos\psi) = k',$$

resp. $z_,^2 = k'(k' - 2x_,)$; sie sind gleichfalls Parabeln um die $X_,$-Axe,

die sich aber nach der negativen Seite hin öffnen, die ihre Brennpunkte im Schirmrande und ihre Scheitel bei $x_{,} = +\frac{1}{2}k'$ haben; zu ihnen zählt die unendlich ferne Gerade, welche die im hellen Blatte nach Unendlich fortgeschrittene Welle darstellt. In der Nähe der Schattengrenze sind diese Kurven als Normalen auf dieser, resp. als Parallele zur $Z_{,}$-Axe zu betrachten; wir erhalten also angenähert das Gesetz der Intensitäten, die sich auf einem normal zur Schattengrenze aufgestellten Schirm oder in einer, nach S. 765 geeignet aufgestellten Lupe zeigen würden, wenn wir A^2 als Funktion von σ^2 betrachten.

Dabei ist es praktisch, jetzt zu der ersten Abgrenzung der beiden Blätter zurückzugreifen und den Verlauf nur in dem physikalischen Blatt, d. h. für $0 < \varphi < 2\pi$ zu untersuchen. Von diesem wird dann der Teil, für welchen $0 < \varphi < \varphi'$ ist, als beschattet, der, für welchen $\varphi' < \varphi < 2\pi$ ist, als beleuchtet zu bezeichnen sein.

Beachtet man, daß nach der Definition (197)

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma^2} = H - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma^2} = -G$$

ist, so kann man leicht nachweisen, daß A^2 mit wachsendem σ^2 auf dem beschatteten Bereich weder Maxima, noch Minima erreicht, wohl aber auf dem beleuchteten; dort sind dieselben gegeben durch die Wurzeln der Gleichung

$$\overline{G} = \sqrt{2}\sin(\overline{\sigma}^2 + \tfrac{1}{4}\pi),$$

liegen also wegen des schnell abnehmenden G in der Nähe von $\sigma^2 = (h - \frac{1}{4})\pi$, wobei $h = 1, 2 \ldots$ ist; sie haben die Größe

$$A^2 = \tfrac{1}{2}K^2(\overline{H} - \sqrt{2}\cos(\overline{\sigma}^2 + \tfrac{1}{4}\pi))^2,$$

die nicht erheblich von $\frac{1}{2}K^2(\overline{H} \pm \sqrt{2})^2$ abweicht, also für wachsendes σ^2 bald in K^2, d. h. den bei Abwesenheit des Beugungsschirmes eintretenden Wert übergeht.

Hieraus folgt, daß der die Erscheinung auffangende Schirm innerhalb des geometrischen Schattens stetig zu Null abnehmende Intensität, außerhalb eine Reihe von hellen und dunkeln, der Schattengrenze parallel liegenden Streifen mit allmählich verschwindendem Kontrast zeigen muß. Die Beobachtung mit einem großen schwarzen und durch eine Gerade begrenzten Diffraktionsschirme bestätigt nahe der Schattengrenze in der That dies Resultat, und zwar nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ, insofern die Orte dieser Streifen äußerst nahe mit den von der Theorie geforderten übereinstimmen.

Beiläufig mag erwähnt werden, daß, wenn λ unendlich klein gegen r ist, nach der Definition (195′) σ an allen Stellen, die in endlichem Winkelabstand $\varphi - \varphi' = \psi$ von der Schattengrenze liegen, unendlich wird. Da nun für ein solches Argument G und H verschwindet, so ergiebt sich in diesem Grenzfall nach (199″) und (199‴) für $\sigma < 0$, $A^2 = 0$, für $\sigma > 0$, $A^2 = K^2$, innerhalb der Schattengrenze also dieselbe Dunkelheit, als wenn keine Welle einfiele, außerhalb dieselbe Lichtstärke, als wenn der Schirm nicht vorhanden wäre. Dies Resultat macht an einem speziellen Beispiele deutlich, wie nur die außerordentliche Kleinheit der Wellenlängen die Ursache davon ist, daß man eine Welle durch die sogenannten Strahlen näherungsweise begrenzen kann, und wie auf deren thatsächlich endlichem Wert die Beugungserscheinungen beruhen. —

Wenden wir uns nun dem S. 767 aufgestellten Hauptproblem zu, so erhalten wir die Lösung mit Hilfe der Funktion $\mathfrak{F}$, die wir in ihrer Abhängigkeit von φ' mit $\mathfrak{F}(\varphi')$ bezeichnen wollen, in folgender Weise durch das Spiegelungsprinzip geliefert. Da $\mathfrak{F}(2\pi - \varphi')$ in der Geraden $\varphi = 0$ dieselben Werte annimmt, wie $\mathfrak{F}(\varphi')$, und $\partial \mathfrak{F}(2\pi - \varphi')/\partial \varphi$ die entgegengesetzten, wie $\partial \mathfrak{F}(\varphi')/\partial \varphi$, so genügen die Ansätze

$$200)\qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{F}(\varphi') + \mathfrak{F}(2\pi - \varphi'); \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{F}(\varphi') - \mathfrak{F}(2\pi - \varphi')$$

allen Bedingungen (194″); sie stellen somit die gesuchten Ausdrücke dar.

Hier wird also der bisherigen Schattengrenze $\varphi = \varphi'$ noch eine zweite $\varphi = 2\pi - \varphi'$ zugeordnet, und demgemäß zerfällt das physikalische Blatt der Riemann'schen Fläche jetzt nicht in zwei, sondern in drei Teile verschiedener Natur. Um dies zu übersehen, bedenken wir, daß in den neuen Gliedern $\mathfrak{F}(2\pi - \varphi')$ an der Stelle der bisherigen Funktion

$$\sigma = + \sqrt{4\pi r / \lambda} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi')$$

die andere

$$\sigma_{,} = - \sqrt{4\pi r / \lambda} \sin \tfrac{1}{2}(\varphi + \varphi')$$

steht. Bezeichnen wir jetzt die komplexe Amplitude der neuen Lösungen mit $\mathfrak{A}$ und behalten F und F' in der früheren Bedeutung bei, so gilt

$$200')\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = K\sqrt{\dfrac{i}{2}}\Big[\big(F(\varphi') \pm F(2\pi - \varphi')\big) + i\big(F'(\varphi') \pm F'(2\pi - \varphi')\big)\Big] \\ \quad = K\sqrt{\dfrac{i}{2}}\,(\Phi + i\,\Phi'); \end{cases}$$

darin sind Φ und Φ' neue Bezeichnungen, und das obere Zeichen

gehört dem Ausdruck für $\mathfrak{v}$, das untere dem für $\mathfrak{y}$ zu. Für die reelle Amplitude A und die Beschleunigung d folgt hieraus gemäß (195'''')

$$A^2 = \tfrac{1}{2} K^2 (\Phi^2 + \Phi'^2), \quad \operatorname{tg}(d - \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\Phi'}{\Phi}. \qquad 200'')$$

Unter Anwendung der Formeln (198) und (198') erhält man leicht: für $0 < \varphi < \varphi'$, d. h. für $\sigma < 0$, $\sigma_{\prime} < 0$,

$$\Phi + i\Phi' = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} \Big[\big(G(\sigma^2) \pm G(\sigma_{\prime}^2)\big) - i\big(H(\sigma^2) \pm H(\sigma_{\prime}^2)\big)\Big]; \qquad 201)$$

für $\varphi' < \varphi < 2\pi - \varphi'$, d. h. für $\sigma > 0$, $\sigma_{\prime} < 0$,

$$\left.\begin{aligned} \Phi + i\Phi' &= (1 - i)\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r \cos(\varphi - \varphi')} \\ &\quad - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} \Big[\big(G(\sigma^2) \mp G(\sigma_{\prime}^2)\big) - i\big(H(\sigma^2) \mp H(\sigma_{\prime}^2)\big)\Big]; \end{aligned}\right\} \qquad 201')$$

für $2\pi - \varphi' < \varphi < 2\pi$, d. h. für $\sigma > 0$, $\sigma_{\prime} > 0$,

$$\left.\begin{aligned} \Phi + i\Phi' &= (1 - i)\Big(e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r \cos(\varphi - \varphi')} \pm e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} r \cos(\varphi + \varphi')}\Big) \\ &\quad - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} \Big[\big(G(\sigma^2) \pm G(\sigma_{\prime}^2)\big) - i\big(H(\sigma^2) \pm H(\sigma_{\prime}^2)\big)\Big]. \end{aligned}\right\} \qquad 201'')$$

Schon die bloße Gestalt dieser Ausdrücke läßt unter Heranziehung des zu den Formeln (198) und (198') Gesagten folgendes leicht erkennen. Im ersten Gebiet hat die stattfindende Bewegung Ähnlichkeit mit den Wellen, die eine im Rand des Diffraktionsschirmes befindliche leuchtende Linie aussenden würde; im zweiten tritt hierzu eine angenähert als eben zu betrachtende Welle, die in der Einfallsrichtung fortschreitet, im dritten noch eine analoge, welche den Charakter einer an dem Diffraktionsschirm reflektierten Welle hat. Genaueres liefert die Diskussion der Gestalt der Wellenlinien und der Ausdrücke für die Amplituden, die wir als ziemlich umständlich hier unterlassen.

Nur auf einen Punkt sei noch aufmerksam gemacht. Während die Ausdrücke für F und F' auf S. 771 von der Polarisationsrichtung der einfallenden Welle ganz unabhängig sind, gilt nicht dasselbe in Bezug auf die oben erhaltenen Werte von Φ und Φ'; denn die oberen Vorzeichen in der Gleichung (200') bestimmen die komplexe Amplitude von $\mathfrak{v}$, die unteren die von $\mathfrak{y}$; erstere entsprechen somit dem Einfall einer parallel, letztere dem einer normal zum Schirmrand polarisierten Welle. Das doppelte Vorzeichen macht sich nach (201'') einmal in der Phase der am Schirm reflektierten Welle, dann aber, und besonders, in den Amplituden der scheinbar

vom Schirmrand ausgehenden Cylinderwellen geltend. Da am Schirm selbst $\sigma = \sigma_r$ ist, so verschwindet nach (201) und (201″) dort die bezügliche Amplitude der senkrecht zum Rande polarisierten Komponente vollständig; sie wird also jedenfalls in seiner Nähe schwächer sein, als die zum Rand parallele. Einfallendes lineär nach beliebigem Azimut polarisiertes Licht wird dort also durch die Beugung nach der Richtung des Randes hingedreht, einfallendes natürliches erhält einen nach dieser Richtung polarisierten Anteil. Umgekehrtes gilt nach (201′) für die Verlängerung des Schirmes, wo $\sigma = - \sigma_r$ ist.

Die Beobachtungen über diese Verhältnisse haben im wesentlichen eine befriedigende Übereinstimmung gezeigt; kleine Abweichungen erklären sich dadurch, daß die benutzten Schirme weder absolut reflektierend, noch unendlich dünn gegen die Wellenlänge sein können.[88])

§ 30. Das Huyghens'sche Prinzip. Angenäherte Theorie der Beugungserscheinungen. Ein ebener schwarzer Schirm bei Fresnel's Beobachtungsweise. Der Fall unendlich kleiner Wellenlänge. Der Schirm ist von parallelen Geraden begrenzt, und die Wellenlänge ist endlich.

In manchen Gebieten, wo nach dem oben Gesagten die Analysis zu strengen Lösungen bisher nicht geführt hat, kann man angenäherte von hoher praktischer Brauchbarkeit mit Hilfe eines als Huyghens'sches Prinzip bezeichneten Satzes und mit Hilfe einer eigentümlichen Ergänzung der in dem Problem wirklich gegebenen Daten durch empirische Resultate gewinnen. Diese gemischte Methode, die wesentlich durch den Erfolg gerechtfertigt wird, fällt aus dem Rahmen dieses Werkes, das angenäherte Betrachtungen im allgemeinen ausschließt, einigermaßen heraus und mag deshalb nur in ihren Grundgedanken und an einigen Beispielen, keineswegs aber in allen ihren Anwendungen vorgeführt werden.

Bezeichnen wir mit dem Symbol ∂ die partielle Differentiation nach einer der explizit vorkommenden Koordinaten x, y, z, resp. nach der Entfernung r von dem willkürlichen Punkt a, b, c, und mit d die totale, so gilt für eine Funktion $U(x, y, z, r)$ die Identität

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial x}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial r}\frac{d x}{d r},$$

und somit:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial r}\frac{dx}{dr} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dr}.$$

Bildet man diese letztere Formel auch in Bezug auf y und z und addiert alle drei, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\\ = \frac{1}{r}\Delta_r U + \frac{1}{r}\left(\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{\partial U}{\partial r}\right),\end{aligned}$$

wobei die Ableitung Δ_r sich nur auf die explizite vorkommenden x, y, z bezieht; dies läßt sich leicht umgestalten in

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(U - r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right]\\ + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_r U\right) = 0.\end{aligned}\right\} \quad 202)$$

Ist nun U mit seinen ersten Differentialquotienten in einem Raum k regulär, und bezeichnet man die Oberfläche von k mit o, die innere Normale darauf mit n, so erhält man durch Multiplikation der letzten Formel mit dk und Integration über k sogleich

$$\int \left| U - r\frac{\partial U}{\partial r} \right| d\omega - \int \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial_r U}}{\partial n}\, do + \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_r U\right)\frac{dk}{r} = 0; \quad 202')$$

hierin bedeutet $d\omega$ das Element der Kegelöffnung vom Punkt a, b, c aus, und in die mit $||$ umschlossenen Glieder sind die Grenzen bezüglich r einzusetzen.

Wir nehmen an, daß der Punkt a, b, c innerhalb k liegt und demnach durch eine unendlich kleine Kugel vom Integrationsgebiet ausgeschlossen ist. Dann giebt an der untersten Grenze das erste Integral $-4\pi U_0$, falls U_0 den Wert im Punkt a, b, c bezeichnet; für die weiteren benutzen wir die Umformung

$$\left(U - r\frac{\partial U}{\partial r}\right) d\omega = -\left(\frac{U}{r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)\cos(r, n)\, do = +\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cos(r, n)\, do$$

und erhalten so leicht:

$$4\pi U_0 = \int \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U}{r}\right)\cos(n, r) - \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial_r U}}{\partial n}\right) do + \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \Delta_r U\right)\frac{dk}{r}. \quad 202'')$$

Wenn der Punkt a, b, c an der Oberfläche von k liegt, so tritt links an die Stelle der ganzen Kegelöffnung 4π nur der dann nach dem Innern von k hin liegende Teilwert, bei stetiger Krümmung der Wand in a, b, c also 2π; indessen hat dieser Fall für unsere Zwecke keine Bedeutung. Diese Formel geht in das GREEN'sche Theorem Bd. I, S. 182 über, wenn U von r unabhängig ist.

Sei nun $F(t)$ eine Funktion von x, y, z und t, welche der Gleichung

203) $$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \omega^2 \Delta F$$

genügt, und U das, was aus F wird, wenn man darin t durch $t - r/\omega$ ersetzt, so gilt

$$U_0 = F_{abc}(t), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \omega^2 \Delta_r U;$$

das Raumintegral in (202″) verschwindet somit, und es resultiert

203′) $$F_{abc}(t) = \frac{1}{4\pi}\int \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\overline{F(t-r/\omega)}}{r}\right)\cos(n,r) - \frac{1}{\bar{r}}\frac{\overline{\partial_r F(t-r/\omega)}}{\partial n}\right] do.$$

Ist also längs o

203″) $$\overline{F} = f(t), \quad \frac{\overline{\partial F}}{\partial n} = f'(t)$$

vorgeschrieben, so ergiebt sich der Wert von F im Punkte a, b, c durch die Formel

203‴) $$F_{abc}(t) = \frac{1}{4\pi}\int \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(t-\bar{r}/\omega)}{\bar{r}}\right) - \frac{1}{\bar{r}} f'(t - \bar{r}/\omega)\right] do,$$

wobei der Differentialquotient nach n sich natürlich nur auf $\bar{r}$, nicht auf die explizit vorkommenden x, y, z bezieht.[89])

Diese Gleichung, welche mit der S. 373 des I. Bandes auf ganz anderem Wege gewonnenen Formel (150′) identisch ist, wird als Ausdruck des Gedankens betrachtet, daß die Bewegung, welche in einem beliebigen Punkte a, b, c als Folge von Wellen eintritt, die sich nach dem Gesetz (203) im Raume ausbreiten, mittelbar hervorgebracht wird durch Bewegungen, die eine beliebige, den Punkt a, b, c ein- und die Quellen der Schwingungen ausschließende Oberfläche durchsetzen; dieser Gedanke ist ohne mathematische Formulierung zuerst von Huyghens verwertet worden und wird daher als Huyghens-sches Prinzip bezeichnet.[90])

Die Gleichung (203‴) hat mit der oben zitierten und nächstverwandten Green'schen Formel das gemein, daß sie die gesuchte Größe, hier also $F_{abc}(t)$, durch mehr Daten ausdrückt, als unabhängig voneinander vorgeschrieben werden können; denn nach den Betrachtungen in § 20 des II. Teiles ist die Funktion F bereits vollständig bestimmt durch die Hauptgleichung $\partial^2 F/\partial t^2 = \omega^2 \triangle F$ und durch die Randbedingung $\overline{F} = f(t)$ oder $\overline{\partial F}/\partial n = f'(t)$. Die Gleichung (203‴) kann also im Grunde einen exakten Wert $F_{abc}(t)$ überhaupt nur dann geben, wenn das Problem der Ausbreitung der

Schwingungen auf anderem Wege bereits streng gelöst ist, somit für die ganze Oberfläche mit einander verträgliche Werte $\overline{F}$ und $\partial \overline{F}/\partial n$ bestimmt werden können, und bietet dann keinen Vorteil; sie kann aber zur angenäherten Lösung von streng nicht zu behandelnden Problemen dienen, wenn empirische Resultate zur Bestimmung der Werte F und $\partial F/\partial n$ verwertet werden können. —

Ein solches Problem ist dasjenige der Beugung des von einer punktförmigen Quelle ausgehenden Lichtes durch irgendwelche ihm entgegenstehende, absolut schwarze Schirme, die so angeordnet sein mögen, daß kein Radiusvektor $r_,$ von der Lichtquelle aus deren zwei trifft. Um das neue Verfahren anzuwenden, konstruieren wir um den Lichtpunkt $P_,$ mit den Koordinaten $a_,$, $b_,$, $c_,$ eine geschlossene oder ins Unendliche verlaufende Oberfläche, welche gebildet wird aus den von ihm abgewandten Teilen der Schirme und beliebigen, zwischen deren Rändern erstreckten Flächenstücken, die aber allenthalben nur ein Mal vom Radiusvektor $r_,$ geschnitten werden mögen, nennen die ersteren Flächenteile O_s, die letzteren O_0 und ergänzen $O_s + O_0$ durch angemessene Teile O_k einer unendlichen Kugelfläche zu einem den betrachteten Punkt P mit den Koordinaten a, b, c rings umschließenden Flächensystem o.

Bezüglich der Flächenstücke O_s und O_0 ergiebt dann die Erfahrung, je nach deren Gestalt bald mehr, bald weniger vollkommen, daß an ersteren eine merkliche Lichtintensität überhaupt nicht besteht, an letzteren aber dieselbe Intensität stattfindet, als wenn die Schirme überhaupt fehlten. Bezüglich der Flächenstücke O_k kann man auf verschiedene Weise plausibel machen, daß an ihnen die Amplituden der Schwingung von höherer, als der zweiten Ordnung unendlich klein werden; wir werden einen der hierzu dienenden Schlüsse weiter unten erwähnen.

Bildet man nun das Integral (203''') für die Fläche $o = O_s + O_0 + O_k$, so geben nach dem Gesagten nur die von O_0 herrührenden Anteile einen Wert, und das Resultat wird einen um so genaueren Ausdruck für $F_{abc}(t)$ liefern, je genauer die bezüglich der Flächen O_s und O_0 eingeführten Annahmen der Wirklichkeit entsprechen, je genauer also $\overline{F}$ und $\partial \overline{F}/\partial n$ faktisch an den Flächen O_s gleich Null, an den Flächen O_0 gleich den bei Abwesenheit der Schirme stattfindenden Werten sind.

Über den Grad dieser Genauigkeit giebt die Beobachtung nur höchst unvollkommenen Aufschluß; die ganze Methode entbehrt sonach des zuverlässigen Fundamentes und ist deshalb unbefriedigend; sie

besitzt aber trotzdem eine gewisse praktische Bedeutung, da sie ein streng nicht zu erledigendes Problem auf eine einfache Quadratur zurückführt und in vielen Fällen Resultate liefert, die in weiten Grenzen mit der Beobachtung befriedigend übereinstimmen.

Da die Gleichung (203'), resp. (203'''), in F, resp. f' und f''. lineär ist, so kann man sie auch auf komplexe Lösungen der Gleichung $\partial^2 \mathfrak{F}/\partial t^2 = \omega^2 \Delta \mathfrak{F}$ anwenden und demgemäß schreiben

204) $$\mathfrak{F}_{abc}(t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{O}\, do,$$

worin nunmehr

204') $$\mathfrak{O} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathfrak{f}(t - r/\omega)}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\mathfrak{f}'(t - r/\omega)$$

ist, und die deutschen Buchstaben komplexe Ausdrücke von der Natur der in (203'') enthaltenen reellen und durch lateinische Buchstaben bezeichneten darstellen.

Um diese Formel auf spezielle Beugungsprobleme anzuwenden, wählt man für $\mathfrak{F}$ passend eine der komplexen Polarisationskomponenten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$; die resultierende Intensität, die sich ergiebt, wenn nicht nur eine, sondern alle drei von Null verschieden sind, ist dann durch die Summe der den einzelnen entsprechenden gegeben.

In dem wichtigsten Falle, daß die Lichtquelle als punktförmig zu betrachten ist, wird dann nach (193''') $\mathfrak{F}$ die Form haben

204'') $$\mathfrak{F} = \frac{K_,}{r_,}\,e^{iT_,}, \quad \text{wobei } T_, = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r_,}{\omega}\right)$$

und der Anfangspunkt von t beliebig ist, $r_,$ aber die Entfernung des Oberflächenelementes do von dem in $a_,$, $b_,$, $c_,$ befindlich gedachten Lichtpunkt $P_,$ bezeichnet.

Da $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{f}(t)$ identisch ist, so wird

$$\frac{1}{r}\,\mathfrak{f}\left(t - \frac{r}{\omega}\right) = \frac{K_,}{r r_,}\,e^{iT}, \quad \text{wobei } T = \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{r + r_,}{\omega}\right)$$

ist; daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\,\mathfrak{f}\left(t - \frac{r}{\omega}\right)\right) = -\frac{K_,}{r r_,}\left(\frac{1}{r} + \frac{2\pi i}{\lambda}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\,e^{iT}.$$

Ferner wird $\mathfrak{f}'(t) = (\partial \mathfrak{F}/\partial r_,).(\partial r_,/\partial n)$, also

$$\frac{1}{r}\,\mathfrak{f}'\left(t - \frac{r}{\omega}\right) = -\frac{K_,}{r r_,}\left(\frac{1}{r_,} + \frac{2\pi i}{\lambda}\right)\frac{\partial r_,}{\partial n}\,e^{iT},$$

und man erhält somit

204''') $$\mathfrak{O} = -\frac{K_,}{r r_,}\left(\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r_,}\frac{\partial r_,}{\partial n}\right) + \frac{2\pi i}{\lambda}\left(\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r_,}{\partial n}\right)\right)e^{iT}.$$

Wendet man diesen Ausdruck auf ein Flächenelement einer Kugel an, deren Radius unendlich groß ist gegen den gegenseitigen Abstand der Punkte P und $P_,$, so ist an demselben $\partial r / \partial n$ unendlich wenig von $\partial r_, / \partial n$, und das unendliche r nur um Endliches von dem unendlichen $r_,$ verschieden; hieraus folgt aber, daß $\mathfrak{O}$ selbst von höherer, als zweiter Ordnung unendlich klein ist.

Wir haben nun oben die Flächen O_s und O_0 durch angemessene Teile O_k einer unendlich großen Kugelfläche zu einer, den Punkt a, b, c rings umschließenden Oberfläche ergänzt. Die vorstehende Betrachtung ergiebt, daß, selbst wenn O_k als direkt vom leuchtenden Punkt bestrahlt gelten könnte, sein Anteil an dem Integral (204) verschwinden würde; wir dürfen schließen, daß dies um so mehr dann stattfindet, wenn, wie angenommen, diese Strahlung durch dunkle Schirme behindert und zum Teil vernichtet ist.

Hiermit ist der auf S. 779 angekündigte Beweis für das Verschwinden des über O_k erstreckten Integrals nachgeliefert, und wir haben weiterhin nur das über die Flächenstücke O_0 erstreckte in Betracht zu ziehen. —

Für die weiteren Folgerungen wollen wir der Einfachheit halber die Fläche O_0 so gelegen annehmen, daß $\partial r / \partial n$ und $\partial r_, / \partial n$ an ihr entgegengesetzte Vorzeichen besitzen; wenn dann noch sowohl r, als $r_,$ sehr groß gegen λ sind, wie das in Praxi jederzeit stattfindet, so kann das erste Glied in (204''') neben dem zweiten vernachlässigt werden, und wir erhalten

$$\mathfrak{O} = -\frac{2\pi i K_,}{r r_, \lambda}\left(\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r_,}{\partial n}\right) e^{iT}. \qquad 204'''')$$

Hieraus ergiebt sich für die komplexe Amplitude $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}_{abc}(t)$

$$\mathfrak{A} = -\frac{i K_,}{2\lambda}\int \frac{do}{r r_,}\left(\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{\partial r_,}{\partial n}\right) e^{-iR}, \quad \text{wobei } R = \frac{2\pi}{\lambda}\Big((r + r_,) - q\Big); \qquad 205)$$

dabei ist in R eine willkürliche Konstante q zugefügt, um die absolute Phase verfügbar zu erhalten, was sich weiterhin zweckmäßig erweist.

R variiert auf o nur, insoweit $r + r_,$ sich ändert, ist also konstant auf den Kurven, welche durch den Schnitt der Oberfläche o mit Rotationsellipsoiden um die Brennpunkte P und $P_,$ entstehen. Da in dem Schnittpunkt P_0 der Rotationsaxe dieser Ellipsoide und der Fläche o die Summe $r + r_,$ ihr Minimum hat, so variiert sie beim Fortschreiten normal zu einer der obigen Schnittkurven in der Umgebung dieser Stelle am langsamsten, dagegen mit zunehmender Geschwindigkeit bei wachsendem $r + r_,$; infolge dessen wechselt auch e^{-iR} in der Nähe von P_0 sein Vorzeichen selten, mit

wachsender Entfernung von P_0 immer öfter, und da der Faktor von e^{-iR} unter dem Integral sein Zeichen zumeist gar nicht, und wenn überhaupt, nur selten wechselt, so ist zu schließen, daß die Teile der Fläche o, die einigermaßen entfernt von dem Punkt P_0 liegen, zu dem Wert von $\mathfrak{A}$ einen merklichen Anteil nicht beitragen. Dies wird von der Beobachtung bestätigt, welche zeigt, daß eine willkürlich zugefügte seitliche Begrenzung der gegebenen Fläche o durch einen schwarzen Schirm, der sich, von P gesehen, dem Punkt P_0 ringsum bis auf einige Bogengrade annähert, die Erscheinung nicht merklich verändert.

Dies Resultat gestattet, die Formeln noch weiter zu vereinfachen, denn man kann nunmehr, abgesehen von extremen und praktisch unwichtigen Fällen, auf dem für die Erscheinung maßgebenden Teil von o in dem Faktor von e^{-iR} sowohl r und $r_,$ nach Richtung und Größe konstant, als wegen der Nähe des Minimums von $(r+r_,)$ auch $\partial(r+r_,)/\partial n = 0$ setzen, und erhält so, indem man noch berücksichtigt, daß $\partial r_, / \partial n = \cos(r_,, n)$ ist,

205′) $$\mathfrak{A} = \frac{iK_,}{\lambda \varrho \varrho_,} \int \cos(\varrho_,, n)\, e^{-iR}\, do,$$

wobei ϱ und $\varrho_,$ konstante mittlere Werte von r und $r_,$ darstellen.

Der bei weitem wichtigste Fall ist nun der, daß man die Fläche o als eine e b e n e wählen kann, wie das z. B. immer dann stattfindet, wenn der schwarze Diffraktionsschirm selbst eine sehr dünne, ebene Platte darstellt. In diesem Falle ist auch $\cos(\varrho_,, n)$ als auf o konstant anzusehen, und es gilt

205″) $$\mathfrak{A} = \frac{iK_, \cos(\varrho_,, n)}{\lambda \varrho \varrho_,} \int e^{-iR}\, do.$$

Zur Berechnung von R, resp. $r + r_,$, ist es dann praktisch, das XY-Koordinatensystem in die Ebene der Fläche o zu legen; die zugehörige Z-Axe mag dabei nach der Seite des beobachteten Punktes hinweisen und der Koordinatenanfang an der Stelle liegen, von der aus ϱ und $\varrho_,$ gerechnet werden. Es ist dann bei Einführung der Richtungskosinus $\alpha = a/\varrho, \ldots$, $\alpha_, = a_,/\varrho_,, \ldots$ von ϱ und $\varrho_,$ und bei Berücksichtigung der gegen ϱ und $\varrho_,$ kleinen Ausdehnung von O_0 bis auf Glieder zweiter Ordnung inklusive

206) $$\begin{cases} r + r_, = \varrho + \varrho_, - \big(x(\alpha + \alpha_,) + y(\beta + \beta_,)\big) \\ \quad + \frac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{1-\alpha^2}{\varrho} + \frac{1-\alpha_,^2}{\varrho_,}\right) + y^2\left(\frac{1-\beta^2}{\varrho} + \frac{1-\beta_,^2}{\varrho_,}\right) - 2xy\left(\frac{\alpha\beta}{\varrho} + \frac{\alpha_,\beta_,}{\varrho_,}\right)\right]. \end{cases}$$

Für die weitere Behandlung sind die Fälle zu unterscheiden, daß entweder ϱ und $\varrho_,$ unendlich sind, oder daß wenigstens ϱ end-

lich ist. Der letztere Fall, der sich als der allgemeinere auffassen läßt, setzt die Beobachtung der Erscheinung auf einem auffangenden Schirm oder mit einer auf die Stelle P eingestellten Lupe voraus und wird als der FRESNEL'sche bezeichnet. Wir schicken ihn dem spezielleren ersten voraus, da er sich dem Inhalte des vorigen Paragraphen am nächsten anschließt, und gehen auf jenen im nächsten Abschnitt ein.

Bei endlichen ϱ und $\varrho_{,}$ kann man das in x und y lineäre Glied zum Verschwinden bringen, indem man den Koordinatenanfang in den oben eingeführten Schnittpunkt P_0 legt, also $\alpha + \alpha_{,} = \beta + \beta_{,} = 0$ macht. Dadurch wird dann

$$r + r_{,} = \varrho + \varrho_{,} + \frac{1}{2}\left[x^2(1-\alpha^2) + y^2(1-\beta^2) - 2xy\alpha\beta\right]\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}}\right); \qquad 206')$$

in diesem Ausdrucke sind α und β selbst gleich Null, wenn man die Fläche o so legen kann, daß sie stets normal zu ϱ steht; das Produkt $\alpha\beta$ ist gleich Null, wenn man eine der Axen X oder Y mit der Projektion von $\varrho + \varrho_{,}$ zusammenfallen läßt. In beiden Fällen variiert natürlich das Koordinatensystem mit der Lage des beobachteten Punktes.

Für beide nimmt die Gleichung (205'') die Gestalt an:

$$\mathfrak{A} = \frac{i K_{,} \cos(\varrho_{,}, n)}{\lambda \varrho \varrho_{,}} e^{-i\delta} \int e^{-i(m^2x^2 + n^2y^2)} do, \qquad 206'')$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} m^2 = \frac{\pi}{\lambda}\left(1 - \alpha^2\right)\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}}\right), \quad n^2 = \frac{\pi}{\lambda}\left(1 - \beta^2\right)\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}}\right), \\ \delta = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\varrho + \varrho_{,} - q\right) \end{aligned}\right\} \qquad 206''')$$

ist, und wegen der Vernachlässigung des in $\alpha\beta$ multiplizierten Gliedes in (206') entweder α oder β gleich Null sein muß. Für die reelle Amplitude A ergiebt sich hieraus die Formel [91])

$$A^2 = \frac{K_{,}^2 \cos^2(\varrho_{,}, n)}{\lambda^2 \varrho^2 \varrho_{,}^2}\left(C^2 + S^2\right),$$

in der

$$\left.C = \int \cos(m^2x^2 + n^2y^2)\, do, \quad S = \int \sin(m^2x^2 + n^2y^2)\, do\right\} \qquad 206'''')$$

ist. Diese Gleichungen sind als die Endresultate der Theorie zu bezeichnen, insofern die bei einfarbigem Lichte beobachtbare Intensität mit A^2 proportional ist; fällt weißes Licht ein, so sind in bekannter Weise die einzelnen Bestandteile für sich zu behandeln, und die Resultate zu superponieren.

Führt man in die Formel (206″) ein

$$mx = \xi, \quad ny = \eta, \quad do = dx\,dy = \frac{1}{mn} d\xi\,d\eta,$$

so erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{i K, \cos(\varrho_, , n)}{\lambda \varrho \varrho_, m n} e^{-i\delta} \int e^{-i\xi^2} d\xi \int e^{-i\eta^2} d\eta, \tag{207}$$

wobei die Integrationsgrenzen durch die Gestalt des Diffraktionsschirmes bestimmt sind.

Die Gleichung (206″) oder (207) bildet den Ausgangspunkt für die Behandlung spezieller Probleme der Diffraktion durch einen ebenen Schirm. Wir bemerken, daß die beiden Integrale nach ξ und nach η in nahem Zusammenhange mit dem durch (196) definierten Integral $\mathfrak{J}$ stehen; bezeichnet man nämlich die unteren und die oberen Grenzen von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ durch $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ und $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, ebenso die von ξ und η durch $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ und $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$, so wird für $\bar{\xi}_2 > \bar{\xi}_1$, $\bar{\eta}_2 > \bar{\eta}_1$, je nachdem $\bar{\xi}_1 \cdot \bar{\xi}_2 \gtreqless 0$, $\bar{\eta}_1 \cdot \bar{\eta}_2 \gtreqless 0$ ist,

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\bar{\xi}_1}^{\bar{\xi}_2} e^{-i\xi^2} d\xi &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\mathfrak{J}(\bar{\xi}_2) \mp \mathfrak{J}(\bar{\xi}_1)\right), \\ \int_{\bar{\eta}_1}^{\bar{\eta}_2} e^{-i\eta^2} d\eta &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\mathfrak{J}(\bar{\eta}_2) \mp \mathfrak{J}(\bar{\eta}_1)\right). \end{aligned}\right. \tag{207′}$$

Ehe wir die Formel (207) auf einen speziellen Fall anwenden, wollen wir aus ihr eine allgemeine Folgerung ziehen, die sich ergiebt, wenn alle Grenzwerte $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ unendlich werden. Die Ausdrücke (206‴) für m^2 und n^2 zeigen, daß dies dann stattfindet, wenn

$$\frac{\bar{x}^2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_,}\right) \text{ und } \frac{\bar{y}^2}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_,}\right)$$

unendlich werden, also, da $\bar{x}$ und $\bar{y}$ selbst als unendlich klein erster Ordnung gegen ϱ und $\varrho_,$ betrachtet sind, dann, wenn λ unendlich klein von höherer, als erster Ordnung neben den $\bar{x}$ und $\bar{y}$ ist.

Nehmen wir dies an, so ist damit festgesetzt, daß die Öffnung des Diffraktionsschirmes groß gegen die Wellenlänge ist, und daß die Richtung $\varrho + \varrho_,$ vom leuchtenden nach dem beobachteten Punkt nicht in einem unendlich kleinem Abstand von gewisser Größenordnung am Schirmrand vorbeigeht.

Hier sind dann zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt der Schnittpunkt P_o von $\varrho + \varrho_,$ mit der Schirmebene außerhalb der Öffnung o,

so haben die oberen und die unteren — übrigens unendlichen — Grenzen der beiden Integrale nach ξ und η gleiches, liegt er außerhalb, so entgegengesetztes Vorzeichen. Berücksichtigt man, daß nach (197‴) $\mathfrak{J}(\infty) = \frac{1}{2}(1-i)$ ist, so erkennt man, daß im ersten Falle jedes der Integrale gleich Null, im letzten gleich $(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ wird, also im ersten Falle $\mathfrak{A}$ verschwindet, im zweiten gegeben ist durch

$$\mathfrak{A} = \frac{\pi K_{,} \cos(\varrho_{,}, n) e^{-i\delta}}{\lambda \varrho \varrho_{,} m n}.$$

Setzt man hierein die Ausdrücke (206‴) für m und n, legt die X-Axe in die Projektion von ϱ auf die Schirmebene, setzt also $\beta = 0$, $1 - \alpha^2 = \cos^2(\varrho, n) = \cos^2(\varrho_{,}, n)$, so erhält man

$$\mathfrak{A} = \frac{K_{,}}{\varrho + \varrho_{,}} e^{-i\delta}.$$

Das ist aber dieselbe Amplitude, die nach (204″) bei Abwesenheit des Diffraktionsschirmes von dem leuchtenden nach dem beobachteten Punkte gesendet wird. Unsere Betrachtung ergiebt sonach in einem weit allgemeineren Falle, als S. 774, die Bedingungen, unter denen die Fortpflanzung des Lichtes als geradlinig stattfindend betrachtet werden darf. —

Ist der Schirm einzig durch ein System paralleler Gerader begrenzt, so kann man in eine von diesen die Koordinatenaxe Y legen, wenn man sich auf die Untersuchung des Zustandes in der Ebene beschränkt, welche normal zur Y-Axe durch den leuchtenden Punkt geht. Ist der leuchtende Punkt unendlich fern von dem Schirme, so gilt das Resultat für jede zur Y-Axe normale Ebene.

Unter den gemachten Voraussetzungen sind die Grenzen für y, resp. η, gleich $-\infty$ und $+\infty$; das zweite Integral ist demgemäß gleich $(1-i)\sqrt{\frac{1}{2}\pi} = \sqrt{-i\pi}$, und man erhält, indem man noch durch die Bezeichnung $K_{,}/\varrho_{,} = K$ die vom leuchtenden Punkt nach der Fläche o fortgepflanzte reelle Amplitude einführt,

$$\mathfrak{A} = \frac{K \cos(\varrho_{,}, n) \sqrt{i\pi}}{\lambda \varrho m n} e^{-i\delta} \int e^{-i\xi^2} d\xi. \tag{207″}$$

Dieses Resultat wollen wir auf den im vorigen Paragraphen streng behandelten Fall des einfachen Randes anwenden. Wir lassen dazu den Diffraktionsschirm den Teil der XY-Ebene erfüllen, für den $x > \bar{x}$ ist, wobei $\bar{x}$ eine Konstante bezeichnet. Rücken wir den leuchtenden Punkt ins Unendliche, so ist $\varrho_{,} = \infty$; die einfallenden Wellen werden ebene, und $(\varrho_{,}, n)$ wird mit dem Winkel der ein-

fallenden Wellennormale gegen n, also $\cos(\varrho_{,}, n)$ nach der früheren Bezeichnung mit $\sin\varphi'$ identisch.

Den beobachteten Punkt bestimmen wir durch die Polarkoordinaten r und φ gegen den Schirmrand und die $+X$-Richtung; der Radiusvektor nach dem Koordinatenanfang des XY-Systemes schließt dann mit der $+X$-Richtung den Winkel φ' ein, da er nach S. 783 mit der Richtung nach dem leuchtenden Punkte zusammenfallen soll. Hieraus folgt, daß

$$m^2 = \frac{\pi \sin^2\varphi'}{\lambda\varrho}, \quad n^2 = \frac{\pi}{\lambda\varrho},$$
$$\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\overline{x}} = \frac{\sin\varphi}{\varrho} = \frac{\sin\varphi'}{r}$$

ist, und die Gleichung (207″) wird zu

207‴) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} = K\sqrt{\frac{i}{\pi}}\, e^{-i\delta}\int\limits_{-\infty}^{\overline{\xi}} e^{-i\xi^2}\, d\xi, \quad \text{wobei} \\ \overline{\xi}^2 = \frac{4\pi r}{\lambda}\sin^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\cdot\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\varphi-\varphi')\sin\varphi'}{\sin\varphi} \end{array}\right.$$

ist. Verfügen wir noch über die willkürliche Konstante q so, daß

$$\varrho + \varrho_{,} - q = r\cos(\varphi - \varphi')$$

wird, dann beziehen wir die Phase in P auf die am Schirmrand herrschende, wie dies im vorigen Paragraphen geschah, und erhalten

207⁗) $$\delta = \frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\varphi - \varphi').$$

Vergleicht man das gefundene Resultat mit dem in (195‴) enthaltenen unter Rücksicht auf die Werte (195′), so sieht man leicht, daß sie, bis auf das in $\overline{\xi}^2$ an Stelle von Eins auftretende Verhältnis $\cos^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')\sin\varphi'/\sin\varphi$, vollständig übereinstimmen. Dieser Unterschied kommt um so weniger in Betracht, je näher der beobachtete Punkt der Schattengrenze liegt, an welcher $\varphi = \varphi'$ ist, und so ergiebt sich, daß der Weg durch das Huyghens'sche Prinzip die Gesetze der in der Nähe der Schattengrenze wahrnehmbaren Beugungserscheinungen übereinstimmend mit dem früheren strengeren Wege ergiebt. In größerer Entfernung von der Schattengrenze zeigen sich Differenzen, und die Beobachtung entscheidet sie im allgemeinen, wie zu erwarten, zu Gunsten der strengeren Theorie. —

§ 31. Angenäherte Theorie der Beugungserscheinungen. Ein ebener Schirm bei FRAUNHOFER's Beobachtungsweise. Systeme gleicher Öffnungen; Gitterspektren.

Diffraktionserscheinungen, die von einer unendlich fernen Lichtquelle herrühren und in unendlicher Entfernung von dem Diffraktionsschirme auftreten, sind allerdings wegen der in Wirklichkeit verschwindenden Intensität direkt nach dem FRESNEL'schen Verfahren nicht zu beobachten; man kann sie aber, wie FRAUNHOFER bemerkt hat, in der Weise wahrnehmbar machen, daß man direkt hinter dem Schirme ein auf Unendlich eingestelltes Fernrohr anbringt, dessen Objektiv größer ist, als die Öffnung des Beugungsschirmes, und mit demselben in der ungefähren Richtung nach dem Lichtpunkt hinschaut, der sich seinerseits im Brennpunkt einer Linse befindet und somit ebene Wellen nach dem Schirme sendet.[92]) Die in einem Punkte der Bildebene des Fernrohres zusammenkommenden Wellen besitzen dort — wie dies schon aus dem S. 765 Gesagten folgt — dieselbe Phasendifferenz, mit der sie sich in unendlicher Entfernung vom Schirm und in einer Richtung vereinigen würden, die derjenigen entgegengesetzt ist, von der der genannte Punkt im Fernrohr das Bild darbietet. Ertheilt man der Beobachtungsrichtung die Kosinus α_o, β_o gegen die in der Schirmebene liegenden Axen X und Y, so wird hiernach $\alpha_o = -\alpha$, $\beta_o = -\beta$, wobei α und β die früheren Bezeichnungen sind.

In diesem speziellen Falle braucht man nicht die früheren Kunstgriffe zur Vereinfachung des Ausdruckes (206) für $r + r_,$ anzuwenden; letzterer nimmt wegen der unendlich großen ϱ und $\varrho_,$ von selbst die bequeme Gestalt

$$r + r_, = \varrho + \varrho_, + \big(x(\alpha_o - \alpha_,) + y(\beta_o - \beta_,)\big) \qquad 208)$$

an, und falls man die willkürliche Konstante $q = \varrho + \varrho_,$ setzt, wird sehr einfach

$$R = \frac{2\pi}{\lambda}\Big(x(\alpha_o - \alpha_,) + y(\beta_o - \beta_,)\Big) = (\mu x + \nu y), \qquad 208')$$

wobei μ und ν neue Bezeichnungen sind. Faßt man noch die Konstante $K_, / \varrho\varrho_,$ in den Buchstaben K zusammen, so gilt nach (205″) in dem wichtigsten Falle eines ebenen Schirmes

$$\mathfrak{A} = \frac{i K \cos(\varrho_,, n)}{\lambda}\int e^{-i(\mu x + \nu y)} d o. \qquad 208'')$$

Wird in der Richtung nach der Lichtquelle beobachtet, so ist $\alpha_o = \alpha_,$, $\beta_o = \beta_,$, also $\mu = \nu = 0$, und, falls o die Größe der Öffnung bezeichnet,

208‴) $$\mathfrak{A}_0 = \frac{i K o \cos(\varrho_1, n)}{\lambda}.$$

Eliminiert man mit Hilfe dieses Ausdruckes die Konstante K, so erhält man schließlich

209) $$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_0}{o} \int e^{-i(\mu x + \nu y)} d o.$$

Fallen die Wellen normal auf den Schirm auf, so ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$; da deutliche Erscheinungen meist nur in Richtungen wahrgenommen werden, die nahezu der Einfallsrichtung entgegengesetzt sind, so ist dann α_0 und β_0 klein, und man kann sie als die zur X- und zur Y-Axe parallelen rechtwinkligen Koordinaten der Stelle auf einer Kugel vom Radius Eins auffassen, nach welcher, von einem Punkt des Schirmes aus konstruiert, die Beobachtungsrichtung zielt, wobei der Anfangspunkt für α_0 und β_0 die Richtung nach der unendlich fernen Lichtquelle bestimmt; μ und ν sind dann ebenso Koordinaten auf einer Kugel vom Radius $2\pi/\lambda$. Diese Bemerkung gestattet, von dem in jedem Falle mit dem Fernrohr wahrnehmbaren Diffraktionsbild sich eine deutliche Vorstellung zu verschaffen.

Gehen wir von den komplexen Amplituden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ zu den reellen A und A_0 über, so folgt aus (209) sogleich

209′) $$A^2 = \left(\frac{A_0}{o}\right)^2 (\Gamma^2 + \Sigma^2),$$

wobei bedeutet

209″) $$\Gamma = \int \cos(\mu x + \nu y)\, d o, \quad \Sigma = \int \sin(\mu x + \nu y)\, d o.$$

Die Formeln können als die Endformeln der angenäherten Theorie der FRAUNHOFER'schen Beugungserscheinungen gelten, da bei einfallendem einfarbigen Licht die beobachtbare Intensität mit A^2 proportional ist. Fällt weißes Licht ein, so ist in oft bemerkter Weise jeder Bestandteil einzeln zu behandeln und die resultierende Erscheinung durch Superposition der den Bestandteilen entsprechenden abzuleiten.

Diese Integrale Γ und Σ sind bei weitem einfacher, als die bei den FRESNEL'schen Erscheinungen auftretenden C und S, und demgemäß lassen sich für eine große Anzahl verschiedener Formen der Diffraktionsschirme die Gesetze der ihnen entsprechenden FRAUNHOFER'schen Erscheinungen verhältnismäßig leicht erhalten.[93]) —

Wir knüpfen an die Gleichungen (209) bis (209″) nur einige allgemeine Bemerkungen.

Die Stellen des Diffraktionsbildes, in denen die Intensität verschwindet, sind durch $\Gamma^2 + \Sigma^2 = 0$, d. h. durch gleichzeitiges Ver-

schwinden von Γ und Σ, gegeben, sind also im allgemeinen diskrete Punkte; nur in dem Fall, daß die Öffnung o in Bezug auf eine Gerade symmetrisch ist, erfüllen sie ein System von Kurven kontinuierlich. In der That, legt man eine Koordinatenaxe in die Symmetrielinie, so ist Σ gleich Null.

Vertauscht man in (209) μx mit ξ, νy mit η, also $\mu \nu d o = \mu \nu d x d y$ mit $d\omega = d\xi d\eta$ und $\mu \nu o$ mit ω, so gilt

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_0}{\omega} \int e^{-i(\xi+\eta)} d\omega, \qquad 209''')$$

und die Grenzen des Integrales sind gewisse Werte von $\xi = \mu x$, $\eta = \nu y$. Hieraus ergiebt sich, daß zwei Öffnungen o und o', von denen die eine dadurch in die andere übergeht, daß man sie längs der Koordinatenaxen in bestimmten Verhältnissen k_1 und k_2 dilatiert, Diffraktionsbilder liefern, von denen das zweite in denjenigen Richtungen die gleiche relative Intensität zeigt, wie die erste, die gegeben sind durch

$$(\alpha_0' - \alpha_,) = (\alpha_0 - \alpha_,) k_1, \quad (\beta_0' - \beta_,) = (\beta_0 - \beta_,) k_2, \qquad 209'''')$$

wobei α_0, β_0 und α_0', β_0' die korrespondierenden Richtungskosinus in den beiden Fällen bezeichnen.

Wird also etwa die Dimension der Öffnung nach der Y-Axe gleichförmig vergrößert, nach der X-Axe gleichförmig verkleinert, so kontrahiert sich das Diffraktionsbild in der ersteren und dilatiert sich in der letzteren Richtung. War die Öffnung zunächst ein Kreis und wird sie zu einer Ellipse von gleicher Fläche und von nach der Y-Axe gestreckter Gestalt, schließlich zu einem feinen Spalt deformiert, so verwandeln sich die ursprünglich vorhandenen hellen und dunkeln Kreisringe in angenähert elliptische und nach der X-Axe gestreckte, schließlich in eine Reihe punktförmiger Maxima und Minima, die längs der X-Axe einander folgen.[94])

Weiter erkennt man, daß, welche endliche Gestalt immer die Schirmöffnung besitzt, stets durch ihre proportionale Verkleinerung der Zustand erreicht werden kann, wo das gebeugte Licht kein Minimum zeigt, wo nämlich die das erste Minimum bestimmenden α_0' und β_0' größer als Eins werden, somit also imaginären Winkeln entsprechen. Gleiches läßt sich auch aus den Formeln (209') und 209'') ableiten, welche ergeben, daß für gegen die Wellenlänge kleine Öffnungen $A^2 = A_0^2$, also konstant wird, und analoges folgt für die FRESNEL'sche Anordnung aus den Formeln (206''''); es zeigt sich also, daß derartig kleine Öffnungen als leuchtende Punkte wirken, wie das bereits auf S. 527 und 765 benutzt worden ist. —

Enthält der Diffraktionsschirm eine Öffnung o_1 und innerhalb derselben einen kleinen schwarzen Schirm von der Fläche o_2, so tritt an die Stelle von (209)

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_0}{o_1 - o_2}\left(\int\limits_{(o_1)} e^{-i(\mu x + \nu y)} d\,o_1 - \int\limits_{(o_2)} e^{-i(\mu x + \nu y)} d\,o_2\right).$$

Ist o_1 hinreichend groß gegen die Wellenlänge, so ist das erste Integral für alle Richtungen gleich Null, mit Ausnahme der nach dem leuchtenden Punkt hin; demgemäß ist $\mathfrak{A}$ für alle anderen Richtungen durch das zweite Integral allein gegeben, das bis auf das Vorzeichen mit dem übereinstimmt, welches einer Öffnung von der Größe und Gestalt von o_2 entspricht. Da aber die reelle Amplitude von dem Vorzeichen der komplexen unabhängig ist, so ist die Intensität in allen den genannten Richtungen mit derjenigen identisch, welche bei Benutzung eines Schirmes mit der Öffnung o_2 wahrgenommen wird. —

Ein besonderes Interesse, einmal wegen der bedeutenden Intensität und deshalb leichten Beobachtbarkeit, sodann wegen gewisser praktischer Anwendungen besitzen die Erscheinungen, welche durch Systeme gleich geformter und gleich orientierter Öffnungen, d. h. durch sogenannte Gitter hervorgebracht werden. Führt man für jede einzelne o_h von ihnen ein spezielles Koordinatensystem X', Y' ein, indem man für sie $x = x' + a_h$, $y = y' + b_h$ setzt, so kann man schreiben

210) $$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_0}{o}\int e^{-i(\mu x' + \nu y')} d\,o \,.\, \sum e^{-i(\mu a_h + \nu b_h)},$$

wo nun das Integral über die Fläche einer dieser Öffnungen, die Summe über die Koordinaten a_h, b_h der in den verschiedenen Öffnungen einander entsprechenden Anfangspunkte zu erstrecken ist. Für die resultierende reelle Amplitude folgt hieraus

210′) $$A^2 = \left(\frac{A_0}{o}\right)^2 (\Gamma^2 + \Sigma^2)(\gamma^2 + \sigma^2),$$

worin Γ und Σ die Bedeutung der Integrale (209″) für eine einzelne Öffnung haben und

210″) $$\gamma = \Sigma \cos(\mu a_h + \nu b_h), \quad \sigma = \Sigma \sin(\mu a_h + \nu b_h)$$

ist; führen wir die einer einzigen Öffnung entsprechende Amplitude A_1 ein, so können wir nach (209′) auch schreiben

210‴) $$A^2 = A_1^2 (\gamma^2 + \sigma^2).$$

Das Interferenzbild kann also aus dem der einzelnen Öffnung entsprechenden durch Multiplikation der an jeder Stelle stattfindenden

Amplitude mit dem Faktor $(\gamma^2 + \sigma^2)$ abgeleitet werden, der insbesondere durch sein Verschwinden zu den Nullstellen des primären Bildes neue hinzufügt. Über letztere gilt ersichtlich der Satz, daß sie Kurven kontinuierlich erfüllen, wenn die Verteilung eine Symmetriegerade besitzt, im anderen Falle aber diskrete Punkte bilden.

Ist die Anzahl der Öffnungen sehr groß, und ist ihre Verteilung ganz regellos, so wird $\gamma^2 + \sigma^2$ nahezu konstant sein und die resultierende Erscheinung sich nur durch die größere Intensität von der durch eine Öffnung bewirkten unterscheiden. Analoges gilt von der Wirkung einer großen Anzahl gleicher und gleich orientierter, aber regellos verteilter dunkler Schirme, — ein Fall, der in Beziehung steht zu der Beugung, welche die bei Nebel in der Luft schwebenden Wasserbläschen verursachen.

Von den Fällen regelmäßiger Anordnung ist der wichtigste der, daß die Öffnungen, z. B. von parallelen Geraden begrenzte Spalten, längs einer Geraden in gleichen Abständen angeordnet sind. Setzt man demgemäß $b_h = 0$, $a_h = ha$, wo $h = 0, 1, \ldots n-1$ ist und n die Anzahl der Öffnungen bezeichnet, so wird

$$\gamma = \frac{\cos\frac{1}{2}(n-1)\mu a \sin\frac{1}{2} n \mu a}{\sin\frac{1}{2}\mu a}, \quad \sigma = \frac{\sin\frac{1}{2}(n-1)\mu a \sin\frac{1}{2} n \mu a}{\sin\frac{1}{2}\mu a},$$

also

$$A^2 = n^2 A_1^2 \left(\frac{\sin\frac{1}{2} n \mu a}{n \sin\frac{1}{2}\mu a}\right)^2.$$

Für sehr große n überwiegt die Intensität an den Stellen, für welche

$$\tfrac{1}{2}\mu a = k\pi, \quad k = 0, 1, 2 \ldots,$$

also

$$\alpha_o - \alpha_, = \frac{k\lambda}{a}$$

ist, weitaus die an allen übrigen vorhandene; wenn das Gitter aus Spalten besteht, wird somit das von einfarbigem Licht herrührende Diffraktionsbild eine Reihe diskreter Lichtpunkte darstellen.

Die Bestimmung der ihnen entsprechenden Beobachtungsrichtungen stellt die klassische Methode zur Ableitung genauer Werte der Wellenlängen λ, resp. der Perioden τ dar, denn man kann durch Verkleinerung des Abstandes a der benachbarten Öffnungen α_o stark vergrößern und dabei die notwendig durch die Kleinheit jeder einzelnen geschwächte Lichtintensität durch Steigerung der Öffnungszahl wieder heben.

Bei sehr schmalen Spalten wird allerdings die Grundvoraussetzung der Theorie, daß in der sie deckenden Fläche O_o der

Schwingungszustand derselbe wäre, wie bei Abwesenheit des Schirmes, in hohem Grade bedenklich; man bemerkt indessen leicht, daß die Lage der oben bestimmten Maxima von dem speziellen in jeder Spalte stattfindenden Schwingungsgesetz unabhängig ist und sich immer gleichmäßig ergiebt, wenn nur der Schwingungszustand in allen Spalten der gleiche ist, was man stets annehmen darf, wenn die Spalten gleiche Breite und gleichartige Ränder besitzen.

Um die Beobachtung zu erleichtern, wendet man in der Praxis statt eines einzigen Lichtpunktes deren eine Reihe von einander unabhängiger an, die durch einen beleuchteten Spalt geliefert werden; es erhalten dann, wie leicht zu übersehen, die oben erwähnten Maxima die Gestalt von Bildern dieses Spaltes. Benutzt man statt einfarbigen Lichtes weißes, so werden die einzelnen Spaltbilder zu Spektren auseinandergezogen.

Die Messungsmethode der Wellenlänge mit Hilfe dieser sogenannten Gitterspektren ist sehr vollkommen; ihre Anwendbarkeit ist nicht auf das Gebiet der dem Auge direkt wahrnehmbaren Schwingungen beschränkt, sondern liefert bei Lichtquellen, die, wie gewisse glühende Metalldämpfe, Schwingungen von einzelnen diskreten Perioden oberhalb und unterhalb der Grenze der direkten optischen Wahrnehmbarkeit aussenden, auch für diese zuverlässige Bestimmungen. Dabei werden die ultravioletten Schwingungen durch ihre chemischen, die ultraroten durch ihre thermischen Wirkungen nachgewiesen. Die Grenzen der so erhaltenen Perioden sind $0,33.10^{-15}$ und 10^{-13} Sekunden, die der ihnen in Luft entsprechenden Wellenlängen 10^{-4} und 3.10^{-2} Millimeter. —

§ 32. Überleitung zur Strahlenoptik. Das Kirchhoff'sche Emissions- und Absorptionsgesetz.

Bisher haben wir bei der Anwendung der Gleichung (204) des Huyghens'schen Prinzipes ausdrücklich die Lichtquellen außerhalb des von der Fläche o umgrenzten Raumes k angenommen; dieselbe läßt sich aber leicht auf den Fall ausdehnen, daß eine endliche Anzahl in endlichen Entfernungen von einander befindlicher Lichtpunkte innerhalb k liegen. Da die Funktion $\mathfrak{F}$ in diesen Punkten unendlich wird, so müssen letztere durch kleine Oberflächen o_h, am einfachsten Kugeln, von dem Integrationsgebiet ausgeschlossen werden. Benutzen wir dann für jede dieser Lichtquellen (h) einen Ansatz von der Form (204″) und lassen wir den Kugelradius klein gegen λ sein, so lautet an der Kugelfläche o_h vom Radius R_h nach (204‴)

das höchste Glied der Funktion $\mathfrak{O}$ nunmehr $\mathfrak{K}_h e^{iT_h}/r_h R_h^2$, falls r_h den Wert von r für die Kugelfläche o_h bezeichnet; der Anteil, der hierdurch zu dem Ausdruck (204) gegeben wird, berechnet sich zu $\mathfrak{K}_h e^{iT_h}/r_h$, d. h. zu $\mathfrak{F}_h$ selbst, wenn unter $\mathfrak{F}_h$ der Wert von $\mathfrak{F}_{abc}(t)$ verstanden wird, der bei alleiniger Anwesenheit des Lichtpunktes (h) eintritt. Wir erhalten somit statt (204)

$$\mathfrak{F}_{abc}(t) = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{O}\, d o + \sum \mathfrak{F}_h, \tag{211}$$

wobei das Integral nur noch über die äußere Begrenzung des Raumes k zu erstrecken ist. Besteht diese Begrenzung aus der unendlichen Kugelfläche und den Oberflächen o_i irgend welcher im homogenen Medium befindlichen fremden Körper k_i, so verschwindet das Integral über die erstere nach S. 781, und die obige Formel kann zur angenäherten Berechnung der Einwirkung dienen, die jene Körper auf die Ausbreitung des von den Quellen ausgesandten Lichtes üben. Freilich ist dazu notwendig, an den Oberflächen o_i die Werte von $\mathfrak{F}$ und $\partial \mathfrak{F}/\partial n$ vorzuschreiben, was noch in erhöhtem Maße als früher die Heranziehung empirischer Resultate erfordert.

Die einfachsten Fälle von prinzipieller Wichtigkeit sind die folgenden.[97])

In dem nach außen unbegrenzten durchsichtigen Medium befindet sich ein Lichtpunkt und ein absolut schwarzer, ringsum nach außen konvexer Körper; auf der dem Lichtpunkt P_1 zugewandten Seite des letzteren nimmt man nach Phase und Amplitude dieselbe Bewegung an, die dort bei Abwesenheit des schwarzen Körpers stattfände, auf der abgewandten setzt man $\mathfrak{F}$ und $\partial \mathfrak{F}/\partial n$ gleich Null. Die Formel (211) bildet dann bei endlichen Wellenlängen die Grundlage für die Theorie der hier stattfindenden Beugungserscheinungen, bei unendlich kleinen für den Nachweis der sogenannten geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes, wie dies S. 774 und 785 in je einem speziellen Falle gezeigt worden ist.

Ist der nach außen überall konvexe Körper längs eines dem leuchtenden Punkt P_1 zugewandten und gegenüber dessen Entfernung kleinen Flächenstückes o' nicht absolut schwarz, übrigens aber undurchsichtig, so nimmt man auf o' außer den wie oben fortgepflanzten Bewegungen noch reflektierte an, deren Gesetze durch die in den früheren Kapiteln abgeleiteten Grenzbedingungen bestimmt werden; hat ein dem Lichtpunkt abgewandtes Flächenstück die gleiche Eigenschaft, so nimmt man dort nichtsdestoweniger $\mathfrak{F}$ und $\partial \mathfrak{F}/\partial n$ gleich Null. Auch hier erhält man durch Formel (211) zunächst allgemeinere Beugungserscheinungen gegeben; bei unendlich kleiner

Wellenlänge folgen die Phänomene der sogenannten Reflexion von Lichtstrahlen und Strahlenbündeln.

Ist ein nach außen konvexer Körper, der einen Lichtpunkt enthält, durchsichtig, aber bis auf ein gegen seine Entfernung vom Lichtpunkt kleines Stück o' seiner Oberfläche mit einem absolut schwarzen Überzug versehen, so wendet man die Formel (211) auf den Außenraum an und bestimmt die an der freien Oberflächenstelle o' vorhandenen Werte $\mathfrak{F}$ und $\partial \mathfrak{F} / \partial n$ durch die Annahme, daß im Innern die Bewegung sich vom Lichtpunkt bis zu jener Oberfläche so fortpflanzt, als wenn eine Begrenzung gar nicht vorhanden wäre, und daß die austretende nach den in den früheren Kapiteln entwickelten Grenzbedingungen aus jener folgt. Wie oben ergeben sich hier zunächst allgemeinere Beugungserscheinungen, und bei verschwindender Wellenlänge die Phänomene der sogenannten Brechung von Lichtstrahlen und Strahlenbündeln.

Die Gesetze dieser Reflexionen und Brechungen kommen in letzter Instanz darauf hinaus, daß man bei unendlich kleiner Wellenlänge jedes Element der entstehenden, stetig gekrümmten Wellenoberflächen, in welchen der Schwingungszustand stetig variiert, als eine homogene ebene Welle behandeln und, wenn die Fortpflanzung in einem isotropen Medium geschieht, bei seiner Ausbreitung durch ein System von Normalen begrenzen darf, was nach dem besonders in § 28 Entwickelten nicht Wunder nehmen kann.

Auf diesen Resultaten beruht ein ausgedehnter spezieller Teil der Optik, den man passend als Strahlenoptik bezeichnet hat, der wesentlich geometrischen Charakter besitzt und deshalb hier keine Behandlung finden kann.

Innigere Beziehungen zu den bisher dargestellten Gegenständen hat ein Problem, welches sich auf die längs der Strahlen fortbewegte Energie bezieht und hier insbesondere deshalb nicht ausführlich besprochen werden soll, weil die bisher allein gefundene Methode zu seiner Lösung vollständig aus dem Rahmen unserer Darstellung der Optik herausfällt.

Durch epochemachende Versuche Kirchhoff's ist festgestellt, daß gewisse glühende Metalldämpfe, die nur Wellen von wenigen diskreten Perioden aussenden und die daher Lichtquellen von besonders einfacher Natur darstellen, Schwingungen von eben jenen Perioden, und sie allein, absorbieren.[98])

Es lag die Vermutung nahe, daß diese Beziehung eine über den Kreis jener Beobachtungen hinausgehende Bedeutung haben möchte; Kirchhoff hat dies durch eine theoretische Überlegung als

richtig erwiesen und die rein qualitative Beziehung zugleich zu einer quantitativen vertieft.[99])

Seine Entwickelungen beziehen sich ausschließlich auf Körper, die durch Abgabe und Aufnahme von Schwingungsenergie nur solche Veränderungen erleiden, die durch Wärmezufuhr oder -entziehung rückgängig gemacht werden können, und basieren auf den beiden Grundprinzipien der mechanischen Wärmetheorie. Das erste dieser Prinzipien, oder das Prinzip der Äquivalenz verschiedener Energien (Bd. I, S. 499), ergiebt, auf einen derartigen Körper angewandt, daß bei stattfindender Strahlung dessen thermische Energie in jedem Moment um den Betrag der ausgestrahlten Schwingungsenergie ab-, um den der absorbierten zunehmen muß. Aus dem zweiten oder dem Clausius'schen Prinzip (Bd. I, S. 503) ergiebt sich, daß in einem thermisch abgeschlossenen Systeme von derartigen, und zwar gleichtemperierten, Körpern Temperaturdifferenzen nicht ohne äußere Arbeitsleistungen entstehen können, weil das Entstehen einer solchen Differenz den Übertritt einer Wärmemenge aus einem kälteren in einen wärmeren Körper involvieren würde. Aus beiden Prinzipien folgt somit, daß in einem abgeschlossenen Systeme gleichtemperierter Körper der vorausgesetzten Art jeder Teil in jedem Zeitmoment den gleichen Betrag an Energie aufnimmt und abgiebt.

Von diesem Resultat kann man nun zum Zwecke der Ableitung des gesuchten Zusammenhanges zwischen Absorption und Emission in der Weise Anwendung machen, daß man aus den von einem strahlenden Körper ausgehenden Wellen durch geeignet aufgestellte absolut schwarze Schirme ein feines Strahlenbündel absondert und dasselbe, bei möglichster Unveränderlichkeit der übrigen Umstände, in bekannter Weise durch Reflexion und Brechung verändert, event. im veränderten Zustand nach dem Ausgangspunkt zurückführt; dabei muß dann stets die Summe aller von dem Körper aufgenommenen Energie gleich Null bleiben.

Es genüge, die Anwendung dieser Methode an einem einfachsten Beispiele zu zeigen, das nur absolut schwarze Körper benutzt, die zwar keine Wellen reflektieren und hindurchlassen, aber dennoch dergleichen, namentlich von sehr großen Perioden, ausstrahlen, somit also einen Grenzfall strahlender Körper darstellen.

Sind in einer schwarzen, nach außen thermisch isolierten Hülle zwei gleichfalls schwarze Körper (1) und (2) vorhanden, geschieden durch ein System schwarzer Schirme, die nur ein feines Strahlenbündel von dem einen zum anderen gelangen lassen, so darf das Energiegleichgewicht von (1) nicht geändert werden, wenn man dem

Körper (2) beliebig wechselnde Lagen giebt oder ihn mit anderen schwarzen, gleich temperierten Körpern vertauscht. Hieraus folgt aber ersichtlich, daß durch dasselbe Öffnungssystem, also in demselben Strahlenbündel, jeder schwarze Körper gleicher Temperatur die gleiche Gesamtenergie ausstrahlt.

Dies Gesetz kann man mit Hilfe komplizierterer Anordnungen, welche Vorgänge der Reflexion und Brechung, der Interferenz und Polarisation benutzen, dahin erweitern, daß diese Gleichheit auch für die einzelnen Bestandteile bestimmter Periode und bestimmter Polarisationsrichtung stattfindet; in dieser Gestalt bildet die erhaltene Beziehung die Grundlage für die Behandlung nicht-schwarzer Körper, die in der oben beschriebenen Vorrichtung an Stelle des Körpers (1) gebracht und dem Fundamentalsatz unterworfen werden.

Um das Resultat dieser Überlegungen einfach auszudrücken, dienen die Begriffe des Emissions- und des Absorptionsvermögens eines Körpers, die, wie folgt, definiert sind.

Wird in der oben beschriebenen Weise durch schwarze Schirme von den gesamten, durch einen Körper ausgestrahlten Schwingungen ein feines Bündel abgezweigt, werden seine Schwingungen nach zwei, resp. drei, zu einander normalen Richtungen zerlegt, und entspricht der Komponente nach einer solchen Richtung p für die Anteile mit Perioden zwischen τ und $\tau + d\tau$ eine Energieströmung von der Dichte $E d\tau$, so heißt E das Emissionsvermögen des Körpers, von dem das Strahlenbündel ausgeht, in der Richtung des Bündels, für Schwingungen von der Polarisationsrichtung p und von der Periode τ.

Fällt dagegen ein durch dasselbe System von Schirmen begrenztes feines Strahlenbündel beliebiger Herkunft auf den vorausgesetzten Körper, und absorbiert derselbe von der Energie der auffallenden Schwingungen mit der Polarisationsrichtung p und mit der Periode τ den Bruchteil A, während er den Rest reflektiert oder durchläßt, so heißt A das Absorptionsvermögen des Körpers für Schwingungen, welche in der Richtung des Bündels auffallen, die Polarisationsrichtung p und die Periode τ besitzen.

Unter Benutzung dieser Begriffe lautet der Kirchhoff'sche Satz: Das Verhältnis einander entsprechender Emissions- und Absorptionsvermögen ist bei derselben Temperatur für alle Körper von gleicher Größe.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, wolle man bemerken, daß die Größen A und E keineswegs bei gegebener Strahlen- und Polarisationsrichtung, sowie bei gegebener Periode und Temperatur der Substanz des Körpers individuell sind, sondern daß sie z. B. ganz

wesentlich von dessen Gestalt und Größe abhängen. Der Satz ist somit ein überaus allgemeines, für alle Arten gestrahlter Energie, sei sie nun optisch wahrnehmbar oder nicht, gültiges Integralgesetz, das aber doch zu vollständigem Verständnis die Zurückführung auf ein Differentialgesetz, welches nur der Substanz des Körpers und ihrem Zustand individuelle Parameter enthält, gebieterisch verlangt. Ein solches Differentialgesetz würde eine Erweiterung der früheren Differentialgleichungen für absorbierende Medien bilden müssen, in denen die, etwa aus chemischen Quellen fließende Arbeit Ausdruck fände, welche das Volumenelement zu einer Quelle von Schwingungsenergie macht, also zum Leuchten bringt. Dergleichen Erweiterungen sind bislang noch nicht gefunden, und hierin liegt ein weiterer Umstand, der das Gebiet der Emission von den im Vorstehenden behandelten Gegenständen der Optik scheidet.

Beiläufig möge noch erwähnt werden, daß die Tragweite des KIRCHHOFF'schen Satzes, dessen berühmteste Anwendung die Erklärung der sogenannten FRAUNHOFER'schen Linien im Sonnenspektrum bildet, neuerdings nach der quantitativen Seite dadurch erheblich eingeschränkt ist, daß begründete Zweifel darüber erhoben sind, ob die Grundvoraussetzung seiner Ableitung, nämlich die Annahme von Körpern, welche beim Strahlen nur solche Veränderungen erleiden, die durch Zufuhr oder Entziehen von Wärme rückgängig gemacht werden können, gerade in dem wichtigsten Falle des eigentlichen Leuchtens irgendwo in Strenge realisiert ist.[100])

Litteratur zum V. Teil.

BEER, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig 1853. — F. NEUMANN, Vorlesungen über theoretische Optik. Leipzig 1885. — KIRCHHOFF, Vorlesungen über mathematische Optik. Leipzig 1891. — VOLKMANN, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Leipzig 1891. — DRUDE, Physik des Äthers. Stuttgart 1894. — KETTELER, Theoretische Optik. Braunschweig 1885. — VERDET, Wellentheorie des Lichtes. Übers. von EXNER. Braunschweig 1881, 1887. — MASCART, Traité d'optique. Paris 1889, 1891, 1893. — POINCARÉ, Théorie mathématique de la lumière. I u. II. Paris 1889 und 1892. — BASSET, Treatise on physical optics. Cambridge 1892.

I. Kapitel. [1]) O. RÖMER, Journal des Sçavans 1676 (Nouv. Édit. Paris 1717), S. 133. — [2]) FIZEAU, Compt. rend. XXIX, S. 90, 1849; Pogg. Annalen **79**, S. 167, 1849. FOUCAULT, Compt. rend. XXX, S. 551, 1850; LV, S. 501, 792, 1862; Pogg. Annalen **81**, S. 434, 1850; **118**, S. 485, 580, 1863; Ann. chim. phys. (3) XLI, S. 129, 1854. — [3]) LAMBERT, Photometrie (Augsburg 1760). Klassikerausgabe Nr. 31—33. — [4]) NEWTON, Optice (Lat. Genf u. Lausanne, 1740), Liber II, Pars III, Prop. XII. — [5]) TH. YOUNG, Lectures on Natural Philosophy, London 1807. — [6]) JAMIN, Compt. rend. XLII, S. 482; Ann. chim. phys. (3) LII, S. 164, 1858. — [7]) TH. YOUNG, Phil. Trans. London I, S. 34, 387, 1802. — [8]) LIPPICH, Wiener Sitzungsber. (2) **72**, S. 355, 1875. — [9]) HUYGHENS, Traité de la lumière 1678 (Leyden 1690), S. 89—91. Klassikerausgabe Nr. 20, Kap. V. — [10]) FRESNEL und ARAGO, Ann. chim. phys. (2) X, S. 288—305, 1819; Oeuvr. compl. de FRESNEL I, S. 385, 410, 507; Oeuvr. compl. d'ARAGO X, S. 132. — [11]) FIZEAU und FOUCAULT, Ann. chim. phys. (3) XXVI, S. 138—148, 1849; XXX, S. 146, 1850. FIZEAU, Ann. chim. phys. (3) LXVI, S. 431—440, 1862; Pogg. Ann. **119**, S. 87, 1863. — [12]) STOKES, Phil. Mag. (4) III, S. 316, 1852.

II. Kapitel. [13]) LAMÉ, Leçons sur la théorie math. de l'élasticité, Paris 1852; Leç. XVII, § 93. KIRCHHOFF, Abhandl. d. Berl. Akad. 1876, S. 13; Ges. Abhandl. S. 366. — [14]) FRESNEL, Mémoire sur la double réfraction, 1821; Mém. Acad. d. Sc. Paris VII, 1827, S. 132. — [15]) FRESNEL, l. c. S. 110, 115. — [16]) F. NEUMANN, Pogg. Ann. **33**, S. 277, 1834; Vorles. über theoretische Optik, S. 185, 186. — [17]) A. SMITH, Trans. Cambr. Phil. Soc. VI (1), S. 85, 1836; Phil. Mag. XII, S. 335, 1838. SENFF, Exper. und theoret. Unters. über die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung und Polarisation des Lichtes in den Krystallen des zwei- und eingliedrigen Systemes, Dorpat 1837. — [18]) FRESNEL, Mém. de l'Acad. des Sciences VII, S. 136, 1821; Pogg. Ann. **23**, S. 519, 1831. — [19]) FRESNEL, l. c. S. 136, 137. — [20]) HAMILTON, Trans. Irish Acad. XVII, S. 132, 1832. — [21]) F. NEUMANN, Theoret. Unters. der Gesetze der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier vollkommen durchsichtiger Medien, S. 9; Abhandl. Akad. Berlin 1835. — [22]) LLOYD, Trans. Irish Acad. XVII, S. 145, 1833; Phil. Mag. (3) II, S. 112, 207, 1833; Pogg. Ann. **28**, S. 91, 104, 1833. — [23]) KIRCHHOFF, Berl. Sitzungsber. 1876, S. 78. LIEBISCH, N. Jahrb. f. Mineral. 1885, I, S. 251, II, S. 200. — [24]) RUDBERG, Pogg. Ann. **17**, S. 1, 1828. GLAZEBROOK, Proc. Roy. Soc. XXVII, S. 496, 1878; Phil. Trans. London 1879, I, S. 287; 1880, II, S. 421. HASTINGS, Americal Journ. of Sc. (3) XXXV, S. 60, 1888. DANKER, N. Jahrb. f. Mineral. Beil.-Bd. **4**, S. 241, 1885. — [25]) DES CARTES, La Dioptrique,

Discours second. Leyden 1637. — [26]) F. Neumann, Theoret. Unters. der Gesetze der Reflexion und Brechung etc. Abh. Berl. Akad. 1835, § 2 u. 24. — [27]) Mac Cullagh, Trans. Irish Acad. XVIII, 1837; Journ. de Math. VII, 1842. — [28]) F. Neumann, l. c. § 8, S. 33. Mac Cullagh, Coll. Works S. 99, 111, 114. — [29]) Fresnel, Ann. chim. phys. (2) XVII, S. 190, 312, 1821; XLVI, S. 225, 1831; Oeuvres compl. I, S. 640, 767. — [30]) Brewster, Phil. Trans. 1815, S. 125. — [31]) F. Neumann, Pogg. Ann. 40, S. 497, 1837. — [32]) Fresnel, Ann. chim. phys. (2) XXIX, S. 175—87, 1825; XLVI, S. 241—53, 1831; Oeuvres compl. I, S. 749. — [33]) Voigt, Wied. Ann. 22, S. 226, 1884. — [34]) Hooke, Micrographia, London 1665, S. 64. Newton, Optice, Liber II, Pars I. — [35]) Jamin, Ann. chim. phys. (3) LII, S. 166, 1858. — [36]) Quincke, Pogg. Ann. 127, S. 1, 199, 1866. Voigt, Göttinger Nachr. 1884, S. 49. — [37]) F. Neumann, Theoret. Optik, Vorl. XII; Pogg. Ann. 33, S. 257, 1834. Kirchhoff, Pogg. Ann. 108, S. 567, 1859. Mütrich, Pogg. Ann. 121, S. 193, 388, 1864. — [38]) Bravais, Ann. chim. phys. (3) XLIII, S. 139, 1855. Mascart, Traité d'optique II, S. 61, 1891. — [39]) Pockels, Wied. Ann. 37, S. 155, 1889. — [40]) Pockels, l. c. S. 158—161. — [41]) F. Neumann, Abh. d. Berl. Akad. 1841, II, S. 1; Pogg. Ann. 54, S. 449, 1841. — [42]) Pockels, Wied. Ann. 39, S. 440, 1890. — [43]) G. Müller, Publ. d. astrophys. Observ. Potsdam 4, S. 151, 1885. Pockels, Wied. Ann. 37, S. 305, 389. — [44]) Pockels, Neues Jahrb. f. Mineral. Beil.-Bd. 7, S. 253, 1890. — [45]) Röntgen, Wied. Ann. 18, S. 213, 534, 1883; 19, S. 319, 1883. Kundt, Wied. Ann. 18, S. 228, 1883. Pockels, Einfluß des elektrostat. Feldes auf das opt. Verhalten piëzoelektr. Kryst., Abh. Ges. d. Wiss. Göttingen 39. — [46]) Pockels, l. c. S. 82, 148, 202. — [47]) Kerr, Phil. Mag. (4) L, S. 337, 446, 1875; (5) VIII, S. 185, 229, 1879; (5) IX, S. 114, 1880; (5) XXXVII, S. 380, 1894. — [48]) Fizeau, Compt. rend. XXXIII, S. 349, 1851; Pogg. Ann. Erg.-Bd. 3, S. 457; Ann. chim. phys. (3) LVII, S. 385, 1859. Michelson u. Morley, Amer. Journ. of Sc. (3) XXXI, S. 377, 1886. — [49]) Voigt, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1887, Nr. 8, S. 12; Wied. Ann. 35, S. 370, 1888. — [50]) Voigt, Wied. Ann. 23, S. 493—511, 1884; Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1894, Nr. 2, S. 5. — [51]) Cornu, Compt. rend. XCIX, S. 1045—1050, 1884. — [52]) Cauchy, Compt. rend. XV, S. 916, 1842. [Boussinesq, Liouville's Journ. (2) XIII, S. 330, 1868.] v. Lang, Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8, S. 608, 1878; Wiener Sitzungsber. 75 (2), S. 719, 1877; Voigt, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1894. Nr. 2, S. 7. — [53]) Clebsch, Crelle's Journ. 57, S. 343—45, 1860. — [54]) Clebsch, l. c. S. 343. — [55]) Voigt, Wied. Ann. 30, S. 190, 1887. — [56]) Fresnel. Ann. chim. phys. (2) XXVIII, S. 147, 1822; Oeuvres compl. I, S. 731. — [57]) Broch, Repert. d. Phys. 7, S. 91, 113, 1846; Ann. chim. phys. (3) 34, S. 119, 1852. Stefan, Wiener Sitzungsber. 50 (2), S. 88; Pogg. Ann. 122, S. 631, 1864. V. v. Lang, Wiener Sitzungsber. 74 (2), S. 209, 1876. Soret u. Sarasin, Arch. sc. phys. nat. (2) LIV, S. 253, 1875; (3) VIII, S. 5, 97, 201, 1882. Desains, Pogg. Ann. 128, S. 487, 1866; Compt. rend. LXXXIV, S. 1056, 1877. Hussel, Wied. Ann. 43, S. 498, 1891. — [58]) Pasteur, Compt. rend. XXVI, S. 535, 1847; XXVIII, S. 477, 1848; XXXI, S. 480, 1850; XXXV, S. 176, 1852 etc. — [59]) Des Cloizeaux, Compt. rend. LXX, S. 1209, 1870. Mallard, Traité de Cristallographie II, S. 329. H. Traube, Zeitschr. f. Krystallogr. 22, S. 47, 1893; Berliner Sitzungsber. 1895, S. 195. — [60]) Airy, Cambr. Phil. Trans. IV, S. 79, 198, 1831. F. Neumann, Theoret. Optik, Vorl. XIII, S. 251—266. Mac Connell, Proc. Cambr. Phil. Soc. V, S. 53, 1883; Proc. Roy. Soc. London XXXIX, S. 409, 1885; Trans. Phil. Soc. CLXXVII, S. 299, 1887. — [61]) Zech, Pogg. Ann. 109, S. 60, 1860. Voigt, Wied. Ann. 31, S. 326, 1887. Drude, Wied. Ann. 36, S. 532, 1889. — [62]) Van Kyn van Alkemade, Wied. Ann. 20, S. 22, 1883. — [63]) Drude, Wied. Ann. 36, S. 865, 1889; 43, S. 126, 1891.

III. Kapitel. [64]) Voigt, Wied. Ann. 23, S. 277, 1884. — [65]) Drude, Wied. Ann. 40, S. 665, 1890. — [66]) Voigt, Wied. Ann. 23, S. 587—604, 1884. — [67]) Brewster, Phil. Trans. I, S. 11, 1819. Haidinger, Wiener Sitzungsber. 13, S. 316, 1854. — [68]) Bertrand, Zeitschr. f. Kryst. 3, S. 645, 1879. Lommel, Wied. Ann. 9, S. 108, 1880. — [69]) Liebisch, Göttinger Nachr. 1888, S. 202. — [70]) Drude, Wied. Ann. 32, S. 599, 1887. — [71]) Drude, l. c. S 603. — [72]) Voigt, Wied.

Ann. 24, S. 144—156, 1885. Drude, Wied. Ann. 42, S. 666, 1891. — 73) Drude,
Wied. Ann. 32, S. 607, 1887. — 74) Drude, Wied. Ann. 34, S. 489, 1888. — 75) Voigt,
Wied. Ann. 23, S. 121, 1884. — 76) Drude, Wied. Ann. 35, S. 521, 1888. —
77) Quincke, Pogg. Ann. 128, S. 551, 1866. Drude, Wied. Ann. 35, S. 519, 1888.
— 78) Voigt, Wied. Ann. 23, S. 131 ff., 1884. Drude, Wied. Ann. 39, S. 481,
1890. — 79) Kundt, Wied. Ann. 34, S. 469, 1888. Du Bois und Rubens, Wied.
Ann. 41, S. 507, 1890. — 80) Voigt, Wied. Ann. 25, S. 95, 1885; 35, S. 76, 1888.
Drude, Wied. Ann. 43, S. 126, 1891. — 81) v. Helmholtz, Pogg. Ann. 154,
S. 582, 1875; Wied. Ann. 48, S. 389, 723, 1893; Wiss. Abhandl. II, S. 213; III,
S. 505. Ketteler, Wied. Ann. 7, S. 666, 1879. Koláček, Wied. Ann. 32,
S. 224, 429, 1887; 34, S. 673, 1888. — 82) Christiansen, Pogg. Ann. 141, S. 570,
1870. Kundt, Pogg. Ann. 143, S. 259, 1871; 144, S. 128, 1872; 145, S. 164,
1872. — 83) Ketteler, Wied. Ann. 12, S. 363, 1881. — 84) Boussinesq, Journ.
de Math. (2) 13, S. 425—438, 1868. — 85) Drude, Wied. Ann. 46, S. 353, 1892.
Goldhammer, Wied. Ann. 46, S. 71, 1892.

IV. Kapitel. 86) Voigt, Crelle's Journal 89, S. 288, 1880. Kirchhoff,
Crelle's Journal 90, S. 34, 1881; Ges. Abhandl. Nachtrag, S. 17. — 87) Sommer-
feld, Math. Theorie der Diffraktion, Math. Annalen, 47, 1896. — 88) W. Wien,
Wied. Ann. 28, S. 117, 1886; Berl. Sitzungsber. 1885, S. 817. Gouy, Compt.
rend. XCVI, S. 697, 1883; XCVIII, S. 1573, 1884; Ann. chim. phys. (6) VIII,
S. 145, 1886. Maey, Wied. Ann. 49, S. 69, 1893. — 89) Beltrami, R. Accad. d.
Lincei, Rend., IV (2), S. 51, 1895. — 90) Huyghens, Traité de la lumière (1678),
S. 17; Klassikerausgabe Nr. 20, S. 23. — 91) Fresnel, Mém. Acad. d. sciences
Paris 1826, S. 406; Oeuvres compl. I, (Paris 1866), S. 316. — 92) Fraunhofer,
Denkschr. d. Akad. München 8, S. 1—76, 1822; Gilbert's Ann. 74, S. 337—373,
1823. — 93) Schwerd, Die Beugungserscheinungen, Mannheim 1835. — 94) Lommel,
Grunert's Arch. f. Math. u. Phys. 36, S. 400, 1861. — 95) Fraunhofer, Gilbert's
Ann. 74, S. 339, 1823. Schwerd, l. c., Abt. 2 u. 4. — 96) Langley, Phil. Mag.
(5) XXII, S. 172, 1886. Schumann, Sitzungsber. d. Akad. Wien, 102, IIa,
S. 625—694, 1893. — 97) Kirchhoff, Wied. Ann. 18, S. 663, 1882; Berl. Sitzungs-
ber. 1882, S. 641—669; Ges. Abhandl. Nachtrag, Nr. 3; Math. Optik, Vorl. 2—4.
— 98) Kirchhoff, Berl. Sitzungsber. Okt. 1859; Ges. Abhandl. S. 564. — 99) Kirch-
hoff, Berl. Sitzungsber. Dez. 1859; Untersuchungen über das Sonnenspektrum
und die Spektra der chem. Elemente, Berlin 1862; Ges. Abhandl. S. 566—598.
— 100) Pringsheim, Wied. Ann. 45, S. 428, 1892; 49, S. 347, 1893. Paschen, Wied.
Ann. 51, S. 40, 1894.